

Anmerkungen zur Differenzial- und Integralrechnung

Rudolf Steiners Hinweise zum 12. Schuljahr 1924:

„Ich halte es für die allgemeine mathematische Bildung nicht für nützlich, wenn Differential- und Integralrechnung angeschlossen wird an die Geometrie, sondern wenn sie angeschlossen wird an den Quotienten. Ich würde ausgehen von der Differenzen-Rechnung ... das Geometrische ist nur zuletzt eine Illustration des Zahlenmäßigen. Dann bekommen Sie die Integrale als Umkehrung. ... Viel mehr innere Aktivität! Dadurch hat man die Möglichkeit, beim Schüler Fähigkeiten anzuregen, die viel realer sind, als wenn man alles nur von der Geometrie her macht.“ (Stockmeyer)

Aspekte dazu:

1. Das Rechnen ist eher mit dem Willen verbunden, die Geometrie mit dem Bild (siehe Allgemeine Menschenkunde 2. Vortrag).
2. Die Prozesse $\Delta x \rightarrow 0$ und $\Delta y \rightarrow 0$ sind äußerlich unanschaulich und verlangen innere Bewegung, es geht eigentlich in einen Abgrund, nur das Verhältnis wird gerettet. Dagegen ist die Entstehung der Tangente aus der Sekante relativ harmlos.
3. Bei den Polarkoordinaten ist die Ableitung nicht die Steigung der Tangente im Verhältnis zur Kreislinie, sondern die mit dem Radius vervielfachte Steigung: $\frac{dr}{d\varphi} = r \tan \alpha$.
Ein schönes Beispiel ist die logarithmische Spirale: $r(\varphi) = e^{t\varphi}$ mit konstantem t.
4. In Umkehrung des Differenzierens lässt sich die ursprüngliche Funktion aus der Ableitung wiederherstellen, rein aus dem Rechnerischen (s.u.).
5. Bei Flächen- und Volumina-Funktionen hat die Ableitung nichts mit Tangenten zu tun, sondern mit der Größe der „Wachstumszone“ (s.u.).

zu 4. Gegenüberstellung:

Ableiten
 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \overline{AS}$ mittlere Änderungsstärke
 Quotient
 aus f wird f' abgeleitet
 Einengung aufs Lokale

Integrieren
 $\Delta y = \overline{AS} \cdot \Delta x$
 Produkt
 aus f' wird f wiedergewonnen
 Weitung aufs Globale

1. Beispiel: Bevölkerungszahl f(x) in einer Stadt im Jahr x

x	y = f(x)	Δx	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \overline{AS}$	$\Delta y = \overline{AS} \cdot \Delta x$	y = f(x)
1970	19000					19000
		5	1000	$\frac{1000}{5} = 200$	$200 \cdot 5 = 1000$	
1975	20000					$19000 + 1000 = 20000$
		10	1000	$\frac{1000}{10} = 100$	$100 \cdot 10 = 1000$	
1985	21000					$20000 + 1000 = 21000$
		5	2000	$\frac{2000}{5} = 400$	$400 \cdot 5 = 2000$	
1990	23000					$21000 + 2000 = 23000$

Die ursprüngliche Funktion lässt sich also schrittweise wieder herstellen und durch Aufaddieren der Zuwächse (4000) lässt sich der Gesamtzuwachs zwischen 1970 und 1990 berechnen.

In ähnlicher Weise lässt aus dem Geschwindigkeitsverlauf die Gesamtstrecke gewinnen, aus der Zulaufsrate der Füllstand, aus der Emissionsrate der Gesamtausstoß, aus der Stromstärke die Gesamtladung, aus der Leistung die Gesamtenergie, aus der Schüttung der Quelle die Gesamtwassermenge usw.

In all diesen Beispielen spielt übrigens bei der Deutung der Ableitung die Tangente keine Rolle.

2. Beispiel: $f(x) = 3x + 5, f'(x) = 3$

Für das Intervall $[a; x]$ gilt $\Delta x = x - a$ und $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 3$	Aus $\Delta y = 3 \cdot \Delta x$ erhält man $f(x) - f(a) = 3(x - a)$, also $f(x) = 3x - 3a + f(a)$. Weiß man, dass $f(a) = 3a + 5$, so erhält man die ursprüngliche Funktion: $f(x) = 3x + 5$
---	---

3. Beispiel: $f(x) = x^2 + 1, f'(x) = 2x$

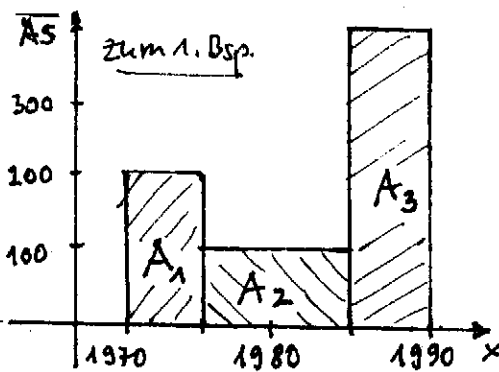
Mit $\Delta x = x - a$ gilt hier und $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$	Hier erhält man $f(x) - f(a) = (x + a)(x - a)$, also $f(x) = x^2 - a^2 + f(a)$ Mit $f(a) = a^2 + 1$ erhält man also $f(x) = x^2 + 1$
---	---

In diesem Fall ist die mittlere Änderungsstärke verschieden von der lokalen, aber der Wert $x+a$ ist gerade der Mittelwert der lokalen ÄS an den Stellen x und a : $\frac{2x+2a}{2} = x+a$

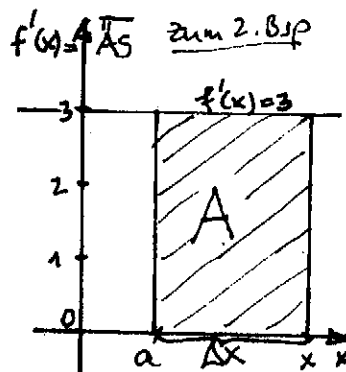
Für höhere Potenzen geht dieses Verfahren nicht.

An dieser Stelle ist es wohl angebracht, die bisherigen Rechnungen geometrisch zu interpretieren: den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ als Tangentensteigung und das Produkt $\overline{AS} \cdot \Delta x$ als

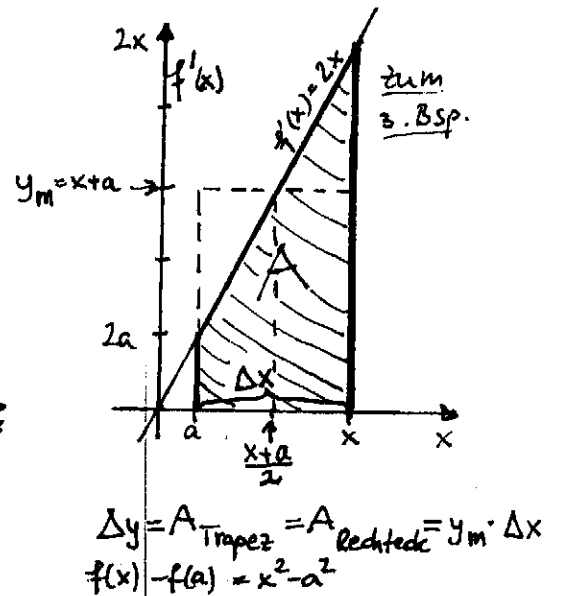
Rechtecksfläche:



$\Delta y = A_{Ges} = A_1 + A_2 + A_3$
 $f(1990) - f(1970) = 4000$



$\Delta y = A = 3 \cdot \Delta x$
 $f(x) - f(a) = 3(x - a)$



$\Delta y = A_{Trapez} = A_{Rechteck} = y_m \cdot \Delta x$
 $f(x) - f(a) = x^2 - a^2$

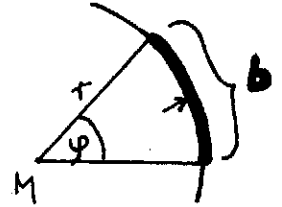
Nach diesen Beispielen kann man zur Vermutung kommen, dass man $\Delta y = f(x) - f(a)$ immer aus dem Flächeninhalt zwischen f und der x -Achse im betrachteten Intervall $[a; x]$ bekommt, also (HDI: Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)

Diese Vermutung lässt sich dann durch Ableitung dieser Flächenfunktion nach dem üblichen Verfahren beweisen.

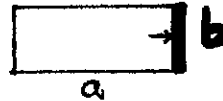
Zu 5. „Wachstumszonen“

Die Ableitung der Kreisfläche $A_K(r) = r^2\pi$ ergibt $A'(r) = 2r\pi$, also den Kreisumfang.

Die Ableitung der Sektorfläche $A_K(r) = \frac{r^2\pi\cdot\varphi}{360^\circ}$ ergibt $A'_K(r) = \frac{2r\pi\cdot\varphi}{360^\circ}$, also den dazugehörigen Kreisbogen b



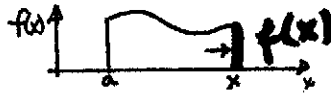
Die Ableitung der Rechtecksfläche $A(a) = ab$ ergibt $A'(a) = b$, also die Länge des Bereiches, in dem die Fläche bei Vergrößerung von a wächst.



Die Ableitung der Quadratfläche $A(a) = a^2$ ergibt $A'(a) = 2a$.

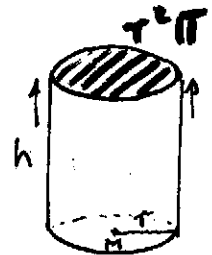


Die Ableitung der Flächenfunktion $A(x)$ über der Funktion f ergibt den Funktionswert $f(x)$, also wieder die Größe der Wachstumszone.



Aus dem Kugelvolumen wird durch Ableitung die Kugeloberfläche.

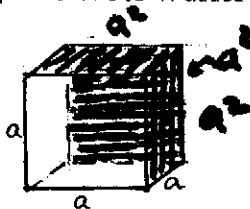
Aus dem Zylindervolumen $V(r) = r^2\pi h$ entsteht $V'(r) = 2r\pi h$, also die Mantelfläche, andererseits bei Ableitung von $V(h)$ nach h entsteht $V'(h) = r^2\pi$, also die Deck- oder Grundfläche – auch hier jeweils wieder die Wachstumszonen.



Entsprechendes ergibt sich bei Würfel und Quader.

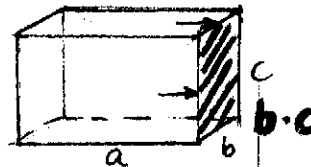
$$V(a) = a^3$$

$$V'(a) = 3a^2$$



$$V(a) = abc$$

$$V'(a) = bc$$



Schwieriger ist die Interpretation bei Dreieck und Kegel.

A. Jäbeler, 2.2.2012