Kegelschnittbüschel

Fünf Punkte in einer Ebene legen einen Kegelschnitt exakt fest. Anders gesagt; Wenn man fünf Punkte willkürlich in eine Ebene legt, so gibt es immer genau einen Kegelschnitt, auf dem diese Punkte liegen, sei es nun ein Kreis, eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel. Legt man nur vier Punkte fest, so ist damit ein ganzes Kegelschnittbüschel bestimmt, welches aus unendlich vielen Kegelschnitten besteht, die sich alle in den vier ihnen gemeinsamen Punkten treffen. Denkt man sich den fünften gegenüber den vier festgelegten Punkten beweglich, so ist klar, dass er unendlich viele Positionen annehmen kann, denn er kann über die gesamte Ebene wandern. Man kann diesen beweglichen Punkt willkürlich Wege zurücklegen lassen, die keiner besonderen Systematik folgen, man kann ihn aber auch nach einem bestimmten Prinzip wandern lassen. So kann er z. B. einer Geraden entlanglaufen oder einer gebogenen Form folgen. Der Phantasie sind hier kaum Grenzen gesetzt. Es zeigt sich, dass eine exakt geführte Bewegung häufig zu interessanteren Ergebnissen führt, als eine völlig willkürliche. Dies hängt damit zusammen, dass man die geführte Bewegung in kleinere Schritte unterteilen kann und so die allmähliche Entstehung des ganzen Büschels zu verfolgen in der Lage ist. Hierzu werden im Folgenden drei Beispiele gezeigt. Man kann diese beliebig um weitere ergänzen.[1]

In Abbildung 1a sind die vier festgehaltenen Punkte so gewählt, dass sie die Ecken eines Quadrates bilden. Der fünfte Punkt wandert auf einer Geraden, die das Quadrat in senkrechter Richtung halbiert In Abbildung 1b ist diese Gerade zusätzlich eingezeichnet. In einem bestimmten Moment liegt der bewegliche Punkt so, dass er gemeinsam mit den Fixpunkten einen Kreis festlegt. Wir wählen diese Lage als Ausgangssituation und lassen nun den Punkt nach oben wandern. Es ergeben sich Ellipsen, die anfangs noch nahe an der Kreisform sind und dann immer länglicher werden. Wandert der Punkt ins Unendliche, so bilden sich die beiden Parallelen, die senkrecht durch die Fixpunkte laufen. Hier hat man zum ersten Mal die Situation, dass nicht nur je zwei, sondern drei Punkte auf einer Geraden liegen. Man kann zwei Parallelen als einen ausgearteten Kegelschnitt ansehen, würde man einen Kegel mit einer Ebene schneiden, so bekäme man diese Form nur, wenn der Punkt, in dem sich alle auf dem Kegelmantel liegenden Geraden bündeln, selbst im Unendlichen liegt. (In der Schulgeometrie spricht man in diesem Fall von einem Zylinder.) Kommt der bewegliche Punkt von unten zurück, so durchläuft er die gleiche Schar von Ellipsen, die er beim Hinaufwandern gebildet hatte, nochmals. Auch der Kreis, von dem wir ausgegangen waren, ergibt sich ein zweites Mal. Wandert der Punkt nun weiter nach oben, so hat er nur ein kurzes Wegstück zurückzulegen, bis er auf der unteren der beiden waagrechten Parallelen zu liegen kommt. Innerhalb dieses Wegstückes entstehen alle Ellipsen, die sich in waagrechter Richtung ausbreiten. An dessen Ende artet die Ellipse, die sich den waagrechten Parallelen immer mehr angeschmiegt hat, in diese aus. Läuft der Punkt nun weiter nach oben, so entstehen Hyperbeln, erst solche, die sehr weit geöffnet sind, dann immer enger werdende. Wenn der Punkt schliesslich in die Mitte des Quadrates gelangt, arten die Hyperbeläste in die beiden Diagonalen des Quadrates aus. Um eine solche Form durch Schnitt eines Kegels mit einer Ebene zu erhalten, muss die Schnittebene senkrecht durch den Kegel gehen und dessen Mittelpunkt treffen. In den Abbildungen 1a und 1b sind zur Verdeutlichung je zwei Ellipsen in senkrechter und waagrechter Richtung sowie zwei Hyperbeln und die ausgearteten Sonderfälle eingezeichnet. Aufgrund der Lage der Fixpunkte in den Ecken eines Quadrates kommt hier die Parabel nicht vor. Der Kreis markiert den Wendepunkt der senkrechten bzw. waagrechten Ausrichtung der Ellipsen. Solange sich der bewegliche Punkt innerhalb des dem Kreis eingeschriebenen Quadrates bewegt,

[1] Hier werden die Kegelschnittbüschel unter dem Gesichtspunkt betrachtet, dass sie besonders dazu geeignet sind, die Vorstellung in Bewegung zu bringen und zu verlebendigen. Eine weitergehende Beschäftigung mit dem Thema findet man bei Edwards (1988), Chapter 12: Pencils and Ranges of Conics sowie bei Stolzenburg (2009), Kap.: Büschel von Kegelschnitten

entstehen Hyperbeln, bewegt er sich ausserhalb desselben, treten Ellipsen auf und im Übergang von der waagrechten zur senkrechten Lage derselben ergibt sich genau einmal der Kreis.

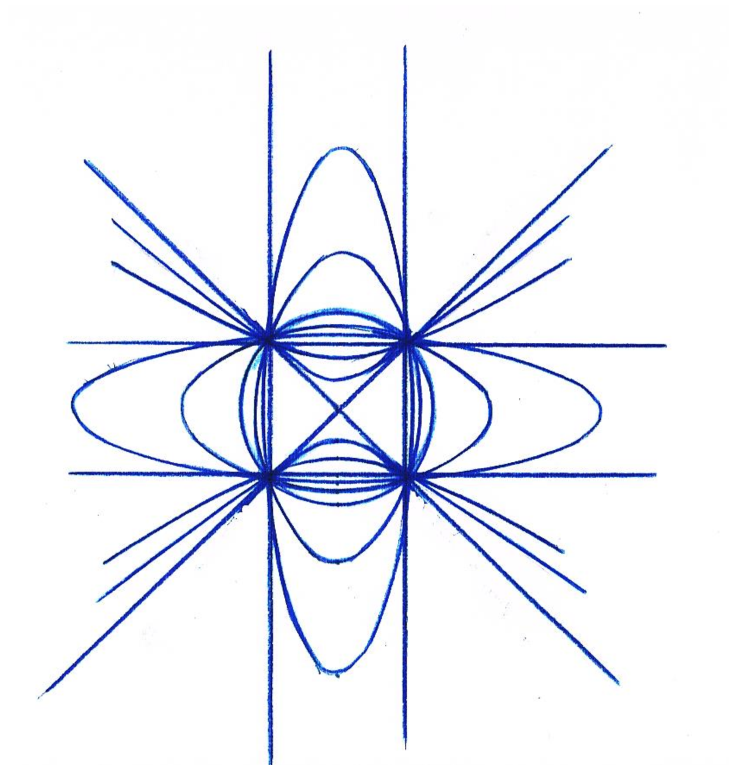

Abbildung1a

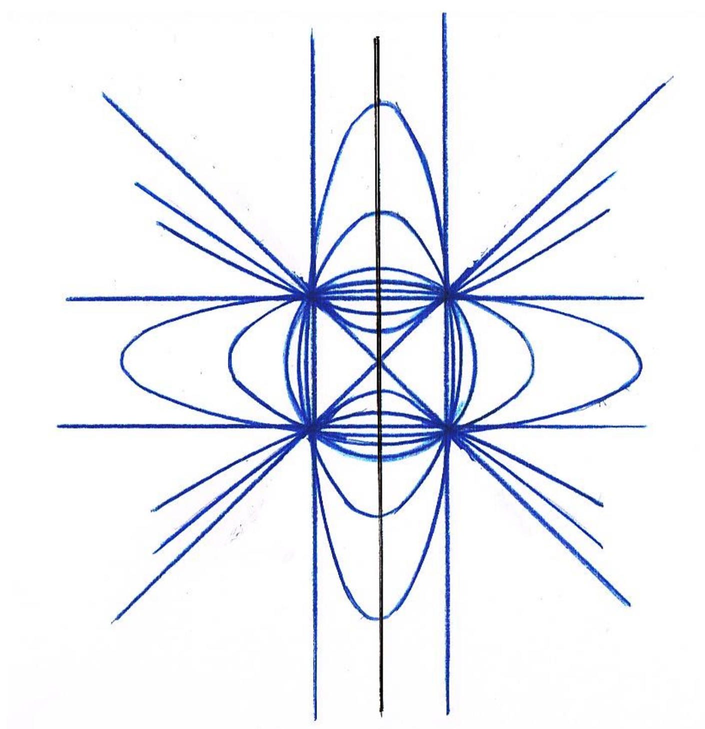

Abbildung 1b

In Abbildung 2a liegen die vier Punkte auf einem Rechteck. Dieses ist so entstanden, dass zwei auf einer Parabel einander gegenüberliegende Punktpaare in entsprechender Weise verbunden wurden. Der bewegliche Punkt läuft, wie vorher, auf einer Geraden nach oben. Wir lassen die Bewegung im unteren Punkt der Parabel beginnen. Wandert der Punkt nun nach oben, so entstehen zunächst senkrecht ausgerichtete Ellipsen, die sich immer mehr der Kreisform annähern und diese schliesslich auch erreichen. Weiteres Bewegen des Punktes bis auf die untere der beiden waagrechten Parallelen erzeugt nun waagrecht ausgerichtete Ellipsen, die im Grenzfall mit den parallelen Geraden zusammenfallen. Läuft der Punkt weiter, ergeben sich Hyperbeln, die in einem Moment in die beiden Diagonalen des Rechteckes ausarten, welches von den vier festgehaltenen Punkten gebildet wird. Auf seinem Weg bis zur Unendlichkeit begegnet der bewegte Punkt den bereits gebildeten Formen ein zweites Mal. Durchstösst er diese und kommt von unten wieder in die Endlichkeit hinein, so bilden sich nochmals Hyperbeln. Dies ist in Abbildung 2b dargestellt. Auffallend ist hier, dass sich im Verlauf der gesamten Bewegung zweimal Scharen von Hyperbeln ergeben.

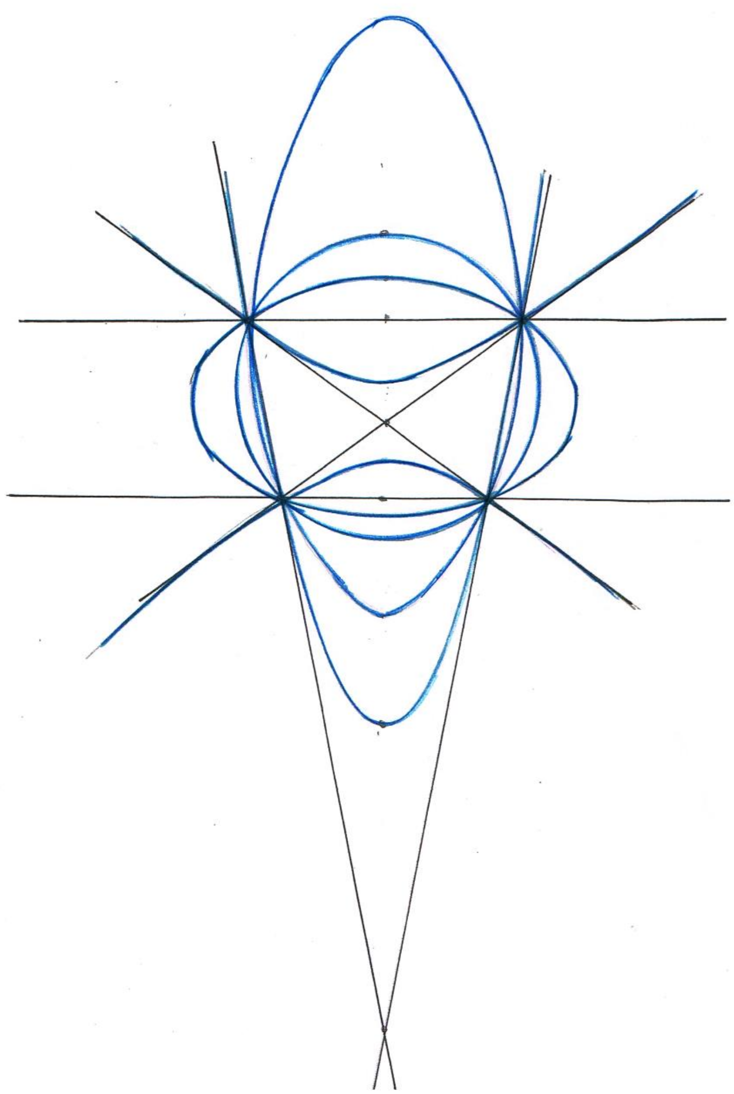

Abbildung 2a

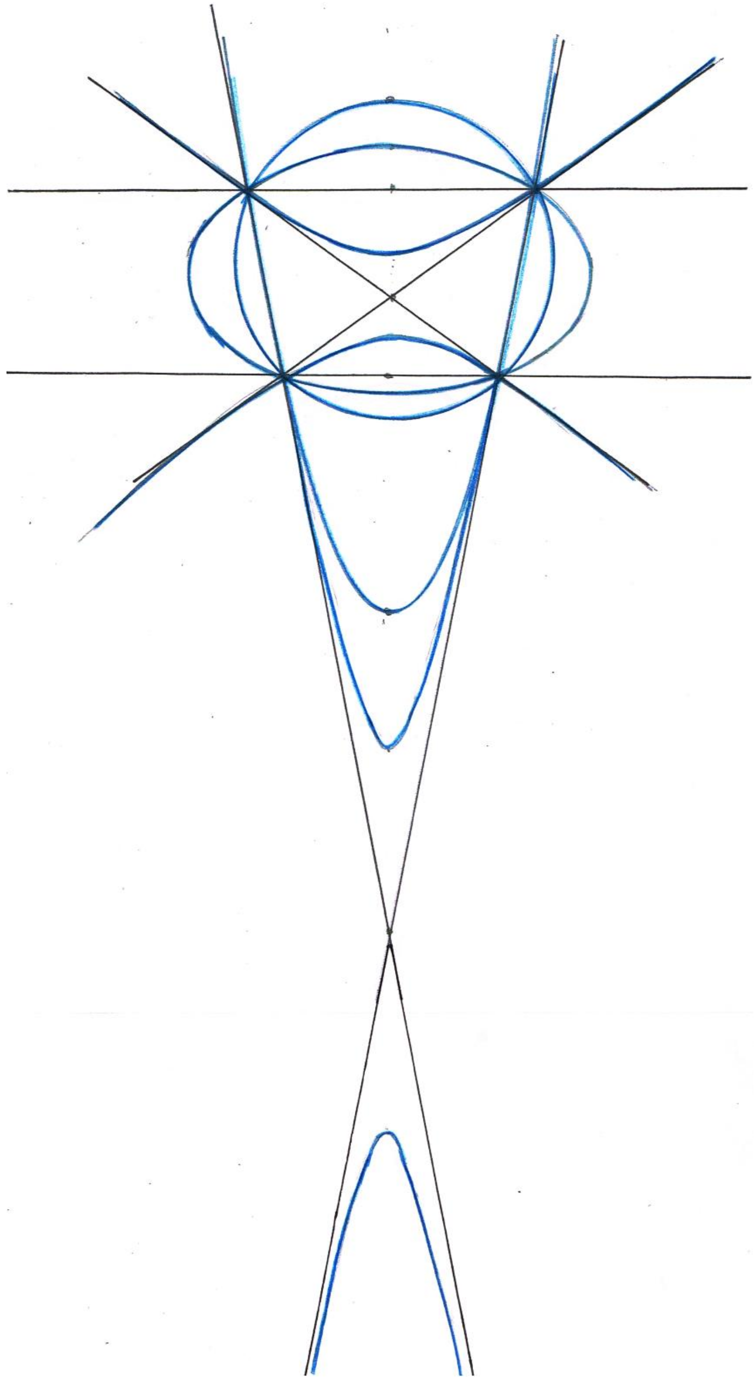

Abbildung 2b

In Abbildung 3 liegen die Fixpunkte wiederum auf den Ecken eines Quadrates. Der bewegliche Punkt wandert hier auf einer Kreislinie. Lässt man die Bewegung auf dem obersten Punkt der Kreislinie beginnen, so ergibt sich zunächst eine den Kreis berührende Ellipse. Läuft der Punkt nun nach rechts, so wird die Ellipse länger und schlanker, bis sie in die beiden senkrecht stehenden parallelen Geraden ausartet. Weiteres Fortschreiten des Punktes erzeugt Hyperbeln, deren Öffnung zunächst sehr weit ist, dann schmaler wird und in einem Moment in die Diagonalen des Quadrates ausartet. Es fügen sich immer enger werdende Hyperbeln an, bis zu dem Moment, wo der Punkt auf dem Schnittpunkt der oberen der beiden waagrechten Parallelen mit dem Kreis zu liegen kommt. In diesem Moment artet die Form in die beiden waagechten Geraden aus. Nun ergeben sich waagrecht liegende Ellipsen, die zunächst sehr langgezogen sind und schliesslich soweit zusammenschrumpfen, dass sie im Kreis Platz haben. Nun hat der Punkt ein Viertel des Kreises durchlaufen. Man sieht unmittelbar, dass sich nun die durch die Punktbewegung erzeugten Formen wiederholen, dies geschieht insgesamt viermal beim Durchlaufen des vollständigen Kreises. Der Übersicht wegen sind in Abbildung 3 lediglich zwei senkrecht gerichtete Ellipsen und zwei Hyperbeln eingezeichnet. Die Bewegung des Punktes auf einem Kreis regt in besonderer Weise dazu an, sich die Verwandlung der entstehenden Kegelschnitte in einem kontinuierlichen Verlauf vorzustellen.

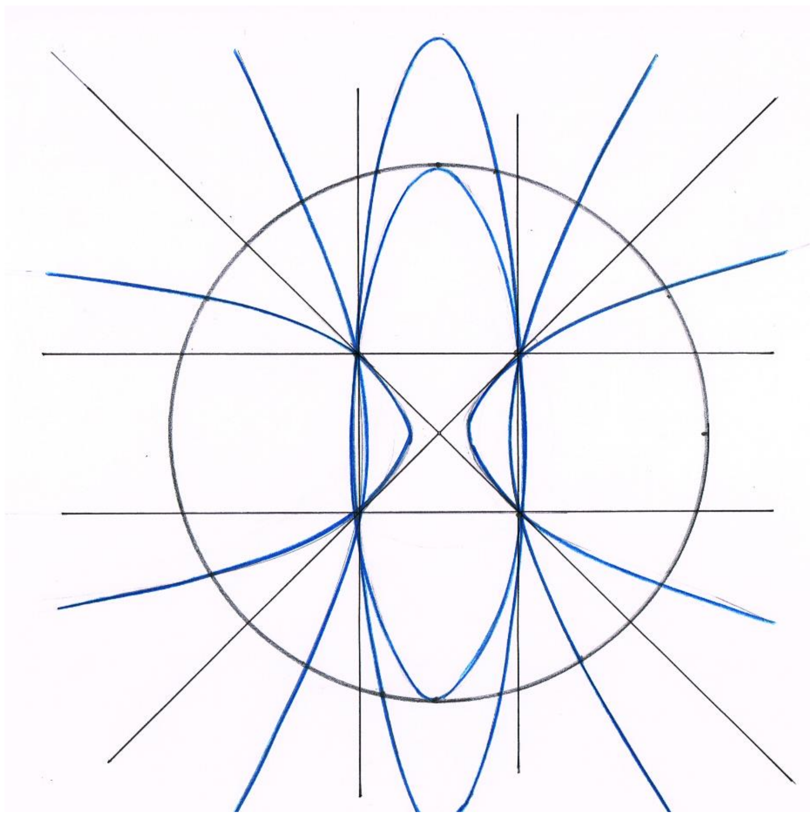

Abbildung 3

Zusätzlich kann man hier besonders gut übersehen, dass das vollständige Kegelschnittbüschel die Eigenschaft hat, die Ebene, in der es liegt, genau einmal ganz zu überdecken. Die Linien des Quadrates, auf welchem die vier Fixpunkte liegen, unterteilen die Ebene in sieben Gebiete. Drei davon haben eine viereckige Form, vier sind dreieckig. In Abbildung 4 sind die Gebiete skizziert und nummeriert. Die Gebiete 1, 2 und 3 sind Quadrate, Gebiet 1 liegt ganz im Endlichen, die Gebiete 2 und 3 ziehen sich durch die Unendlichkeit und hängen über diese zusammen. Hier sind lediglich zwei Ecken im Sichtbaren, die beiden anderen nicht. Die Gebiete 4, 5, 6 und 7 haben eine dreieckige Form, je eine Spitze des Dreiecks liegt im Unendlichen. Auffällig ist hier, dass die viereckigen Gebiete von Hyperbeln durchzogen sind, also von Formen, die zweimal durch die Unendlichkeit laufen, während die Ellipsen (und der Kreis), die sich im Endlichen abschliessen, die dreieckigen Gebiete ausfüllen.

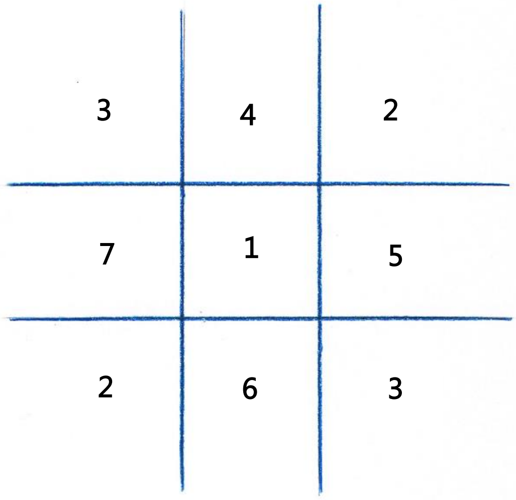

Abbildung 4

Kehrt man nun noch einmal zu den vorherigen Abbildungen zurück, so wird klar, dass durch den Weg des Punktes entlang einer Geraden nicht sämtliche Kegelschnitte des Büschels erzeugt werden. Denkt man sich z. B. Abbildung 1a um 90° gedreht, so ändern die Hyperbeläste, die sich jetzt nach oben und unten öffnen, ihre Position. Sie öffnen sich nun nach rechts und links. Diese Hyperbeln gehören zum Büschel hinzu, obwohl keiner ihrer Punkte auf der Geraden liegt, auf der wir zuvor den beweglichen Punkt hatten wandern lassen. Die Feststellung bezüglich der Gebiete des Raumes können wir nun verallgemeinern: In allen hier gezeigten Abbildungen sind die viereckigen Gebiete von Hyperbeln durchzogen und durch die dreieckigen erstrecken sich Ellipsen sowie ein Kreis. Die Parabel in den Abbildungen 2a und 2b liegt ebenfalls in den dreieckigen Gebieten.