Arnold Bernhard

Geometrische Bilder für den Menschen und seine nachtodliche Verwandlung

Textheft

Paracelsus-Zweig Schriftenreihe Nr. 2
Basel

Paracelsus-Zweig Schriftenreihe Nr. 2

Herausgeber Anthroposophische Gesellschaft,
Paracelsus-Zweig Basel
Redaktion Rudolf Bind

Arnold Bernhard

Geometrische Bilder für die Dreigliederung des Menschen und für die nachtodliche Verwandlung der Kräftestruktur der Röhrenknochen in diejenige der Kopfknochen

Textheft

Zum Autor
Arnold Bernhard wurde 1926 in Winterthur geboren, lebt in Reinach. Nach dem Besuch der Oberrealschule Mathematikstudium an der E.T.H. in Zürich. Wegen langer, schwerer Krankheit nach acht Semstern abgebrochen. Besuch des Oberseminars für Primarlehrer in Zürich. Ein Jahr Sekundarlehrer auf dem Lande; fünf Jahre Mathematiklehrer an der Oberrealschule in Winterthur. 1965 Übertritt an die Oberstufe der Rudolf Steiner Schule Basel. 26 Jahre lang Unterricht in Mathematik, geometrisch Zeichnen und Astronomie. Seit 1981 zunehmend in der Lehrerbildung tätig, vor allem am Lehrerseminar der Waldorfschulen in Stuttgart und am Lehrerseminar in Dornach. Seit dem 21. Lebensjahr Beschäftigung mit der Anthroposophie und seit den sechziger Jahren Mitarbeit an der Mathematisch-Astronomischen Sektion am Goetheanum.

1. Auflage

Herausgeber Anthroposophische Gesellschaft, Paracelsus-Zweig Basel
Redaktion Rudolf Bind
Herstellung Kooperative Dürnau

Inhalt

Vorwort

Die beiden Aufsätze dieses Heftes sind schriftliche Ausarbeitungen von zwei Vorträgen, die ich im Frühling 1997 im Paracelsus-Zweig der Anthroposophischen Gesellschaft in Basel gehalten habe; sie sind auf Wunsch des Zweigvorstandes verfasst worden.
Im ersten Aufsatz verbildlichen geometrische Figuren und Prozesse geisteswissenschaftliche Erkenntnisse Rudolf Steiners über die Dreigliederung unserer leiblich-seelischen Organisation und machen sie uns dadurch besser verständlich. Kann das die Geometrie? Ja, denn an der Betrachtung geometrischer Figuren, Figurenverwandlungen und Bewegungsprozessen können wir unser Denken schärfen und verlebendigen. Und nur ein geschärftes und lebendiges Denken kann die geisteswissenschaftlichen Erkenntnisse wirklich erfassen.
Natürlich müssen diese Ausführungen genau und sicher auch wiederholt gelesen werden; man muss sie mit den Zeichnungen genau vergleichen. Wer die Geduld und Ausdauer hierfür aufbringt, wird erleben, dass die geschilderten geometrischen Figuren und Prozesse wie Wahrbilder – Vorstufen von Imaginationen – für die Dreigliederung unseres leiblich-seelischen Wesens werden.
Im zweiten Aufsatz wird sogar die nachtodliche Metamorphose des Kräftesystems der Röhrenknochen (Gliedmassenknochen) in diejenige der kugeligen Kopfknochen geometrisch verbildlicht. Gerade von dieser Metamorphose hat Rudolf Steiner ausdrücklich gesagt, dass sie ohne die Hilfe der Geometrie kaum verstanden werden könne.
Als erster hat wohl *Ernst Bindel* (1890 – 1974) Ellipsen, Parabel und Hyperbeln als Bilder des dreigliedrigen Menschen beschrieben. Er war durch ein halbes Jahrhundert Mathematiklehrer an der ersten Waldorfschule auf der Uhlandshöhe in Stuttgart. Aus

seiner Unterrichtserfahrung heraus hat er das allgemein verständliche Buch verfasst: *Die Kegelschnitte. Ihre zeichnerische Gewinnung und ihre Beziehung zum Menschen.*
Um geometrische Verbildlichung der Metamorphose von Bildekräften der Röhrenknochen in diejenige von Schädelknochen hat sich vor allem *Louis Locher-Ernst* (1906 – 1962) bemüht. Er war am Technikum in Winterthur Professor der Mathematik und wurde dann Direktor dieser Schule. Voll in der Anthroposophie drin stehend, leitete er am Goetheanum die Mathematisch-Astronomische Sektion und wurde an Ostern 1962 von der Generalversammlung in den Vorstand der Allgemeinen Anthroposophischen Gesellschaft gewählt. Im Sommer darauf stürzte er in den Bergen tödlich ab. Es war sein Anliegen, Mathematik auf der Höhe der Zeit so auszubilden, dass in ihr geisteswissenschaftliche Menschenerkenntnis zum Ausdruck kommen kann (zum Beispiel in Louis Locher-Ernst: *Mathematik als Vorschule zur Geisterkenntnis*). Er wollte nicht nur zu Fachleuten sprechen, sondern möglichst zu jedermann. Aber die Bilder zur Verwandlung der Röhrenknochen in die Kopfknochen musste er eben doch in der Fachsprache und in Fachbegriffen darstellen (Louis Locher-Ernst: *Geometrische Metamorphosen*, S. 76 f. und S. 96 f.). Ich habe mich in meinem zweiten Aufsatz bemüht, von diesen Fachbegriffen nur die absolut notwendigen zu benützen und auch diese anschaulich durch strömende Bewegung von Punkten auszudrücken. Diese Strömungen und andere geometrische Figuren und Prozesse sind in zahlreichen Zeichnungen ausführlich dargestellt und in einem separaten Bildheft zusammengefasst. Beim Lesen können Sie Textheft und Bildheft nebeneinander legen und das Bildheft immer bei den Figuren öffnen, auf die sich der Text bezieht.
Alle geometrischen Figuren und Prozesse habe ich so geschildert, dass sie möglichst aus sich selbst verständlich sind; auf beweisende Betrachtungen habe ich aber verzichtet. Wer solche kennen lernen möchte, findet sie in den im Literaturverzeichnis angegebenen Geometriebüchern.

In seinen letzten Lebensjahren sprach Rudolf Steiner öfters von der Metamorphose der Röhrenknochen in die Schädelknochen. Zum Beispiel im 10. Vortrag der *Allgemeinen Menschenkunde als Grundlage der Pädagogik* (GA 293). Und ein Hauptthema ist diese Metamorphose im dritten naturwissenschaftlichen Kurs *Das Verhältnis der verschiedenen naturwissenschaftlichen Gebiete zur Astronomie* (GA 323).
Jede Bemühung, unser Denken zu intensivieren, unseren Gedanken Bildkraft zu geben, sie in Bewegung zu bringen, sind Schritte hin zur Ausbildung des imaginativen Erkennens. Auf solchen Wegen kann es allmählich ausgebildet werden. *Ernst Suter-Schaltenbrand* hat in einem Aufsatz («Das Goetheanum», Jg. 1996, Nr. 15 vom 14. Juli) viele Äusserungen Rudolf Steiners zur Ausbildung des imaginativen Erkennens besprochen. Immer wieder geht Rudolf Steiner von der Schulung des Denkens aus. Bequem ist dieser Weg nicht. Aber er führt sicher zum Ziel. Ich wünsche Ihnen beim Studium meiner Aufsätze erhellende Denkerlebnisse.

Arnold Bernhard

Geometrische Bilder für die Dreigliederung des Menschen

Wie gehen wir mit dem anthroposophischen Gedankengut um? Natürlich müssen wir es zuerst einfach zur Kenntnis nehmen. Aber schon dieses allererste Zur-Kenntnisnehmen regt in uns einen geistigen Prozess an. Denn die anthroposophischen Gedanken lenken unser Nachdenken nicht nur auf sinnlich wahrnehmbare Gegenstände, sondern auf übersinnliche Kräfte und Prozesse und sogar Wesenheiten. Über sie uns Gedanken machen, das können wir durch das Studium der Anthroposophie lernen. Und doch können wir laufend prüfen, ob diese Gedanken glaubwürdig sind, Realitäten ausdrücken. Denn was wir als physische Welt um uns her sehen, ist von solchen übersinnlichen Kräften und Wesenheiten hervorgebracht, geschaffen worden, ist ein Abdruck von ihnen. Immer wieder können wir während des Studiums der Geisteswissenschaft erleben: die geisteswissenschaftlichen Gedanken passen zur äusserlich sichtbaren Welt, machen sie uns erst verständlich. Immer ist es das Bemühen der Geisteswissenschaft zu erforschen, wie seelische und geistige Aktivitäten in physisch wahrnehmbaren Prozessen wirken.
So beschäftigte Rudolf Steiner von der Mitte der Achtzigerjahre des 19. Jh. an die Frage: Wie hängen die seelischen Grundaktivitäten Denken, Fühlen und Wollen mit leiblichen Prozessen zusammen? Die Naturwissenschaft hatte erkannt, dass leibliche Nervenprozesse das Denken begleiten. Dieser Erkenntnis konnte Rudolf Steiner zustimmen. Aber welche Prozesse spielen sich im Leibe ab, wenn wir fühlen oder wollen? Darauf konnte die damalige Wissenschaft keine befriedigende Antwort geben. Rudolf Steiner suchte und suchte. Allmählich wurde ihm deutlich: Ganz anderer Natur als die Vorgänge in den Nerven, sind die

Stoffwechselprozesse in unseren Verdauungsorganen und beim Muskelspiel in Beinen und Armen, wenn wir uns bewegen. Mit Prozessen in diesen Organen hängt Entwicklung von Willenskräften zusammen. Wir wissen aus Erfahrung, dass unsere Willenskraft gelähmt ist, wenn unsere Verdauung durch irgend etwas gestört ist. Haben wir guten Appetit, so sind wir entschluss- und handlungsfähig und auch bewegungsfreudig. Die Hauptorgane des Nervensinnessystems (Gehirn, Augen, Ohren) sind im Kopf, die Hauptorgane des Stoffwechselsystems (Magen, Leber, Darm, Nieren) sind im Unterleib konzentriert; bewegungsfähig sind wir durch Beine und Arme. Dazwischen, in der Brust, sind die Hauptorgane des rhythmischen Systems, Herz und Lunge. Im Leibe spielen sich ab: Der pulsierende Blutkreislauf und der Rhythmus des Ein- und -ausatmens; in der Seele erleben wir unsere Gefühle, pulsierend zwischen mehr freudiger und mehr leidvoller Stimmung. Kommen wir in Gefahr und werden von Angstgefühlen überwältigt, so stocken Atmung und Pulsschlag; geht die Gefahr vorbei, so atmen wir auf, das Herz schlägt wieder frei; freudige Gefühle, Begeisterung, beflügeln Atmung und Pulsschlag. So erleben wir, dass unsere Gefühlsstimmung und Pulsschlag und Atemrhythmus wie eins sind.

Im Jahre 1917, nachdem sich Rudolf Steiner während dreiunddreissig Jahren forschend um den Zusammenhang von seelischen und leiblichen Aktivitäten bemüht hatte, veröffentlichte er seine Erkenntnisse skizzenhaft in einem Aufsatz von dreizehn Seiten im Buch *Von Seelenrätseln*. In diesem und den folgenden Jahren sprach er in Vorträgen[1] öfters über sie, besonders zu Ärzten und Lehrern; denn für Heiler und Erzieher sind es grundlegende Einsichten, die die Praxis in Heil- und Erziehungskunst erst richtig begründen können.

Aber sie können jedem Menschen Selbstverständnis und Anleitung zu einer hygienischen Lebensführung geben. Zudem: Studieren wir diese Dreigliederung an uns, so erwerben wir uns dadurch verständigen Sinn für Dreigliederung überhaupt, und werden dadurch auch besser mithelfen können, den sozialen Organismus aus dem heutigen chaotischen Zustand in ein gesundes Zusammenspiel von Geistesleben, Rechts- und Wirtschaftsleben hinüberzuführen – die dringlichste Aufgabe der Gegenwart und Zukunft.[1]

Nun ist aber auch die Dreigliederung unserer leiblich-seelischen Organisation nicht leicht vorzustellen. Nicht umsonst brauchte Rudolf Steiner über dreissig Jahre, um sie zu erforschen. Als Hilfe für unser Vorstellen entwickeln wir im folgenden geometrische Figuren, welche uns Wahrbilder für die Dreigliederung sein können. In der neueren Geometrie, wie sie seit der Renaissance, seit dem Beginn des Bewusstseinsseelen-Zeitalters, von den Geometern ausgebildet worden ist, trifft man nämlich auf Schritt und Tritt Dreigliederung an; so bei Kurven.

Betrachten wir zum Beispiel einwickelnde und auswickelnde Spiralen, wie wir sie in der Eurythmie gehen (Fig. 1). Beim Einwickeln drehen wir uns in immer engeren Windungen um einen *Punkt*, ein Zentrum herum. Dabei müssen wir uns immer schneller drehen, die Kurve immer mehr krümmen. Umgekehrt beim Auswickeln: wir lösen uns vom Zentrum in immer weiteren Windungen, drehen uns immer langsamer, nähern uns immer mehr dem bloss Gerade-aus-gehen; wir erreichen es zwar nie; aber es ist doch so, wie wenn wir unser Schreiten immer mehr einer *Zielgeraden*, einer *Achse* anpassen müssten. Deutlich ist die Spirale in zwei Gegensätze eingespannt, zwischen das Ganz-gerade nach aussen und in das Ganz-runde nach innen.

1 Erstmals im öffentlichen Vortrag vom 15.3.1917 in Berlin, GA 66, Geist und Stoff, Leben und Tod

1 Überraschend ist der Zusammenhang der Dreigliederungsidee vom menschlichen und sozialen Organismus mit Goethes Märchen, dem ersten Mysteriendrama Rudolf Steiners und den Karmavorträgen von 1924. Tiefen Einblick in diese Zusammenhänge gibt die Studie *Die Mysteriendramen im Lebensgang Rudolf Steiners* von Gundhild Kačer-Bock. Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 1995

Dies wird besonders deutlich, wenn wir nicht nur die Punkte der Kurve zeichnen, sondern in jedem Punkt auch die Bewegungsrichtung, die Tangente (Fig. 2). Im mehr geraden Teil der Kurve, ist der Drehwinkel von Tangente zu Tangente klein im Verhältnis zur Kurvenlänge dazwischen; umgekehrt im mehr runden Teil: der Drehwinkel von Punkt zu Punkt ist gross, im Verhältnis zur kurzen Kurvenlänge. Im Zentrum: reines Drehen der Tangente, der Punkt bleibt anort. In der Achse: blosses Schreiten des Punktes, die Tangente bleibt ohne Drehung in Richtung der Achse.[1] Besonders deutlich erleben wir dieses *Zusammenspiel von Drehen und Gehen*, wenn wir beim Abschreiten der Spirale einen grossen Stab als Tangente unter den Arm klemmen: Beim Zugehen auf das Zentrum dreht sich der Stab immer schneller und wir müssen unsere Schritte verkürzen. Nähern wir uns hingegen rückwärtsgehend der Achse, so müssen wir die Drehung des Stabes bremsen, dafür aber zügig gehen.
An diesem Beispiel sehen wir deutlich: zwei gegensätzliche Aussengebilde (ganz gerade, ganz rund) und ein Zwischengebiet (die Spirale), welches zwischen die Gegensätze eingespannt ist und zwischen ihnen vermittelt. *Alle Dreigliederungen sind ein Zusammenspiel von einem Vermittelnden zwischen zwei Gegensätzen.*
Jetzt bauen wir eine ganze Schar von Kurven auf, welche zwischen das Ganz-runde, den Punkt, und das Ganz-gestreckte, die Gerade, eingebettet ist. In der Ebene seien zum vornherein eine

1 Die Spirale von Figur 2 ist so konstruiert, dass sich die Tangente von Punkt zu Punkt immer um den gleichen Winkel, nämlich um 30° dreht. Nach innen wird das Kurvenstück, längs dem sich die Tangente um diesen Winkel dreht, immer kürzer, die Tangente dreht sich also immer schneller; nach aussen wird der Weg von Punkt zu Punkt immer länger, die Drehung der Tangente immer langsamer. Die Achse erreicht die Spirale allerdings erst im Unendlichen; die gezeichnete Achse hat daher nur symbolischen Wert. Hingegen ist das Zentrum, um das sich die Tangente anort drehen würde, wenn wir die Kurve nach innen immer weiter zeichnen könnten, an der richtigen Stelle.

Gerade, *die Leitlinie l* und ein Punkt, der *Brennpunkt F* gegeben (Fig. 3). Jeder andere Punkt der Ebene, hat zu F eine bestimmte Entfernung r und zu l einen Abstand d; für A ist r grösser als d, für B ist r kleiner als d, und C liegt in der Mitte zwischen l und F, also r gleich d.
Ist C der einzige Punkt, der von F und l gleich weit entfernt ist? Suchen wir andere. Zeichnen wir durch F die Parallele zu l (Fig. 4), und tragen auf ihr von F aus den Abstand a zur Leitlinie ab; die Schnittpunkte des Kreises mit der Parallelen sind auch zwei Punkte, die von F und l gleich weit entfernt sind (r = d = a). Durch solche Parallelen in verschiedener Höhe und Kreise um F, deren Radius mit dem Abstand der Parallelen zu l übereinstimmt, können wir beliebig viele solche Punktpaare finden.
Diesen Konstruktionsgedanken führen wir systematisch aus (Fig. 5): wir zeichnen zu l Parallelen in den Abständen 1, 2, 3, ... usw. und um F Kreise mit den Radien 1, 2, 3, ... usw. Wo sich eine Parallele und ein Kreis mit gleichem Abstand und gleichem Radius schneiden, liegt eines der gesuchten Punktepaare. Gesamthaft liegen sie auf einer schön geschwungenen Kurve, die sich nach links und rechts und oben immer weiter öffnet. Diese Kurve heisst *Parabel*; Parabel bedeutet Gleichheitskurve. Auf ihr liegen eben alle Punkte, die von F und l *gleich weit* entfernt sind.
Wir können auch die Frage stellen: wo liegen alle Punkte, welche *halb* so weit weg sind von F wie von l? Diese Punkte können wir ebenfalls durch die Parallelen und die Kreise um F finden: wir schneiden zum Beispiel die Parallele im Abstand 6 und den Kreis mit Radius 3, ebenso mit Abstand 8 und Radius 4, Abstand 10 und Radius 5 (Fig. 6). Die Parallele mit Abstand 4 und der Kreis mit Radius 2 berühren sich. Auf dieser Parallelen liegt nur einer der gesuchten Punkte, und auf Parallelen darunter gar keine. Ebenso berühren sich die Parallele im Abstand 12 und der Kreis mit Radius 6. Darüber gibt es keine der gesuchten Punkte mehr; denn grössere Kreise und entsprechende Parallelen mit r : d = 1 : 2 schneiden sich nicht mehr. Die gefundenen

Punkte liegen offensichtlich auf einer ovalen Kurve, auf einer *Ellipse*. Um sie sicherer zeichnen zu können, sind auch die Schnittpunkte der Parallelen mit d=5/7/9/11 und der Kreise mit den Radien 2,5/3,5/4,5/5,5 eingezeichnet.
Wir können die Rollen von r und d auch vertauschen und fragen: wo liegen alle Punkte, die von F *doppelt* so weit weg sind wie von l? Wiederum finden wir sie durch die Parallelen und die Kreise (Fig. 7). Es berühren sich die Parallele im Abstand 2 und der Kreis mit Radius 4; dann schneiden sich Parallele mit d=2,5/3/3,5/4/4,5 ..... und Kreise mit r=5/6/7/8/9 ..... und das Schneiden ginge immer weiter, die Skalen könnten beliebig weit fortgesetzt werden. Die Punkte liegen auf einer Kurve, die nach links und rechts sanft ansteigt, nirgends ein Ende hat, sondern immer weiter ansteigt. Eine solche Kurve heisst *Hyperbel*.
Aber wir haben von ihr erst die Hälfte ins Auge gefasst; zu ihr gehören auch Punkte *unter* der Leitlinie: Wir ziehen auch Parallelen *unter* der Leitlinie und bezeichnen ihre Abstände mit -1/-2/-3/.... (Fig. 8). Auch die Kreise um F lassen wir tiefer unter die Leitlinie wachsen; der Radius bleibt aber positiv. Es berühren sich die Parallele mit d=-6 und der Kreis mit Radius r=12; dann schneiden sich Parallele mit d=-6,5/-7/-7,5/-8/-8,5/.... und Kreise mit r=13/14/15/16/17/.... Wiederum geht das Schneiden immer weiter, können die Skalen beliebig weit fortgesetzt werden. Die Kurve fällt nach links und rechts sanft ab und geht auf beiden Seiten immer tiefer hinunter. Wir nennen diese Kurve den *unteren Ast* der Hyperbel; über der Leitlinie liegt der *obere Ast*. Sie liegen symmetrisch in bezug auf die Parallele mit d=-2 (Fig. 9) und sind ganz gleich gestaltet; nur steigt der obere Ast nach links und rechts an, der untere ab. Alle Punkte des oberen und unteren Astes genügen eben der gleichen Bedingung: jeder Punkt ist *doppelt so weit* von F weg wie von 1; daher gehören sie zusammen.
In Figur 9 sind beide Äste eingezeichnet, und dazu noch zwei Linien a_1 und a_2, die deutlich zeigen, wie die beiden Äste zusammen gehören. Sie gehen durch den Mittelpunkt in der Tiefe

-2 und steigen so an, dass sich die Anstiegsstrecke s zur gewonnenen Höhe h wie zwei zu eins verhalten (s:h = 2:1). Die beiden Hyperbeläste nähern sich nach links und rechts aussen immer mehr diesem Kreuz. Nach einer alten griechischen Bezeichnung nennt man die beiden Geraden *Asymptoten*; das heisst Nichtberührende. Verfolgen wir nämlich, wie zum Beispiel der obere Ast nach rechts oben ansteigt, so sehen wir, dass er sich immer mehr der Asymptote a_1 nähert. Diese Annäherung geht über den Blattrand hinaus immer weiter; immer dichter schmiegt sich die Kurve der Asymptote an, erreicht sie aber nie ganz. In allen vier Richtungen des Kreuzes verlaufen die Hyperbeläste so; in allen vier Richtungen suchen die Äste die Berührung mit den Asymptoten und erreichen sie aber nicht.
So haben es schon die alten griechischen Geometer gedacht und empfunden. Sie spürten: es will ins Unendliche gehen; aber das Unendliche war ihnen ein grosses Rätsel; sie konnten es begrifflich noch nicht fassen. Erst in der Neuzeit, erst seit die Zeit für die Entwicklung der Bewusstseinsseele gekommen ist, vermochten die Geometer Begriffe über das Unendliche auszubilden. Allmählich klärte sich: wir dürfen auf jeder Asymptote *einen unendlichfernen Punkt* denken. Lassen wir in Gedanken auf dem oberen Ast nach rechts oben einen Punkt immer weiter ansteigen, auch immer schneller, so kann er das Unendliche in diesem einen unendlichfernen Punkt der Asymptote durchstossen und setzt dann seine Bahn auf dem unteren Ast von links unten nach rechts oben fort; bis zum Scheitelpunkt des unteren Astes immer weiter ansteigend. Vom Scheitelpunkt aus steigt er nach rechts ab, durchstösst das Unendliche im unendlichfernen Punkt der anderen Asymptote a_2 und bewegt sich auf dem oberen Ast von links oben absteigend bis zum oberen Scheitel; um dann rechts wieder anzusteigen. In den beiden unendlichfernen Punkten hängen die beiden Äste zusammen; bilden zusammen eine geschlossene Kurve, können ohne Riss in geschlossener Bewegung durchlaufen werden.
Nun gehören zum gewählten Brennpunkt F und zur gewählten

Leitlinie 1 unendlich viele Ellipsen und unendlich viele Hyperbeln; zu jedem Verhältnis r:d, bei dem r grösser ist als d, gehört eine Hyperbel und zu jedem Verhältnis, bei dem r kleiner ist als d, eine Ellipse. In Figur 10 sind zur Parabel (stark ausgezogen) zwei Ellipsen und zwei Hyperbeln (gestrichelt) gezeichnet. Zur kleineren Ellipse gehört das Verhältnis r:d=1:5, zur grösseren r:d=1:2. Je kleiner r im Verhältnis zu d ist (z.B. r:d=1:100), umso kleiner und runder ist die Ellipse, umschliesst den Brennpunkt F in nächster Nähe, fast wie ein kleiner Kreis. Gewinnt r an Grösse, nähert sich das Verhältnis r:d dem Verhältnis 1:1, so schwellen die Ellipsen an, werden immer grösser; der obere Scheitel steigt immer höher hinauf, der untere steigt ab gegen den Parabelscheitel. Zum Beispiel für r:d=99:100 ist es eine riesengrosse Ellipse, die dicht oberhalb der Parabel verläuft. Und dann kommt das ganz besondere Verhältnis 1:1 und die ganz besondere Kurve, die Parabel, die nicht mehr Ellipse und noch nicht Hyperbel ist. Als Sonderform trennt sie die Ellipsen von den Hyperbeln und vermittelt doch zwischen ihnen. Sobald das Verhältnis den Wert 1:1 überschreitet, nehmen die Kurven Hyperbelform an. Überwiegt r nur wenig gegenüber d (z.B. r:d=100:99), so verläuft der obere Hyperbelast dicht unter der Parabel, der untere Hyperbelast verläuft, symmetrisch zum oberen, weit unten. Gewinnt r an Übergewicht, so löst sich der obere Hyperbelast nach unten mehr von der Parabel ab, dafür steigt der untere Ast von unten auf. Für die Hyperbel mit den langgestrichelten Ästen (Fig. 10) ist r doppelt so stark wie d, für diejenige mit den kurzgestrichelten ist r:d=5:1; sie verläuft auf der Zeichnung nah über und unter der Leitlinie, nur wenig gekrümmt, und streckt sich dann ihren Asymptoten entlang. So geht die Entwicklung weiter: wenn r stark überwiegt (z.B. r:d=100:1), so verlaufen die beiden Äste fast als Parallele in nächster Nähe der Leitlinie, und die Asymptoten steigen nach links und rechts nur ganz langsam an. Wir sehen deutlich, wie die Kurvenschar zwischen dem Ganz-runden, dem Brennpunkt, und dem Ganz-gestreckten, der Leitlinie, vermittelt. Üben wir

unser denkendes Vorstellen an solchen Kurvenbetrachtungen, so wird es beweglich. Wir reissen es auch los vom Gängelband der Sinneserfahrung; denn bei den Hyperbeln haben wir weit über die auf dem Blatt sichtbare Zeichnung hinaus gedacht. Durch dieses aktivierte und über die Sinneserfahrung hinaus erweiterte Vorstellen können wir Erkenntnisse der Geistesforschung tiefer verstehen. Zum Beispiel die Dreigliederung unserer physisch-seelischen Organisation. Es erweist sich auch die betrachtete Kurvenschar wie ein geometrisches Bild des dreigegliederten Menschen.

Natürlich erleben wir uns zunächst als einheitliches Wesen, als eine Einheit. Dass in dieser Einheit drei wohl unterscheidbare Seelenaktivitäten in drei unterschiedlichen Organsystemen wirksam sind, wird uns erst nach und nach durch Lebensbeobachtung und denkende Verarbeitung dieser Beobachtung bewusst.

Auch die betrachtete Kurvenschar ist zugleich eine Einheit und eine Dreiheit. Deutlich lassen sich als Dreiheit unterscheiden: die Schar der Ellipsen und die Schar der Hyperbeln und dazwischen die Parabel. Aber alle sind sie zwischen Brennpunkt und Leitlinie eingespannt; alle sind sichtbarer Ausdruck der sie bestimmenden Bedingung; längs jeder Kurve gilt: r:d=konstant. Es variiert nur der Wert dieser Konstanten. Die ganze Kurvenschar ist durch dieses einheitliche Gesetz zusammengehalten.

Können uns die drei Kurvensorten auch Bilder für die einzelnen Organgebiete des Menschen sein? Vergleichen wir die Ellipsen mit den Hyperbeln. Die Ellipsen können wir mit unserem Vorstellen ganz umfassen. Wir können sie mit ruhigem Blick betrachten, und es entgeht uns nichts an ihnen. Ganz anders die Hyperbeln: nur was auf dem Blatt sichtbar ist, erfasst unser gewöhnliches Vorstellen. Um sie in ihrer Ganzheit zu erleben, müssen wir unser Vorstellen mächtig in Bewegung versetzen. In rasantem Schwung müssen wir in Figur 9 den oberen Ast der Hyperbel nach aussenoben fortsetzen, auf die Asymptote zugehen lassen, das Unendliche durchstossen und von links unten her, geführt von der Asymptote, ins Endliche zurückführen; dann erneut rasanter Schwung längs der anderen Asymptote. Wie ruhig hingegen können wir den Verlauf der Ellipse verfolgen.

Ruhe und *Bewegung* sind aber auch zwei charakteristische Eigenschaften des Kopf- und Gliedmassenmenschen. Für unsere Gliedmassen ist es gut, wenn sie sich den Tag hindurch viel bewegen können. Welche Wohltat ist es für uns, wenn wir sie nach einer langen Autofahrt wieder rühren können.

Und die Fortsetzung des Bewegungssystems nach innen, das Verdauungssystem, ist auch ganz bewegter Prozess. Die aufgenommene Nahrung wird vom Kauen im Mund an durch den Schlund, den Magen, die Därme bewegt; die Nahrung wird durch die gründlichsten stofflichen Veränderungen geführt und durch Blut- und Lymphstrom im ganzen Leib verteilt. Innere Bewegungsprozesse, die durch regelmässige äussere Bewegung der Gliedmassen ständig angeregt werden müssen.

Welche Ruhe dagegen im Kopfbereich! Nur den Unterkiefer können wir bewegen; aber der gehört eigentlich zum Gliedmassensystem, vertritt es im Kopfbereich und dient der Verdauung. Mit dem Kopf verarbeiten wir eben die Welt nicht stofflich, greifen nicht handelnd in sie ein, sondern machen uns über sie Gedanken. Von sicherer Warte aus können wir die Welt ruhig betrachten, uns in sie hineinhören, hineinriechen, und was uns die Sinne an Kunde über die Welt geben, durchdringen wir mit Gedanken und bilden uns Vorstellungen. So schaffen wir uns in unseren Vorstellungen ein Abbild der Welt; in diesem Vorstellungsschatz wachen wir vollbewusst, können ihn in Ruhe überblicken, wie wir in Ruhe die Ellipse in allen Einzelheiten betrachten können.

Wie rasant hingegen müssen wir unser denkendes Vorstellen bewegen, wenn es einer Hyperbel nachlaufen soll. Willenskräfte müssen unser Vorstellen in Bewegung versetzen. Willenskraft ergreift auch das Muskelsystem unserer Gliedmassen, setzt sie in Bewegung; Willenskraft wirkt auch in den Stoffwechselprozessen. Im Stoffwechsel-Gliedmassensystem ist der Herd aller Wärme- und Lebensentfaltung. Aber: diese Willens-Prozesse bleiben uns unbewusst, wir verschlafen sie; glücklicherweise! Denn wir könnten ihre wuchtige Intensität bewusst nicht aushalten.

Im Kopf hingegen ist wenig Leben; Gehirn- und Nervensystem sterben fortwährend ab, werden durch die Lebensquelle des Gliedmassen-Stoffwechselsystems gerade noch am Leben erhalten. Hellwaches Bewusstsein kann im Gehirn und Nervensystem nur dadurch aufleuchten, dass in ihnen das Leben zurückgedrängt wird.

Physisch ist der Kopf stark ausgeformt. Der Schädel wölbt sich in fast vollkommener Kugelgestalt wie ein erstarrtes Bild der Himmelssphäre und umschliesst die Weichteile von aussen. Vom Kopf aus strahlen (besonders in der Kindheit) Formkräfte in den ganzen Leib, Gestalt gebend, da wo Gestalt nötig ist.

Umgekehrt wirkt das Stoffwechsel-Gliedmassensystem: es möchte alle Gestalt auflösen, in Fluss bringen. In den Gliedmassen zieht sich das Gestaltete, die Röhrenknochen, ins Innere zurück. Reichlich durchblutete, weiche Muskulatur umgibt sie, in denen das Leben fliesst.

Kopf und Gliedmassen – welche Gegensätze! Wie können sie zusammen leben?! So entgegengesetzt wie Brennpunkt und Leitlinie! Wie die Ellipsen, welche den Brennpunkt umformen und die Hyperbeln, welche den Asymptoten und schliesslich der Leitlinie entlangeilen. Aber je mehr sie von oben und unten einer Mitte zugehen, umso mehr gleichen sich die Gegensätze aus; und die Parabel ist ein Mittleres, in dem die Gegensätze aufgehoben sind. Aber sie hat Züge des Oben und des Unten, sie kann sich nach oben wenden und Ellipsen auftreten lassen und nach unten zu den Hyperbeln führen.

So gibt es zwischen Kopf und Gliedmassen ein Mittleres, das *rhythmische System.* Ohne dieses rhythmische System würden Kopf und Glieder gegeneinander wüten, eins wollte das andere ausschalten und allein herrschen.

Wie verläuft denn die Parabel? Sie steigt tiefer hinab zur Leitlinie als die Ellipsen, aber nicht unter die Leitlinie wie die Hyperbeln. Sie durchstösst das Unendliche nicht; aber sie entflieht doch dem Endlichen, lässt sich vom Brennpunkt nicht im Endlichen zurückhalten wie die Ellipsen. – Versuchen wir, uns die Parabel in ihrem ganzen Verlauf vorzustellen: links und rechts unaufhörlich ansteigend, auch immer weiter nach links und rechts ausholend; die Bewegung nach oben aber immer rasanter werdend, die gemächliche Bewegung nach links und nach rechts überwältigend, so dass die Kurve auf beiden Seiten immer steiler ansteigt und auf den unendlichfernen Punkt in senkrechter Richtung nach oben hinstrebt. In diesem Punkt kommen linke und rechte Seite wieder zusammen, schliesst sich die Kurve, und berührt genau in ihm die Unendlichkeit. Sie schliesst sich oben nicht im Endlichen schon wieder zusammen wie die Ellipsen, und nicht erst unter der Leitlinie – das Unendliche durchstossend – wie die Hyperbel. Wir müssen unserem Vorstellen mehr Schwung geben, um es der Parabel nachzuführen, als den Ellipsen, aber nicht so viel wie bei den Hyperbeln. Ruhe und Bewegung ausgeglichen!

Und im rhythmischen System? Das Blut kreist unaufhörlich in unseren Adern, aber im Herzen wird es in regelmässigen, kurz aufeinanderfolgenden Abständen angehalten; dann wieder der Bewegung übergeben. Ruhe und Bewegung im Rhythmus! Rhythmisch pulsierende Bewegung! Und ebenso die Atmung: Einatmen – kurze Zeit Ruhe – ausatmen – kurze Ruhe ... immer im Rhythmus, Tag und Nacht, unermüdlich, ein Leben lang! Und Blutrhythmus und Atemrhythmus aufeinander abgestimmt: einen Atemzug auf vier Pulsschläge! Aber nicht immer: tagsüber hat jeder Mensch sein individuelles Verhältnis von Atem zu Herzschlag und variiert es auch im Laufe des Tages. Aber nachts im Schlaf nähern wir uns alle diesem universellen Verhältnis 1:4 und erreichen es etwa um drei bis vier Uhr morgens.

Ein so waches Bewusstsein haben wir von diesen rhythmischen Prozessen nicht wie von unseren Vorstellungen; aber wir verschlafen sie auch nicht wie unsere Willensprozesse, wir fühlen wie träumend in ihnen. Bewusster im Atemprozess als im Blutkreislauf. Wir können uns auch bewusst vornehmen, den Atemrhythmus etwas zu beschleunigen oder zu verzögern; der Herzrhythmus entzieht sich ganz unserem bewussten Einfluss. Überhaupt ist die Atmung mehr dem Kopf zugeneigt, der Blutkreislauf mehr dem Stoffwechsel. Oft hat Rudolf Steiner darauf hingewiesen, dass sich der Atemrhythmus auf das Gehirn überträgt. Immer wenn wir beim Einatmen das Zwerchfell senken, üben wir auf die Flüssigkeit im Rückenmarkskanal einen Druck aus, der sich nach oben bis ins Gehirnwasser fortsetzt, in dem das Gehirn schwimmt. Heben wir beim Ausatmen das Zwerchfell wieder, so lässt dieser Druck wieder nach, so dass das Gehirn von zunehmendem und wieder abnehmendem Druck wie leicht massiert wird. Rudolf Steiner betrachtet diesen Druck-Rhythmus als wesentliche leibliche Voraussetzung für den Denkprozess. Manchmal nennt er das Denken sogar ein verfeinertes Atmen.

Der Blutkreislauf hingegen dient ja ganz dem Stoffaustausch: in den Lungen saugt sich das Blut voll mit lebenspendendem Sauerstoff, verteilt ihn im ganzen Leib, gibt ihn an alle Organe und Gewebe ab, und belädt sich dafür mit der toten Kohlensäure, die wie Schlacke aus den Verbrennungsprozessen herausfällt. Ganz besonders intensiv muss das Gehirn mit Sauerstoff versorgt werden: es verbraucht volle 30 % der gesamten Sauerstoffzufuhr. Wenn diese Zufuhr nur während Minuten beeinträchtigt oder gar unterbrochen ist, hat der Zerfall der Gehirnzellen so überhand genommen, dass sie nicht mehr regeniert werden können. Ein Zeichen dafür, wie intensiv die fortwährenden Absterbeprozesse im Gehirn und im übrigen Nervensystem sind. Wie intensiv ihnen durch Atmung und Blut Lebenskräfte aus den Stoffwechselprozessen ständig zugeführt werden müssen. Und nicht nur Sauerstoff führt das Blut dem ganzen Leibe zu und befreit ihn vom Gift der Kohlensäure, sondern auch all die Aufbaustoffe, die in der «Küche» des Stoffwechsels zubereitet worden sind.

So sehen wir, wie das rhythmische System zwischen den Extremen der Kopfprozesse und der Stoffwechselprozesse dauernd ausgleicht und nötigenfalls das Gleichgewicht zwischen ihnen wieder herzustellen bemüht ist, wenn dieses gestört worden ist. Krankheiten können verstanden werden als Störungen dieses Gleichgewichtes. Wenn die Lebens- und Feuerprozesse des Stoffwechselsystems an Körperstellen intensiv auftreten, wo sie nicht in dieser Stärke hingehören, so entstehen entzündliche Erkrankungen. Wenn hingegen die Formkräfte des Kopfes irgendwo überwiegen und zu Erstarrung führen, so entstehen Verhärtungskrankheiten wie Gicht und Rheuma. Leben im Übermass führt zu Auflösung, Form in Übermass zu Erstarrung. Immer versucht das rhythmische System die Gegensätze auszugleichen. Aber das gelingt nicht immer. Besonders nicht in der heutigen Zeit, in der das Berufsleben vielen Menschen eine arhythmische Lebensführung auferlegt. Wir tun deshalb gut daran, unser Leben so rhythmisch wie es geht, einzurichten. Leider müssen wir ja beobachten, wie der Sinn für hygienische Lebensführung allgemein mehr und mehr verloren geht. Er wird nur wieder gewonnen werden können, wenn wir uns der Bedeutung des rhythmischen Systems als dem Zentrum aller Hygiene bewusst werden.

Aber nicht nur zwischen unten und oben vermittelt das rhythmische System, sondern auch zwischen Vergangenheit und Zukunft. So ganz in der Gegenwart leben wir durch Atmung und Blutkreislauf. Unser Erdenleben beginnt mit dem ersten Atemzug und endet mit dem letzten. Der Kopf aber ragt als Erzeugnis vergangener Epochen in die Gegenwart hinein. Und mit dem Tod ist er am Ende seiner Entwicklung angekommen. Schon während des Erdenlebens war er ja in ständigem Absterben begriffen.

Was aber als Kräftekonfiguration in unserem Gliedmassen-Stoffwechselsystem lebt, das kann sich während des Erdenlebens noch gar nicht voll entfalten. Nichts von dieser Kräfteorganisation geht uns beim Tod verloren. Voll und ganz können wir

sie in das nachtodliche Dasein, in das Leben im Geistkosmos, mitnehmen. Und im Schosse der Hierarchien, unter ihrer Anleitung und Mithilfe, arbeiten wir hauptsächlich daran, diese Kräfteorganisation umzuwandeln, ihr eine neue Gestalt zu geben – welche? Diejenige, welche uns für das zukünftige Erdenleben den neuen Kopf gestalten wird! So konkret hängt auch leiblich unser gegenwärtiges Erdenleben mit dem nächsten zusammen. Als Keim tragen wir schon jetzt unseren zukünftigen Kopf in der Kräftekonfiguration des gegenwärtigen Gliedmassen-Stoffwechselsystems in uns! Diese Umwandlung im nachtodlichen Dasein müssen wir uns als grosses, umfassendes Geschehen vorstellen. Es in Einzelheiten immer konkreter zu erfassen, wird Aufgabe zukünftiger Geistesforschung sein. Wie sich die Kräfteorganisation, die gegenwärtig die *Röhrenknochen* unserer Gliedmassen schafft, nachtodlich umwandeln könnte in diejenige, welche die *kugeligen Knochen* unseres zukünftigen Hauptes hervorbringen wird, davon können uns aber heute schon geometrische Prozesse eine gewisse bildhafte Vorstellung geben.

Der zweite Aufsatz stellt solche Prozesse dar.

Geometrische Bilder für die nachtodliche Verwandlung der Kräftestruktur der Röhrenknochen in diejenige der Kopfknochen

Eine Hyperbel, deren Äste nah der Leitlinie verlaufen, zum Beispiel die kurz gestrichelte in Figur 10, ist angenähert wie ein Schnitt durch einen Röhrenknochen. Ellipsen in der Nähe des Brennpunktes sind wie idealisierte Schnittfiguren eines kugeligen Schädels. Kann eine solche Hyperbel stetig, kontinuierlich, in eine Ellipse verwandelt werden? Die Kurvenschar der Figur 10 des ersten Aufsatzes zeigt zwar eine stetige Verwandlung. Aber diese kann kein geeignetes Bild für die Verwandlung eines Röhrenknochens in einen Schädelknochen sein, denn sie spielt sich äusserlich sichtbar vor unseren Augen ab. Die nachtodliche Verwandlung hingegen verläuft ja ganz in übersinnlichen Kräfteverhältnissen.

Nun haben die Geometer der Neuzeit gelernt, Hyperbeln und Ellipsen als *Stauprodukte von Bewegungsvorgängen* aufzufassen. Sie stiegen von der sichtbaren Hyperbelform auf zu *Punktströmungen,* die durch die ganze Ebene verlaufen, sich an der Hyperbel stauen, und die so verwandelt werden können, dass sie nicht mehr eine Hyperbel sondern einen Kreis als Stauprodukt erzeugen. Die Verwandlung findet also nicht auf der Ebene der Formen selbst statt, sondern eine Stufe höher, auf der Ebene der *Bewegungen.*

Diese Punktströme verlaufen längs Geraden. Zuerst stellen wir uns einen einzelnen solchen Punktstrom vor (Fig. 11). Um den

Punkt S drehe sich eine Gerade wie der Zeiger einer Uhr. Aber den Uhrzeiger denken wir uns in beiden Richtungen unendlich lang und verfolgen, wie sich der Schnittpunkt mit der Senkrechten s bewegt, wenn der Zeiger sich dreht.

Wir gehen aus von der Zeigerstellung null Uhr nach oben und sechs Uhr nach unten. Er weist dann nach unten und oben in der gleichen Richtung wie s, und der Schnittpunkt ist im Unendlichen zu denken. Wir geben ihm den Namen P_0,∞.[1] Dreht sich der Zeiger in die Stellung 1 Uhr – 7 Uhr, so fällt der Schnittpunkt aus dem Unendlichen herab bis zu l; beim Weiterdrehen durchläuft er fallend die Stationen 2, 3, 4, 5, ... Dann nähert sich der Zeiger wieder der senkrechten Stellung und der Schnittpunkt sinkt immer tiefer hinab. Wenn der Zeiger die senkrechte Stellung durchläuft (nach unten weisend, was anfänglich nach oben wies, und umgekehrt), dann durchläuft der Schnittpunkt den unendlichfernen Punkt P_6,∞ und sinkt dann wieder von oben ins Endliche hinein. Denn sobald der Zeiger über die senkrechte Stellung hinausdreht, schneidet er s oben wieder. Der Schnittpunkt durchläuft beim Weiterdrehen die Stationen (7), (8), (9), ... (P_{12},∞), die mit den Stationen 1, 2, 3, ..., P_6,∞ zusammenfallen. Wenn der Zeiger erneut in der Senkrechten angekommen ist, hat er wieder die Anfangsstellung erreicht, und der Bewegungsvorgang fängt wieder von vorne an. So durchströmt der Punkt P die Gerade s unaufhörlich von oben nach unten, zweimal, wenn der Zeiger sich einmal ganz dreht. Wenn er den unendlichfernen Punkt durchläuft, ist er immer zugleich unendlich weit unten und oben. P_0,∞ und P_6,∞ (und auch P_{12},∞) sind der *gleiche* unendlich-ferne Punkt, denn sie gehören zur gleichen senkrechten Zeigerstellung.

Dreht sich der Uhrzeiger im Gegensinn, also zurück, so läuft der Punktstrom auf s von unten nach oben, aber sonst in der gleichen Art. Solche Punktströme (in beiden Richtungen) werden wir uns im folgenden vorstellen. Dabei brauchen wir nicht im-

1 Das Zeichen ∞ deutet die unendliche Lage von P_0 an.

mer an einen drehenden Zeiger zu denken, der ihn erzeugt, sondern stellen uns den Punktstrom auch für sich allein vor.
Mit Kreisen, Ellipsen, Parabel und Hyperbeln sind in natürlicher Weise solche Punktströme verbunden; wir zeigen es zuerst am Kreis (Figur 12 und folgende). In Figur 12 durchclaufe P auf s einen solchen fallenden Punktstrom. Das merkwürdige ist nun, dass der Kreis diesem Punktstrom von P einen zweiten zuordnet. Zieht man nämlich von P aus die beiden Tangenten t_1 und t_2 an den Kreis und verbindet ihre Berührungspunkte B_1 und B_2 miteinander, so schneidet die Verbindungsgerade p die Senkrechte s in einem zweiten Punkt $\bar{P}$ (gelesen P quer). Der Kreis ordnet so den Punkt $\bar{P}$ dem Punkt P wie einen Zwillingsbruder zu. Führt man nämlich von $\bar{P}$ aus die gleichen Konstruktionsschritte aus (Fig. 13), das heisst: zieht man von $\bar{P}$ aus die beiden Tangenten $\bar{t}_1$ und $\bar{t}_2$ und verbindet die beiden Berührungspunkte $\bar{B}_1$ und $\bar{B}_2$ miteinander, so schneidet die Verbindungsgerade $\bar{p}$ die Gerade s wieder im Ausgangspunkt P. Dem Punkt $\bar{P}$ seinerseits ordnet also der Kreis wieder den Punkt P zu; er ordnet die beiden Punkte einander *gegenseitig* zu. Sie seien durch den Kreis konjugiert (verbunden miteinander), sagen die Geometer. Wir sagen: sie seien Bruderpunkte. Ebenso gehören wie Geschwister zueinander der Punkt P und die Gerade p. Von p sagen wir, sie sei die *Polare* von P, und von P, er sei der *Pol* von p; ebenso für $\bar{p}$ und $\bar{P}$. Die Polaren p und $\bar{p}$ haben auch gegenseitig eine besondere Lage: sie schneiden sich in einem Punkt S auf dem horizontalen Durchmesser m.
In Gedanken setzen wir nun die Figuren 12 und 13 in Bewegung: P bewege sich nach unten (Fig. 12); die Tangenten und ihre Berührpunkte gehen mit; die Polare p dreht sich im Uhrzeigersinn um den Punkt S. Also bewegt sich $\bar{P}$ auch nach unten und begleitet ständig die Bewegung von P. Auch die Tangenten $\bar{t}_1$ und $\bar{t}_2$ bewegen sich mit (Fig. 13), und die Polare $\bar{p}$ dreht sich auch um S, immer durch P gehend.
Von dieser bewegten Figur verschaffen wir uns jetzt eine möglichst präzise Vorstellung; die Vorstellung, wie sie sich wandelt,

wenn P die ganze Gerade s durchläuft. Wie sieht sie aus, wenn der Punkt P im unendlichfernen Punkt von s liegt (Fig. 14)? Dann kommen die Tangenten t_1 und t_2 senkrecht herunter und berühren den Kreis links und rechts in den Punkten B_1 und B_2; die Polare liegt horizontal, fällt zusammen mit der horizontalen Mittellinie m. Der Schnittpunkt $\bar{P}$ mit s liegt in mittlerer Höhe; wir nennen ihn daher die Mitte M. Seine Tangenten $\bar{t}_1$ und $\bar{t}_2$ verlaufen symmetrisch zu m und berühren den Kreis in zwei Punkten $\bar{B}_1$ und $\bar{B}_2$ die senkrecht unter und über dem Punkt S liegen. Die Polare $\bar{p}$ steigt senkrecht an, im Unendlichen durch den Punkt P gehend. Es sind einander also zugeordnet: der unendlichferne Punkt der Geraden s und der Punkt M in mittlerer Höhe; zwei besondere Stationen, die wir immer wieder antreffen werden. Senkt sich P aus dem Unendlichen herunter bis in die Lage der Figur 13, so fällt der Bruderpunkt von M aus bis zur eingezeichneten Lage $\bar{P}$. P hat sich aus dem Unendlichen weit, sehr weit herunter bewegt; $\bar{P}$ hat hingegen von M aus nur eine kleine Strecke durchfallen. Bewegen sich die beiden Bruderpunkte weiter nach unten, so nähern sie sich wieder einer markanten Stellung: wenn nämlich P und $\bar{P}$ gleich hoch über und unter m liegen (Fig. 15). Die ganze Figur liegt dann symmetrisch zu m. Diese besondere Lage der beiden Bruderpunkte nennen wir die *Nahstellen* N und $\bar{N}$. In dieser Lage sind sich die beiden Punkte nämlich *am nächsten.*
Figur 16 gibt einen Überblick; es sind vier Stationen dieser Bewegung eingezeichnet: P_0 im Unendlichen (P_0,∞) und $\bar{P}_0$ in der Mitte M; beide Punkte fallen; zu 1 und $\bar{1}$, 2 und $\bar{2}$ und schliesslich 3 und $\bar{3}$ in den Nahstellen N und $\bar{N}$. P hat die weite Reise vom Unendlichen bis zu N gemacht, $\bar{P}$ die kurze von M bis zu $\bar{N}$; P hat sich dabei sehr schnell bewegt, besonders weit oben, $\bar{P}$ bewegte sich ganz gemächlich.
Und dann beginnt $\bar{P}$ zu eilen (Fig. 17). Immer schneller bewegt er sich von $\bar{N}$ aus nach unten über die Stationen $\bar{4}$, $\bar{5}$ bis ins Unendliche $\bar{P}_6,\infty$; dafür bewegt sich P ganz gemächlich von N aus über 4, 5 bis M. Von den Nahstellen $\bar{N}$, N aus entfernen sich die

beiden Punkte immer mehr voneinander, bis ihr Abstand in M und $\overline{P}_{6,\infty}$ unendlich gross ist. Bewegen sich die Bruderpunkte weiter, so durchläuft $\overline{P}$ den Weg von oben aus dem Unendlichen über N bis zu M, und P fällt von M aus über $\overline{N}$ wieder bis ins Unendliche. Im unendlichfernen Punkt sind sie immer zugleich unendlich weit oben wie unten.

Vier markante Strecken durchlaufen die beiden Punkte (Fig. 18): Die obere Langstrecke l_0 von $P\infty$ bis zu N; die obere Kurzstrecke k_0 von N zu M; die untere Kurzstrecke k_u von M zu $\overline{N}$ und die untere Langstrecke l_u von $\overline{N}$ zu $P\infty$. Wenn einer der Punkte die obere Langstrecke durchläuft, dann der Bruderpunkt die untere Kurzstrecke, durchläuft einer die obere Kurzstrecke, dann der andere die untere Langstrecke. Wir können die Bewegungen genau überblicken. Wenn der eine fällt, fällt der andere auch. Ebenso können beide *steigen.*

Diese Bewegungsart spielt eine grosse Rolle in der Geometrie. Die Geometer haben ihr daher einen besonderen Namen gegeben: nämlich *gleichläufige Involution;* gleichläufig, weil beide Punkte gleichzeitig fallen oder steigen. Warum Involution, werden wir noch sehen.

Solche Bewegungen finden in der gleichen Art auf *allen* Geraden statt, die am Kreis senkrecht vorbei gehen. Ein Unterschied ist nur im Abstand der Nahpunkte; diesen Abstand nennt man die *Weite* der Involution. Wenn die Gerade s nahe am Kreis liegt, so liegen die Nahstellen auch nah beieinander. Entfernt sich hingegen s vom Kreis, so entfernen sich auch die Nahpunkte nach oben und unten von einander, und zwar ganz geordnet. Figur 19 gibt einen Überblick: Die Nahstellen links und rechts vom Kreis liegen auf einer *Hyperbel.* Wir stellen uns vor: auf jeder Senkrechten finden solche Strömungen statt, abwärts und aufwärts. Immer wenn ein Punkt eine Nahstelle durchläuft, dann der Bruderpunkt die andere. Äusserlich sichtbar wie der Kreis ist die Hyperbel der Nahstellen nicht; aber alle Strömungen miteinander koordinierend, waltet sie unsichtbar Ordnung stiftend. Von der Hyperbel geführt, nehmen nach aussen die Weiten zu.

Um die gleichläufigen Involutionen leicht zeichnen und gut überblicken zu können, bediente sich Louis Locher-Ernst eines Symboles, eines Pfeiles (Fig. 20). Die Mitte der Involution ist Anfangspunkt des Pfeiles, der Endpunkt ist der eine Nahpunkt und die Pfeilrichtung gibt die Strömungsrichtung an. Die Länge des Pfeiles ist die halbe Weite. Zeichnet man irgendwo auf einer Geraden g einen solchen Pfeil, so ist damit gemeint: Denke Dir eine gleichläufige Involution; der Anfangspunkt des Pfeiles ist ihre Mitte (sie hat als Bruderpunkt den unendlichfernen Punkt) und der Endpunkt ist die eine Nahstelle; ihr Bruderpunkt, die andere Nahstelle, liegt symmetrisch zur Mitte auf der anderen Seite des Pfeiles. Die Gerade g kann auch irgendwie schräg liegen. Mit Hilfe dieser Pfeile können wir alle Involutionen der Figur 19, aufwärts und abwärts, übersichtlich darstellen (Fig. 21). Diese Pfeile stellen allerdings nur die senkrecht nach oben und unten verlaufenden Strömungen dar. Auf allen irgendwie schräg liegenden Geraden ausserhalb des Kreises gibt es die genau gleichen Strömungen. Das Gesamtbild aller Strömungen bekommen wir, wenn wir uns das Pfeilbild von Figur 21 um den Kreis *rotiert* denken. Wir beschränken uns aber auf die Betrachtung der senkrechten Strömungen.

Bis jetzt haben wir nur Geraden betrachtet, welche am Kreis vorbeigehen. Gibt es auch Punktströmungen auf Geraden, welche ihn schneiden? Betrachten wir z.B. den senkrechten Durchmesser s (Fig. 22) und auf ihm einen Punkt P oberhalb des Kreises. Wieder können wir von P aus die beiden Tangenten t_1 und t_2 zeichnen und die beiden Berührungspunkte B_1 und B_2 miteinander verbinden. Die Verbindungsgerade ist die Polare p von P und schneidet s im Bruderpunkt $\overline{P}$. Von $\overline{P}$ aus können wir nun allerdings keine Tangenten an den Kreis zeichnen und so prüfen, ob P auch der Bruderpunkt von $\overline{P}$ ist. Dafür gibt es zwar andere, aber umständlichere Konstruktionen, und die zeigen, dass P tatsächlich auch der Bruderpunkt von $\overline{P}$ ist. Doch das überlassen wir den Geometern.

Jetzt kommt es wieder darauf an, wie sich die beiden Punkte be-

wegen (Fig. 23). Zuerst liege der Punkt P unendlichfern im Punkt $P_{0,\infty}$. Die beiden Tangenten t_1 und t_2 kommen senkrecht herunter und berühren den Kreis links und rechts in B_1 und B_2. Die Polare ist der waagrechte Durchmesser und schneidet s im Kreismittelpunkt M. Also der Bruderpunkt $\overline{P}_0$ ist wieder die Mitte. Fällt nun der Punkt P aus dem Unendlichen hinunter bis zu 1, so steigen die Berührpunkte der Tangenten der Kreislinie nach hinauf, und damit steigen auch die Polare p_1 und mit ihr der Bruderpunkt $\overline{1}$ nach oben. Und so geht die Bewegung weiter: P *fällt* zu 2, $\overline{P}$ *steigt* zu $\overline{2}$. Und dann? Dann fallen 3 und $\overline{3}$ im obersten Kreispunkt zusammen. Die Bewegung ist anders als bei den gleichläufigen Involutionen, sie ist *gegenläufig.* Die Punkte gehen sich entgegen und begegnen sich im oberen *Kreispunkt;* wir nennen ihn einen *Doppelpunkt* der gegenläufigen Involution. Involution heisst Einschachtelung. Der Doppelpunkt wird eben von oben und unten durch die Paare der Bruderpunkte immer enger eingeschachtelt, bis sie in ihm zusammenfallen.
Vom Doppelpunkt an bewegen sich die Punkte wieder auseinander (Fig. 24): P fällt über die Stationen 4, 5, zu $P_6 = M$, und $\overline{P}$ steigt über $\overline{4}$, $\overline{5}$ zu $\overline{P}_{6,\infty}$ im Unendlichen. Dann (Fig. 25) fällt P von der Mitte aus über 7, 8 nach unten; $\overline{P}$ kommt ihm von unten her über $\overline{7}$, $\overline{8}$ entgegen und in P_9, $\overline{P}_9$ (unterer Kreispunkt) begegnen sie sich wieder (zweiter Doppelpunkt). Zum Schluss der Bewegung (Fig. 26) fällt P über 10, 11 zurück zum unendlichfernen Punkt $P12,\infty$; und $\overline{P}$ steigt von $\overline{P}_9$ aus über $\overline{10}$ und $\overline{11}$ zurück in die Mitte. Damit haben beide Punkte wieder die Ausgangslage erreicht, und das Bewegungsspiel kann von neuem beginnen. P *fällt* unaufhörlich, $\overline{P}$ *steigt* unaufhörlich; zweimal kreuzen sie sich in Doppelpunkten – *und da erscheint der Kreis!* Als *Stauprodukt* der beiden Strömungen! Figur 27 gibt einen Überblick, wobei die Pfeile natürlich nicht die Bedeutung von gleichläufigen Involutionen haben, sondern von gewöhnlichen Bewegungen. Wie verläuft die Strömung auf einer Senkrechten, die den Kreis *neben* dem Mittelpunkt schneidet (Fig. 28)? Im Prinzip genau gleich. Der einzige Unterschied: Die Polaren der

Punkte 1, 2, 3 verlaufen nicht waagrecht, sondern senken sich nach rechts und schneiden sich alle im Punkt S auf der horizontalen Mittellinie. S ist übrigens der Pol von s, wie man es aus den Tangenten in den Doppelpunkten ablesen kann. Also wieder zwei Doppelpunkte auf dem Kreis, näher beieinander.
Denken wir uns die Senkrechte im Kreis nach links und rechts hin- und herbewegt, so beschreiben die Doppelpunkte genau die Kreislinie. Und was passiert, wenn s die senkrechten Tangenten links und rechts überschreitet? Sofort treten an Stelle der gegenläufigen Involutionen gleichläufige auf, ohne Doppelpunkte, nur mit Nahstellen – und die Kreislinie ist verschwunden! Verschwindet nach aussen immer mehr, denn die Nahstellen gehen immer weiter auseinander.
Und wie verlaufen die Strömungen, wenn s gerade in einer senkrechten Tangente liegt? Zum Beispiel in t_2 rechts (Fig. 29)? Für jeden Punkt P von s ist s die eine Tangente mit dem Berührpunkt B_2, und es ist nur noch die andere Tangente t_1 zu zeichnen. Die Verbindungsgerade B_1, B_2, die Polare von P, geht also für *jeden* Punkt der Geraden durch B_2, und B_2 ist für *jeden* Punkt der Geraden der Bruderpunkt $\overline{P}$. Senkt sich P aus dem Unendlichen zu B_2 (Fig. 30), so dreht sich seine Polare um den Bruderpunkt $\overline{P}$. Dieser bleibt also liegen, wenn sich P senkt. Es ist, wie wenn $\overline{P}$ auf P warten würde. Die Bewegung ist weder eine gegenläufige noch eine gleichläufige Involution, sondern ein Grenzfall von beiden. Wir dürfen uns vorstellen: Wenn P in B_2 angekommen ist, dann setzt *er* sich zur Ruhe; dafür setzt sich $\overline{P}$ in Bewegung, fällt nach unten durch das Unendliche hindurch und senkt sich von oben her zurück zu B_2. Dort wartet er wieder; dafür tritt P nach unten die Reise durchs Unendliche an, so abwechselnd: einer wartet, der andere bewegt sich durch die ganze Gerade. Die Strömungen so vorgestellt sind ein Grenzfall der gleichläufigen Involution (nämlich wenn die beiden Nahstellen in B_2 zusammenfallen). Denkt man sich hingegen den einen Punkt auf seiner Reise steigend, den anderen fallend – während der andere wartet – so ist es der Grenzfall der gegenläufigen In-

volution (wenn die Doppelpunkte zusammenfallen). Eine solche Strömung nennen wir eine *wartende* Involution.
Es gibt also drei Sorten von Involutionen: gegenläufige mit zwei Doppelpunkten, wartende mit einem Ruhepunkt und gleichläufige ohne Begegnung der Bruderpunkte, nur mit Nahstellen. Wieder eine Dreigliederung! Man trifft sie in der Geometrie wirklich oft an.
Aber was ist durch diese Betrachtung gewonnen? Wir sind durch sie von der üblichen Kreisvorstellung zu einer viel umfassenderen, ganz dynamischen aufgestiegen. Der Kreis liegt nicht mehr einsam als isolierte Linie in der Ebene, sondern hat mit der ganzen Ebene zu tun: auf allen Geraden gehören zu ihm die Strömungen der Bruderpunkte; da wo sich die Bruderpunkte begegnen oder aufeinander warten, da ist der sichtbare Kreis. Da wo sie sich zwar suchen, aber nicht finden, nur einander nahe kommen, da treten keine Kreispunkte in Erscheinung. Wir können die Kreislinie auffassen als *Stauprodukt* einer *Bewegungsgestalt.* Denn die Punktströmungen laufen ja nicht chaotisch nebeneinander her, sondern geordnet; sie reihen sich ein in eine Gesamtgestalt (Fig. 31).
Statt vom Kreis auszugehen und aus ihm die Strömungen in ihrer Gesamtgestalt abzuleiten, kann man auch von den Strömungen selbst ausgehen. Die Geometer haben herausgefunden: wenn man in einer gewissen Art die Strömungen auf den Seiten irgend eines Dreiecks vorgibt, dann ist dadurch die ganze Bewegungsgestalt bestimmt; aus diesen drei vorgegebenen Strömungen kann auf jeder Geraden der Ebene die Involution der Bruderpunkte hergeleitet werden, und sie ordnen sich von selbst ein in eine Gesamtgestalt. Da wo sich Bruderpunkte begegnen oder aufeinander warten, da erscheint eine Kurve: es kann ein Kreis, eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel sein – je nachdem, wie das Dreieck und auf ihm die Strömungen gewählt werden. Die Bewegungsgestalt *erzeugt* also die Kurve. Wir können sie als das *Primäre* ansehen, das Vorausgehende, die sichtbare Kurvenform als ihr erscheinendes Erzeugnis.

Diese Sätze erinnern daran, wie Rudolf Steiner in der Geheimwissenschaft die aufeinander folgenden planetarischen Verkörperungen der Erde schildert. Fest umrissene Formen gibt es erst auf unserer Erde. Sie sind entstanden durch die Tätigkeit der *Geister der Form.* Auf dem alten Mond hingegen gab es erst hornartige Andeutungen von Formen. Das vorherrschende Element war das Wässrige, das die *Geister der Bewegung* innerlich in mannigfaltigen Strömungen bewegten. Auf der vorausgehenden alten Sonne war die Luft das dichteste Element; sie war lebendiger als die heutige Luft. Die *Geister der Weisheit* liessen sie in regelmässigen Lichtgestalten erstrahlen. Geister der Weisheit – Geister der Bewegung – Geister der Form – in dieser Reihenfolge wirkten sie auf der alten Sonne, dem alten Mond und der heutigen Erde; wohl immer zusammen mit den andern Hierarchien, aber sie erfüllten jeweilen die Hauptaufgaben.
Fassen wir die Kreisform als Stauprodukt einer wohlgeordneten Gesamtgestalt von Strömungen auf, so können wir diese Anschauung wie ein Wahrbild des aufeinander folgenden Zusammenwirkens der drei Kategorien hierarchischer Wesenheiten empfinden: weisheitsvolle Gestalt im Untergrund, von Strömungen durchflossen, Form bildend.
Der Anschluss des Kreises an die ganze Ebene erinnert auch an das Grunderlebnis, das wir durch die Anthroposophie haben können. Menschen, welche sie noch nicht kennen, können sich in der Welt als isolierte, einsame Wesen fühlen; vielleicht fühlten wir uns auch einmal so. Je tiefer, dass wir die Geisteswisenschaft dann kennen lernen, umso tiefer lernen wir einsehen, dass wir in Wahrheit physisch, psychisch und geistig mit der ganzen Welt zusammenhängen. Es kann uns aus der Isolation erlösen.
Und auch für die Lebenswelt des Ätherischen kann uns die durchströmte Ebene Bild sein. Oft hat Rudolf Steiner geschildert, wie der imaginativ Erkennende die Welt des Ätherischen erlebt: als eine Welt bewegter Strömungen.
Bevor wir uns der Verwandlung der Kräftestruktur von Röhrenknochen in diejenige der Schädelknochen zuwenden, beschrei-

ben wir das Strömungsbild von Ellipsen und Hyperbeln. Dasjenige einer Ellipse kann leicht aus demjenigen des Kreises abgeleitet werden (Fig. 32): wir pressen den Kreis (die Doppelpunkte) von unten und oben auf die Mittellinie zu und ebenso die Nahstellen der gleichläufigen Involutionen.
Das Strömungsbild der Hyperbel hingegen ist das genaue Gegenteil von demjenigen des Kreises (Fig. 33): die gegenläufigen Involutionen mit den Doppelpunkten sind links und rechts aussen, die gleichläufigen innen, die Nahstellen auf einem Kreis liegend; nur die beiden wartenden Involutionen mit ihrem Ruhepunkt sind am gleichen Ort wie beim Kreis. Kreis und Hyperbel sind genau gegensätzlich, so gegensätzlich wie Kopf und Gliedmassen.
Wie kann das Strömungsbild der Hyperbel in dasjenige des Kreises so verwandelt werden, dass die Verwandlung im Unsichtbaren vor sich geht, wie die Kräfte der Röhrenknochen sich nachtodlich im Übersinnlichen in diejenigen der kugeligen Knochen des Kopfes verwandeln? Die Verwandlung muss im Wesentlichen im Bereich der gleichläufigen Involutionen statt finden, denn bei ihnen treten keine sichtbaren Stauungen auf. Sie können sich aber wartenden Involutionen mit ihrem sichtbaren Ruhepunkt nähern, oder von solchen ausgehen. Wir stellen solche Verwandlungen durch sich verwandelnde Pfeile dar.
Es kann zum Beispiel sein, dass sich die Pfeile verkürzen, das heisst, dass die Nahstellen näher zusammentreten, dass die Involution sich dem Sichtbarwerden eines Staupunktes nähert (Fig. 34). Dabei kann die eine Nahstelle, zum Beispiel die Pfeilspitze, liegen bleiben; auf sie ziehen sich die Nahstellen zusammen. Und genau dort tritt ein Ruhepunkt in Erscheinung. Dieses sich Zusammenziehen ist in Figur 34 auf nebeneinander liegenden Geraden gezeichnet. Wir denken uns aber, es finde auf der Anfangsgerade g statt.
Umgekehrt kann aus einem sichtbaren Punkt ein kleiner Pfeil herauswachsen, sich strecken und dabei auf seiner Geraden wandern (Fig. 35). An Stelle des sichtbaren Punktes tritt eine

gleichläufige Involution auf, ohne sichtbare Staupunkte. Sie entfernt sich sogar immer mehr von solchen, weil die Nahstellen immer weiter auseinander treten.
Damit haben wir alle Mittel bereitgestellt, um die Verwandlung der Kräftestruktur eines Röhrenknochens, in diejenige der kugeligen Schädelknochen zu beschreiben. Röhren- und Schädelknochen sind aber räumliche Körper. Wie steigen wir von den betrachteten Kurven auf zu räumlichen Gebilden? – Stellen wir uns vor: die Hyperbel von Figur 36 rotiere um die eingezeichnete Achse; dann beschreibt sie ein röhrenförmiges Gebilde mit engster Stelle in der Mitte, nach oben und unten sich weitend. Einen solchen Körper nennt man ein *Hyperboloid.* Wir betrachten ihn als idealisiertes geometrisches Bild eines Röhrenknochens, wie er in unseren Gliedmassen Gelenk mit Gelenk verbindet. Und lassen wir einen Kreis um den senkrechten Durchmesser rotieren (Fig. 37), so entsteht als idealisiertes Bild des Kopfskelettes eine Kugel. Schon vor Louis Locher-Ernst haben sich Geometer mit der Frage beschäftigt: können die beiden Körper ineinander verwandelt werden? Sie packten das Problem rechnerisch an. Seit Descartes (1596–1650) hatten es die Geometer gelernt, solche Körper durch rechnerische Formeln auszudrücken. Und es gelang tatsächlich, die Formel des Hyperboloids stetig, kontinuierlich durch sich verändernde Zahlen in diejenige der Kugel überzuführen. Dabei spielt eine höhere Zahlart, die sogenannten komplexen Zahlen, eine grosse Rolle; ohne sie ist die Überführung nicht möglich. Aber die Geometer gaben sich mit der rechnerischen Lösung zufrieden. Sie drangen nicht vor zu einer vollen Anschauung der geometrischen Verwandlungsprozesse im Raum. Louis Locher-Ernst ging auch von der Rechnung aus, stellte sich aber die Frage: können die zugehörigen geometrischen Prozesse beschrieben werden? Es gelang ihm durch die Betrachtung gleichläufiger Involutionen und ihrer Darstellung durch Pfeile. Dabei genügt es, die Verwandlung der Hyperbel von Figur 36 in den Kreis von Figur 37 zu betrachten. Denn wir können dann auch den Verwandlungsprozess um die

Achse rotiert denken. Der rotierte Verwandlungsprozess verwandelt dann das Hyperboloid in die Kugel. Die folgenden Zeichnungen (es sind ihnen die Originalzeichnungen von Louis Locher-Ernst zu grunde gelegt) beschreiben einen solchen Verwandlungsprozess, allerdings an der Hyperbel von Figur 33.
Wenn die Verwandlung der Hyperbel beginnt, treten aus den sichtbaren Kurvenpunkten links und rechts kleine Pfeile heraus, auf gleichläufige Involutionen mit kleiner Weite hinweisend (Figuren 38a und 38b). Die Pfeile wandern von oben und unten aufeinander zu und werden dabei länger. Zur Halbzeit der Verwandlung stossen sie mit ihren Spitzen auf der Mittellinie aufeinander (Fig. 39). Dann wandern sie aneinander vorbei, sich immer mehr streckend (Fig. 40); am Ende der Verwandlung (Fig. 41) sind ihre Anfangspunkte in der Mittellinie angekommen, und die Pfeilspitzen an den Stellen, wo sie beim Kreis liegen! Es ist also das *Pfeilbild des Kreises* entstanden! Während der ganzen Wanderung der Pfeile liegen ihre Anfangs- und Endpunkte auf Hyperbelästen.
Das Herausschlüpfen der Pfeile aus den sichtbaren Punkten am Anfang der Verwandlung (Fig. 38b) kann man wie das Hinausgehen der Gestaltungskräfte aus dem physischen Leib beim Tode empfinden. Die Punkte bleiben wie leere Hülsen zurück – wie der Leichnam, der zerfällt, weil ihn die Gestaltungskräfte verlassen haben. Die Gestaltungskräfte steigen auf ins Übersinnliche und machen eine Entwicklung durch, verbildlicht durch die wandernden und sich streckenden Pfeile.
Und wie verwandelt sich das *Pfeilbild der Hyperbel* (Fig. 42a)? Sobald die Verwandlung beginnt, ziehen sich die Pfeile nach oben und unten zusammen. Die Anfangspunkte lösen sich von der Mittellinie ab, steigen nach oben und fallen nach unten, insgesamt auf einer sich ständig vergrössernden Ellipse liegend (Fig. 42b). Zur Halbzeit haben sie sich auf die Hälfte verkürzt (Fig. 43). Die Pfeilspitzen bleiben ständig am selben Ort, die Anfangspunkte bewegen sich immer näher auf sie zu (Fig. 44). Zum Schluss der Verwandlung (Fig. 45) fallen die Anfangspunkte in die Pfeilspitzen hinein: die gleichläufigen Involutionen sind an ihrer Grenze, den wartenden Involutionen, angekommen. Ruhepunkte treten auf, und damit ist der Kreis in die Sichtbarkeit eingetreten; dieses in die Sichtbarkeit-eintreten des Kreises ist wie ein Bild für die Geburt des Kopfes.[1]

Natürlich dürfen wir nicht erwarten, dass diese Prozesse schon ganz getreu und vollständig die nachtodlichen Verwandlungen verbildlichen. Aber sie können uns zu vollgültigen Bildern allmählich hinführen. Wenn wir solche geometrische Betrachtungen intensiv in uns pflegen, dann wirken sie als Keim in uns, der sich durch das geisteswissenschaftliche Studium weiter entwikkelt, und wir dürfen hoffen, dass er sich eines Tages zu echten geisteswissenschaftlichen Imaginationen wandelt, die dann vollgültige Bilder der Geistwirklichkeit sind. Imaginationen stellen sich nicht – wie in früheren Zeitaltern – einfach wie Visionen vor uns hin; sondern im Zeitalter der Freiheit müssen wir sie durch eigene innere Aktivität bilden. Das geometrische Vorstellen ist eine Vorstufe dazu.
Und wir müssen nicht befürchten, dass wir willkürlich nur subjektive Bilder weben, die keinen objektiven Erkenntniswert haben. Denn gerade die mathematischen Begriffsbildungen und Vorstellungen sind sicher Bilder von Geistwirklichkeiten, obwohl sie nur durch unsere subjektive Anstrengung in unser Bewusstsein treten.
Solche geometrische Betrachtungen werden zusammenkommen müssen mit solchen der Anatomen und Physiologen und auch mit dem künstlerischen Gestalten der Plastiker. Dann wird die Geistwirklichkeit allmählich voll erfasst werden können.

1 Bei dieser Verwandlung (Figuren 38a bis 45) unterscheiden wir nicht mehr zwischen Doppelpunkten und Ruhepunkten, sondern nur zwischen sichtbar und unsichtbar. So vorzugehen legt die erwähnte Rechnung mit komplexen Zahlen nahe.

Literatur

Bernhard, A.: Projektive Geometrie – aus der Raumanschauung zeichnend entwickelt. Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 1984.

Bindel, E.: Kegelschnitte – Ihre zeichnerische Gewinnung und ihre Beziehung zum Menschen. Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 1963.

Kačer-Bock, G.: Die Mysteriendramen im Lebensgang Rudolf Steiners. Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 1995.

Locher-Ernst, L.: Mathematik als Vorschule zur Geist-Erkenntnis. Philosophisch-Anthroposophischer Verlag (2. Auflage), Dornach 1973.

Geometrische Metamorphosen. Philosophisch-Anthroposophischer Verlag, Dornach 1970.

Raum und Gegenraum – Einführung in die neuere Geometrie. Philosophisch-Anthroposophischer Verlag (2. Auflage), Dornach 1970.

Steiner, R.: GA 21: Von Seelenrätseln.

GA 66: Geist und Stoff, Leben und Tod, Vortrag vom 15.3.1917: Menschenseele und Menschenleib in Natur- und Geisterkenntnis (erster Vortrag über die Dreigliederung des Menschenwesens).

GA 293: Allgemeine Menschenkunde als Grundlage der Pädagogik.

GA 323: Das Verhältnis der verschiedenen naturwissenschaftlichen Gebiete zur Astronomie.

Suter-Schaltenbrand, E.: Das Erwachen des imaginativen Bewusstseins, Das Goetheanum Nr. 15, 1996, 75. Jahrgang.