Trefftypen

Im Buche *Einführung in die synthetische Liniengeometrie* von Hanns-Jörg Stoß (1999, Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum), wird auf Seite 19 der *Treffstrahlenoperator*, kurz *Treffoperator*, definiert. In diesem Aufsatz werden die möglichen *Treffmengen* (das sind die Ergebnisse der Anwendung des Treffoperators) klassifiziert, von denen es 12 Typen gibt.

1 Treffen

Zwei Geraden *treffen* einander, wenn es wenistens einen Punkt gibt, der auf beiden liegt, oder dual: wenn es wenigstens eine Ebene gibt, in der beide liegen. Insbesondere trifft sich jede Gerade selber.

Es sei $\mathcal{G}$ die Menge aller Geraden im projektiven Raume. Zu einer beliebigen Geraden-Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ sei

$$T(\mathcal{A}) := \{g \in \mathcal{G} | g \text{ trifft jede Gerade } a \in \mathcal{A}\}$$

die Menge der *Treffstrahlen* von $\mathcal{A}$. T heisst der *Treffoperator*. Er ist offenbar ein Operator auf die Potenzmenge $2^{\mathcal{G}}$.

Einige einfache, jedoch wichtige Beispiele mögen diese Definition erläutern. Wir untersuchen die Treffmengen von sämtliche Konfigurationen von 0 bis 3 Geraden. Es gibt die folgenden Fälle.

1 Wenn $\mathcal{A}$ nur eine Gerade l enthält, ist $T(\mathcal{A})$ ein spezieller linearer Komplex oder eine *Bürste*. Neben l enthält sie für jeden Punkt P auf l das Bündel durch P. Umgekehrt hat diese Bürste nur einen Treffstrahl, nämlich l:

$$T^2(\mathcal{A}) = T(T(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$$

2 Sind l, m windschiefe Geraden, dann ist $T(l, m) = T(\mathcal{A})$ der hyperbolische Kongruenz der Verbindungsgeraden: zu jedem Punkte P auf l gibt es eine Verbindungsebene β mit m, die wir notieren als $P \vee m$, und in dieser Ebene das Büschel $\langle P, \beta \rangle$; der Kongruenz besteht aus sämtlichen Büschelgeraden, wenn man P auf l bewegt. Genau

$$T(l, m) = \bigcup_{P \in l} \langle P, P \vee m \rangle = \bigcup_{Q \in m} \langle Q, Q \vee l \rangle$$

oder dual:

$$T(l, m) = \bigcup_{\alpha \ni l} \langle \alpha \wedge m, \alpha \rangle = \bigcup_{\beta \ni m} \langle \beta \wedge l, \beta \rangle$$

Darin bedeutet $\alpha \wedge m$ den Schnittpunkt von α und m. Man beachte, daß l und m nicht zu $T(l, m)$ gehören. Umgekehrt hat dieser Kongruenz zwei Treffstrahlen, l und m, also ist wieder $T^2(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

3 Liegen l und m in α, und treffen sie sich in P, dann besteht $T(\mathcal{A}) = T(l, m)$ aus dem Geradenfeld α *und* dem Strahlenbündel P. Umgekehrt hat diese Treffmenge das Büschel $\langle P, \alpha \rangle$ als Treffmenge. Zum erstenmal ist hier also $T^2(\mathcal{A}) \neq \mathcal{A}$. Jedoch, $T^3(\mathcal{A}) = T(\mathcal{A})$, usw.

Drei Geraden können folgende Konfigurationen bilden:

- sie sind paarweise windschief, siehe unten: Fall 4
- zwei schneiden sich, die dritte ist zu den beiden ersten windschief, Fall 5
- zwei sind windschief, die dritte trifft die beiden ersten, Fall 5
- sie liegen in einer Ebene, gehen aber nicht durch einen Punkt, Fall 6
- sie gehen durch einen Punkt, liegen aber nicht in einer Ebene, Fall 7
- sie liegen in einer Ebene und gehen durch einen Punkt; es wird sich zeigen daß dierser Fall schon auf Fall 3 (oben) zurückzuführen ist

Es gibt die folgenden Fälle für den Treffoperator.

4 Die Treffstrahlen von drei windschiefen Geraden bilden eine Regelschar. Weiter ist die Treffmenge dieser Regelschar ihre Leitschar.

5 Es seien l und m Geraden durch P und in α, und n eine dritte Gerade, die α in $Q \neq P$ schneidet (Figur 1, links). Die Ebene durch n und P sei β. Die Treffstrahlen bilden die beiden Büschel $\langle P, \beta\rangle \cup \langle Q, \alpha\rangle$. Die Treffstrahlen dieser Büschel, also $T^2(l, m, n)$, bilden eine ähnliche Menge: $\langle Q, \beta\rangle \cup \langle P, \alpha\rangle$.

  Wenn wir jetzt die drei Geraden ausser acht lassen, entsteht die symmetrische Figur (Figur 1, rechts) aus einer Geraden (PQ), auf welcher zwei Punkte liegen, und durch welche zwei Ebenen gehen.

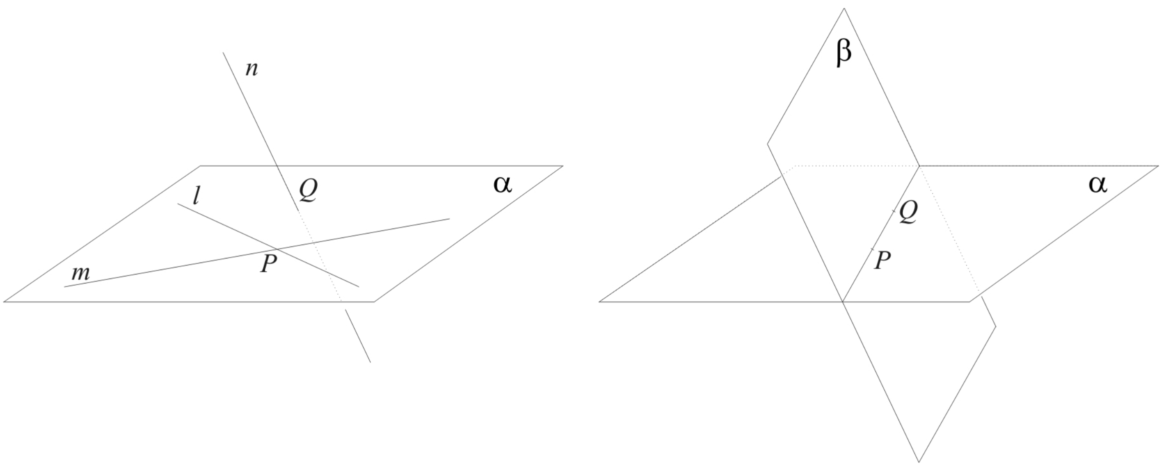

Figure 1: Fall 5

  Wenn Q auf l oder m liegt (aber nicht auf beiden), bekommt man die gleiche Treffmenge.

6 Die Treffstrahlen dreier nicht-konkurrenter Geraden in eine Ebene α bilden das ebene Feld α, also sämtliche Geraden in α. Wiederholtes Anwenden von T liefert in diesem Falle immer wieder das gleiche Feld α.

7 Die Treffstrahlen dreier nicht-co-planarer Geraden in einem Punkte P bilden das Strahlenbündel P. Auch hier liefert wiederholtes Anwenden von T immer das gleiche Bündel.

- Liegen l, m, n in einer Ebene α und gehen sie durch einen Punkt P, so ist $T(l, m, n)=$ Feld α $\cup$ Bündel P, also genau wie bei zwei sich treffenden Geraden. $T^2(l, m, n)$ ist wieder das Büschel $\langle P, \alpha \rangle$.

0 Als letztes Beispiel nehmen wir die Menge aller Geraden $\mathcal{G}$. Es gibt offenbar keine einzige Gerade, die sämtliche Geraden trift, also $T(\mathcal{G}) = \emptyset$. Umgekehrt wird die Bedingung *'alle Geraden aus der leeren Menge treffen'*, von jeder Gerade erfüllt, also $T(\emptyset) = \mathcal{G}$.

Damit haben wir alle Konfigurationen von null bis drei Geraden studiert und ihre Treffmengen gefunden.

Im allgemeinen gilt: wiederholtes Anwenden von T gibt nach dem zweiten Mal keine neue Mengen mehr, dafür wird hin und her gependelt zwischen $T(\mathcal{A})$ und $T^2(\mathcal{A})$ (Stoß , Satz 1.37-4, seite 20). Es gibt jedoch zwei Typen von Mengen, die invariant sind unter T: das Strahlenbündel P und das Strahlenfeld α. Für diese Mengen gilt: $T(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Wir fassen die bisherigen Resultate in Tabelle 1 zusammen. In den Spalten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ stehen sämtliche Konfigurationen von 0 bis 3 Geraden. In den Spalten $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ stehen sämtliche daraus durch ein- oder zweimaliges Anwenden von T entstehenden Treffmengen.

	$\mathcal{A}$		$\mathcal{B}$		$\mathcal{C}$
0.			$\emptyset$	$\overset{T}{\leftrightarrow}$	alle Geraden
1.			1 Gerade	$\overset{T}{\leftrightarrow}$	Bürste
2.			2 windschiefe Geraden	$\overset{T}{\leftrightarrow}$	Kongruenz
3.	2 Geraden durch P in α	$\overset{T}{\rightarrow}$	Feld α und Bündel P	$\overset{T}{\leftrightarrow}$	Büschel $\langle P, \alpha \rangle$
4.	3 Geraden, alg.	$\overset{T}{\rightarrow}$	Regelschaar	$\overset{T}{\leftrightarrow}$	Leitschaar
5.	3 Geraden, Figur 1	$\overset{T}{\rightarrow}$	$\langle P, \beta \rangle \cup \langle Q, \alpha \rangle$	$\overset{T}{\leftrightarrow}$	$\langle P, \alpha \rangle \cup \langle Q, \beta \rangle$
6.	3 Geraden in der Ebene α	$\overset{T}{\rightarrow}$	Feld α	$\rightleftarrows T$	
7.	3 Geraden durch Punkt P	$\overset{T}{\rightarrow}$	Bündel P	$\rightleftarrows T$	
	3 Geraden durch P in α	siehe 3.			

Table 1: Treffmengen

Es wird sich zeigen, daß mit diesen Treffmengen alle Möglichkeiten erschöpft sind, d.h. für jede Menge $\mathcal{X} \subset \mathcal{G}$ ist $T(\mathcal{X})$ eine Menge aus Spalte $\mathcal{B}$ oder $\mathcal{C}$.

2 Die zwölf Typen

Definition Eine Menge $\mathcal{T} \subset \mathcal{G}$ heisst *Treffmenge*, wenn es eine Menge $\mathcal{X} \subset \mathcal{G}$ gibt, so daß $T(\mathcal{X}) = \mathcal{T}$.

Weil 'treffen' mit Inzidenz definiert wird, bleibt die Treffrelation invariant unter Kollineationen (das sind projektive Abbildungen, die Punkte in Punkte überführen). Treffmengen werden in Treffmengen überführt.

Definition Zwei Treffmengen sind *äquivalent*, wenn es eine Kollineation gibt, die die eine in die andere überführt. Diese Relation ist offenbar eine Äquivalenz, und eine Äquivalenz-Klasse heisst ein *Trefftyp*.

Hauptsatz Es gibt zwölf Trefftypen, und zwar die in den Spalten $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ der Tabelle 1. Sie sind aufgelistet in Tabelle 2 (mit zughöriger Spalte/Zeile der Tabelle 1).

$\emptyset$	$\mathcal{B}_0$	Doppel-Büschel	$\mathcal{B}_5$	Feld-Bündel	$\mathcal{B}_3$
1 Gerade	$\mathcal{B}_1$	Regelschar	$\mathcal{B}_4$	Kongruenz	$\mathcal{C}_2$
2 ws. Geraden	$\mathcal{B}_2$	Feld	$\mathcal{B}_6$	Bürste	$\mathcal{C}_1$
Büschel	$\mathcal{C}_3$	Bündel	$\mathcal{B}_7$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{C}_0$

Table 2: Die 12 Typen

Für den Beweis brauchen wir zuerst einige elementare Eigenschaften, die einfach zu beweisen sind, und die wir dem genannten Buche von Stoß entnehmen (Satz 1.37, seite 19).

S1 $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y} \Rightarrow T(\mathcal{Y}) \subset T(\mathcal{X})$
S3 $\mathcal{X} \subset T^2(\mathcal{X})$
S4 $T^{n+2}(\mathcal{X}) = T^n(\mathcal{X})$ für $n \geq 1$
S5 $\mathcal{X}$ ist Treffmenge $\Leftrightarrow \mathcal{X} = T^2(\mathcal{X})$

Zweitens wollen wir als Übung den nächsten Satz beweisen.

Lemma Es sei $\mathcal{T}$ eine Treffmenge von einem bekannten (in Tabelle 2 stehenden) Typ, und l eine nicht zu ihr gehörende Gerade. Dann gehört auch $T(\mathcal{T} \cup \{l\})$ zu einem bekannten Typ.
Beweis Für die Typen $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ ist es trivial (weniger als drei Geraden).

$\mathcal{B}_3$ l sei eine Gerade, die nicht in α liegt und nicht durch P geht. Die Geraden, die $\mathcal{B}_3$ treffen, bilden Büschel $\langle P, \alpha \rangle$. Unter denen gibt es *eine*, die l trifft. Also ist die Treffmenge vom Typ $\mathcal{B}_1$: 1 Gerade.

$\mathcal{B}_4$
- Wenn l ein Leitstrahl ist, dann ist l der einzige Treffstrahl: Es resultiert der Typ $\mathcal{B}_1$: 1 Gerade.
- Wenn l die Regelschar in 0, 1 oder 2 Punkten trifft, gibt es 0, 1 oder 2 Treffstrahlen: Typ $\mathcal{B}_0$ bzw. $\mathcal{B}_1$ bzw. $\mathcal{B}_2$.

$\mathcal{B}_5$
- Wenn l zu einer der Bündel oder Felder gehört, bilden die Treffstrahlen ein Büschel: Typ $\mathcal{B}_3$.
- Wenn l die Ebenen α, β trifft in zwei neuen Punkte R, S, gibt es zwei windschiefe Treffstrahlen, PR en QS: Typ $\mathcal{B}_2$.

$\mathcal{B}_6$ l schneidet α in einem Punkt P. Die Treffstrahlen bilden das Büschel $\langle P, \alpha\rangle$: Typ $\mathcal{C}_3$.

$\mathcal{B}_7$ Die Verbindung von l und P ist eine Ebene α. Die Treffstrahlen bilden das Büschel $\langle P, \alpha\rangle$: Typ $\mathcal{C}_3$.

$\mathcal{C}_1$ Es gibt keine Treffstrahlen: Typ $\mathcal{B}_0$.

$\mathcal{C}_2$
- Wenn l einen der Träger der Kongruenz schneidet, ist dieser Träger der einzige Treffstrahl: Typ $\mathcal{B}_1$.
- Wenn l keinen der Träger schneidet, gibt es keinen einzigen Treffstrahl: Typ $\mathcal{B}_0$.

$\mathcal{C}_3$
- $l \in \alpha$. Die Treffstrahlen bilden das Feld α: Typ $\mathcal{B}_6$.
- $P \in l$. Die Treffstrahlen bilden das Bündel P: Typ $\mathcal{B}_7$.
- l schneidet α in Q, und die Verbindung von l und P ist β. Die Treffstrahlen bilden zwei Büschel $\langle P, \beta\rangle$ und $\langle Q, \alpha\rangle$: Typ $\mathcal{B}_5$.

Damit ist das Lemma bewiesen. Weiter bemerken wir, daß die Trefftypen durch Inklusion geordnet sind. Das bedeutet, daß es z.B. für jedes Büschel $\langle P, \alpha\rangle$ (Typ $\mathcal{C}_3$) und für jedes Feld β eine Kollineation f gibt die das Büschel *in* das Feld abbildet. Figur 2 gibt eine Übersicht dieser Beziehungen.

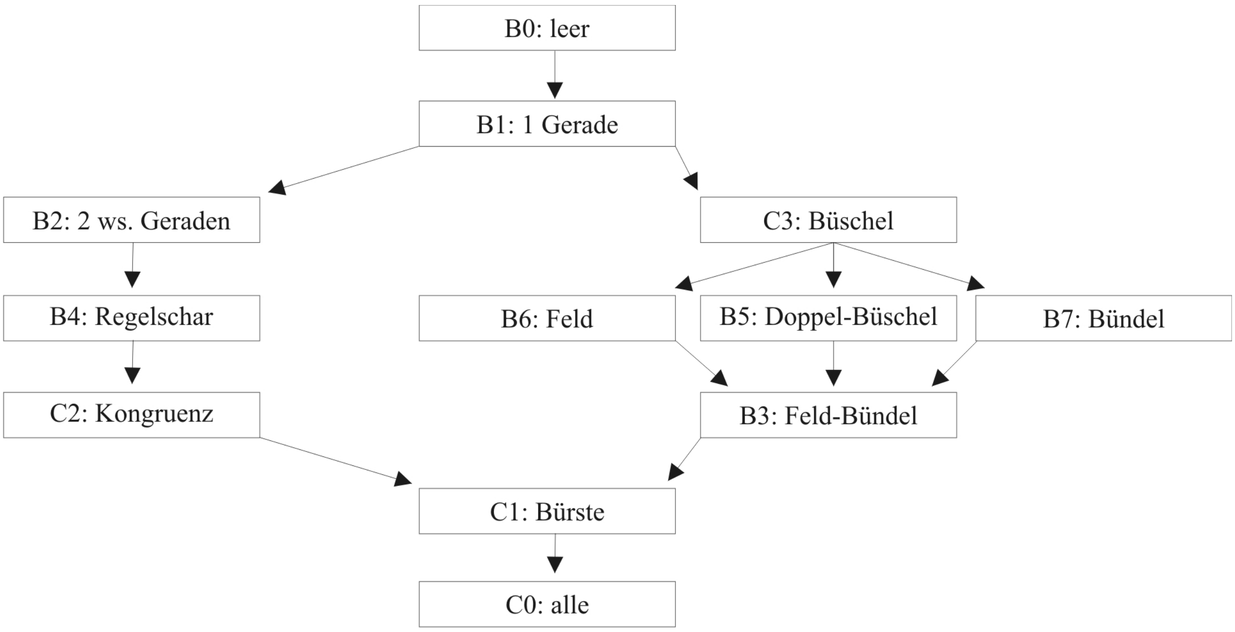

Figure 2: Inklusions-Beziehungen

Man bemerke noch, daß im vorigen Lemma $\mathcal{T} \subset \mathcal{T} \cup \{l\}$ und deswegen $T(\mathcal{T}) \supset T(\mathcal{T} \cup \{l\})$. In Figur 2 bedeutet das, daß man immer höher kommt, wenn man eine Gerade zur jeweiligen Menge hinzufügt.

Beweis des Hauptsatzes Es sei $\mathcal{X}$ eine beliebige Geraden-Menge. Wenn $\mathcal{X}$ weniger als vier Elemente hat, ist $T(\mathcal{X})$ von einem bekannten Typ. Es sei also die Anzahl Geraden in $\mathcal{X}$ wenigstens vier, und a, b, c seien drei beliebige verschiedenen Geraden aus $\mathcal{X}$. Weiter sei $\mathcal{Y}_0 = T^2(a, b, c) \cap \mathcal{X}$ und $\mathcal{Z}_0 = \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}_0$. Damit ist unsere Menge aufgeteilt in zwei Untermengen (Figur 3):

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y}_0 \cup \mathcal{Z}_0 \qquad \text{und} \qquad \mathcal{Y}_0 \cap \mathcal{Z}_0 = \emptyset$$

Wir stellen fest

- $T(\mathcal{Y}_0) = T(a, b, c)$
  denn $\{a, b, c\} \subset \mathcal{Y}_0 \subset T^2(a, b, c)$, also (wegen S1) $T(a, b, c) \supset T(\mathcal{Y}_0) \supset T^3(a, b, c) = T(a, b, c)$ (letzteres wegen S4).
- $\mathcal{X} = \mathcal{Y}_0 \;\Leftrightarrow\; T(\mathcal{X}) = T(\mathcal{Y}_0)$
  $\Rightarrow$ ist trivial.
  $\Leftarrow$ Aus $T(\mathcal{X}) = T(\mathcal{Y}_0)$ folgt $T^2(\mathcal{X}) = T^2(\mathcal{Y}_0) = T^2(a, b, c)$. Damit $\mathcal{X} \cap T^2(\mathcal{X}) = \mathcal{X} \cap T^2(a, b, c) = \mathcal{Y}_0$. Und weil $\mathcal{X}$ Teil der beiden linken Mengen ist, ist sie auch Teil von $\mathcal{Y}_0$. Also sind sie gleich.

Wenn $\mathcal{X} = \mathcal{Y}_0$, dann ist $T(\mathcal{X}) = T(\mathcal{Y}_0) = T(a, b, c)$ von bekanntem Typ. Wenn nicht, nimme man l_1 aus $\mathcal{Z}_0$ beliebig. Dann ist $T(a, b, c, l_1) \subset T(a, b, c)$. Können die beiden gleich sein? Das wüerde bedeuten, dass auch $T^2(a, b, c, l_1) = T^2(a, b, c)$; aber der Linke enthält l_1, der Rechte nicht. Also ist $T(a, b, c, l_1)$ echter Teilmenge von $T(a, b, c)$. (Das geht übrigens auch aus dem Lemma hervor.)
Wiederum teilen wir $\mathcal{X}$ in zwei disjunkte Untermengen auf: $\mathcal{Y}_1 = T^2(a, b, c, l_1) \cap \mathcal{X}$ und $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}_1$. Jetzt ist

$$\mathcal{Y}_0 \subset \mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{X} \qquad \text{und} \qquad T(\mathcal{Y}_0) \supset T(\mathcal{Y}_1) \supset T(\mathcal{X})$$

Wieder ist entweder $T(\mathcal{X}) = T(\mathcal{Y}_1) = T(a, b, c, l_1)$ von bekanntem Typ, oder $T(\mathcal{X})$ ist

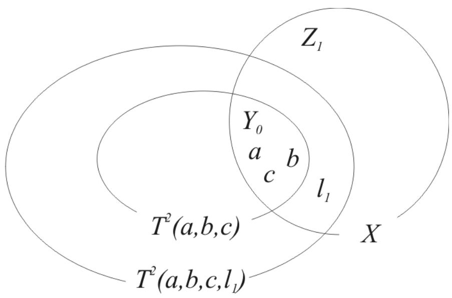

Figure 3: Zerlegung einer beliebige Menge

echte Teilmenge von $T(\mathcal{Y}_1)$. Weil es nur endlich viele Typen gibt, mit der leere Menge als kleinstem, muß dieser Prozess nach endlich vielen Schritten resultieren in $T(\mathcal{X}) = T(\mathcal{Y}_n) = T(a, b, c, l_1, \ldots l_n)$, dies ist also von bekanntem Typ. Damit ist der Hauptsatz bewiesen.

3 Minimal-Mengen

Wir haben im ersten Abschnitt die Treffmengen von 0 bis 3 Geraden gefunden. Mit diesen kleinen Konfigurationen kann man also Bürsten, Kongruenzen usw. bilden. Umgekehrt geht mit dem Treffoperator aus einer Kongruenz eine Menge von zwei windschiefen Geraden hervor. Die Frage stellt sich, ob es eine kleinere bzw. kleinste Menge gibt, die z.B. zwei windschiefe Geraden als Treffmenge hat. Unmittelbar ist klar, daß eine kleinste Menge, wenn sie schon existiert, sicher nicht eindeutig bestimmt ist: z.B. jede drei Leitgeraden einer Regelschar haben die Regelschar als Treffmenge. In diesem Beispiel ist die Konfiguration jedoch bis auf Projektivität eindeutig. Aber auch diese Eindeutigkeit ist nicht immer vorhanden.

Definition Eine Menge $\mathcal{M}_i$ heißt *Minimal-Menge* einer Treffmenge $\mathcal{T}$, wenn $T(\mathcal{M}_i) = \mathcal{T}$ und

$$T(\mathcal{X}) = \mathcal{T} \;\Rightarrow\; |\mathcal{M}_i| \leq |\mathcal{X}|$$

für jede Menge $\mathcal{X}$. Eine Menge $\mathcal{M}_a$ heißt *Maximal-Menge* von $\mathcal{T}$, wenn $T(\mathcal{M}_a) = \mathcal{T}$ und

$$T(\mathcal{X}) = \mathcal{T} \;\Rightarrow\; \mathcal{X} \subset \mathcal{M}_a$$

für jede Menge $\mathcal{X}$.

Zu jeder Treffmenge $\mathcal{T}$ gibt es genau eine Maximal-Menge: $T(\mathcal{T})$. Das ist einfach zu beweisen, und sei den Leser überlassen.

Satz Jede Menge, die $\mathcal{A}$ (linke Spalte) von Tabelle 1 umfasst und selber Teil ist von $\mathcal{C}$ (rechte Spalte), ergibt unter T die Menge $\mathcal{B}$ (mittlere Spalte, im Fall 6 und 7 gilt $\mathcal{C} = \mathcal{B}$).

> **Beweis** Gegeben $\mathcal{B} = T(\mathcal{A}), \mathcal{C} = T(\mathcal{B}), \mathcal{A} \subset \mathcal{X} \subset \mathcal{C}$. Dann: $\mathcal{A} \subset \mathcal{X} \Rightarrow T(\mathcal{X}) \subset T(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ und $\mathcal{X} \subset \mathcal{C} \Rightarrow T(\mathcal{X}) \supset T(\mathcal{C}) = T^3(\mathcal{A}) = T(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, also $T(\mathcal{X}) = \mathcal{B}$.

Für die meisten Treffmengen sind die Minimal-Mengen in Tabelle 1 gegeben, nämlich die Treffmengen von Mengen mit höchstens drei Geraden.

Für die übrigen Treffmengen brauchen wir Mengen von nur vier Geraden. Es sei $\mathcal{X} = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = T(a, b, c)$ die von den ersten drei Geraden bestimmte Treffmenge.

0 Wenn a, b, c paarweise windschief sind, und d keine einzige Gerade der Regelschar $\mathcal{R}$ trifft, ist $T(a, b, c, d) = \emptyset$.

1a,b Wenn d die Regelschar berührt, also genau eine Gerade l von $\mathcal{R}$ in einem Punkt P trifft, so ist $T(a, b, c, d) = l$. Dabei ist zu unterscheiden zwischen 1a: P liegt auf einer der Geraden a, b, c, oder 1b: P liegt auf keiner dieser Geraden.

1c Wenn d Leitgerade von $\mathcal{R}$ ist, dann ist $T(a, b, c, d) = d$.

2a-c Wenn d die Regelschar in zwei verschiedenen Punkten (und also in zwei Geraden l, m) trifft, so ist $T(a, b, c, d) = \{l, m\}$. Dabei ist zu unterscheiden, ob kein Schnittpunkt (2a), einer (2b) oder beide (2c) Schnittpunkte auf der Geraden a, b, c liegen.

2d-f Wenn a, b in α liegen und sich treffen in P, weiter c, d in $\beta \neq \alpha$ liegen und sich treffen in Q, außerdem weder P noch Q auf der Schnittgeraden s von α und β liegen, so besteht die Treffmenge aus PQ und s. Dabei sind wieder drei Konfigurationen, 2d - 2f, zu unterscheiden.

3a Wenn a, b und c in einer Ebene α liegen, d aber α in P trifft, nicht aber in a, b und c, so ist $T(a, b, c, d)$ das Büschel $\langle P, \alpha \rangle$.

3b-f Daß die übrigen Konfigurationen das Büschel als Treffmenge haben, lassen wir als Aufgabe für die Leser.

Es ist eine gute Übung, sämtliche Konfigurationen von vier Geraden zu untersuchen und ihre Treffmengen zu bestimmen.

Tabelle 3 zeigt die Minimal-Mengen zu den 12 Typen. Zur Vollständigkeit sind auch die Maximal-Mengen aufgenommen.

Typ	Minimal-Menge	Maximal-Menge
$\emptyset$	4 Geraden, Fall 0	$\mathcal{G}$
1 Gerade	4 Geraden, Fall 1a-c	Bürste
2 Geraden	4 Geraden, Fall 2a-f	Kongruenz
Büschel $\langle P, \alpha \rangle$	4 Geraden, Fall 3a-f	Feld α und Bündel P
Doppel-Büschel	3 Geraden, Fall 5	Doppel-Büschel
Regelschar	3 windschiefe Geraden	Leitschar
Feld α	3 Geraden in α	Feld α
Bündel P	3 Geraden durch P	Bündel P
Feld-Bündel α, P	2 Geraden in α durch P	Büschel
Kongruenz(l, m)	l, m	l, m
Bürste l	l	l
$\mathcal{G}$	$\emptyset$	$\emptyset$

Table 3: Minimal- und Maximal-Mengen

Also: wenn $T(\mathcal{X}) = \mathcal{T}$ gibt es eine Minimal-Menge $\mathcal{M}_i$ und eine Maximal-Menge $\mathcal{M}_a$ aus Tabelle 3, so daß

$$M_i \subset \mathcal{X} \subset M_a \text{ und } T(\mathcal{M}_i) = T(\mathcal{X}) = T(\mathcal{M}_a) = \mathcal{T}$$

Daß die Minimal-Mengen nicht einmal bis auf Projektivität eindeutig von $\mathcal{X}$ bestimmt sind, zeigt das nächste Beispiel. Es seien z.B. a, b, c paarweise windschief, $\mathcal{R} = T(a, b, c)$ ihre Regelschar, d eine Leitgerade, und e eine Gerade, die die Schar in genau einem Punkt P trifft, wobei P auf d, nicht aber auf a, b und c liegt. Dann ist $T(a, b, c, d, e) = T(a, b, c, d) = T(a, b, c, e) = d$. $\{a, b, c, d\}$ und $\{a, b, c, e\}$ sind aber zwei projektiv verschiedene Minimal-Mengen.

Lou de Boer
Mit Dank an Prof. Dr. H.-J. Stoß und Prof. Dr. H. Wedde für die sprachliche und mathematische Korrekturen.
18-Januar-'5