Polareuklidische Geometrie

Der
duale Satz des Pythagoras
und das
Basler Problem

Immo Diener

Zusammenfassung des Vortrags im

Kolloquium
Mathematik und Geisteswissenschaft

20. Oktober 2018

1 Der Satz des Pythagoras

Als wichtigster Satz der euklidische Geometrie und als der Satz mit den meisten Anwendungen gilt der Satz des Pythagoras:

Satz 1.1 (Satz des Pythagoras)
In einem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten a, b *und Hypotenuse* c *ist* $a^2 + b^2 = c^2$*: Die Kathetenquadrate sind zusammen so groß wie das Hypotenusenquadrat.*

Dieser Satz wird in der Schule gewöhnlich als Satz über Flächen eingeführt: Die Fläche des über der Hypotenuse errichteten Quadrats ist so groß wie die beiden Flächen der über den Katheten errichteten Quadrate zusammengenommen. In dieser Interpretation ist der Satz anschaulich und nett darzustellen. Auch die vielen anschaulichen Beweise dazu lassen sich leicht fassen.

Aber diese Interpretation ist für die Anwendungen belanglos. Was man braucht, ist die Tatsache, dass man beim rechtwinkligen Dreieck mit Hilfe des Satzes des Pythagoras die Länge einer Seite aus den beiden anderen ausrechnen kann. Statt durch trickreiches Herumschieben von Flächen ist es daher vielleicht angemessener, den Satz aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke zu beweisen, in welche das Ausgangsdreieck durch die Höhe auf die Hypotenuse geteilt wird.

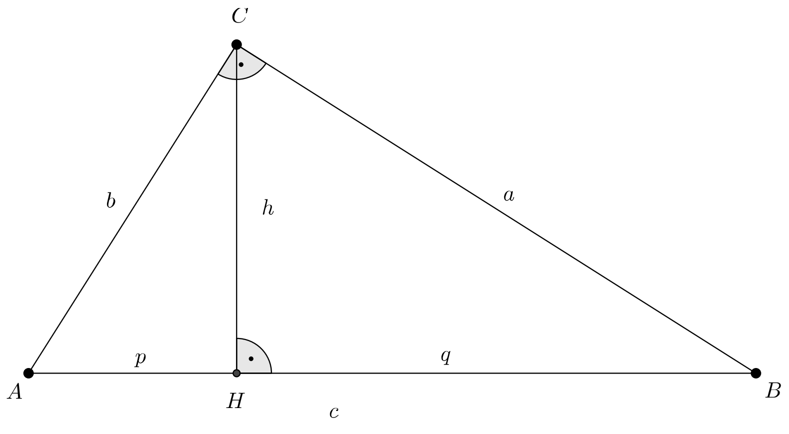

Abb. 1: Zum Satz des Pythagoras

Das Ausgangsdreieck $\triangle ABC$ ist nämlich ähnlich zu den Dreiecken $\triangle ACH$ und $\triangle CBH$ und daher ist $a/q = c/a$ und $b/p = c/b$ bzw. $a^2 = qc$ und $b^2 = pc$ (Kathetensatz). Addition ergibt $a^2 + b^2 = (p + q)c = c^2$. Ebenso folgt aus der Ähnlichkeit der Teildreiecke $h/q = p/h$ und daraus der Höhensatz $h^2 = p \cdot q$.

Bei näherer Betrachtung erweist sich die Tatsache, *dass ein rechtwinkliges Dreieck durch seine Höhe in zwei zum Ausgangsdreieck und zueinander ähnliche Dreiecke geteilt wird*, als der tiefere Grund und die Quelle aller Eigenschaften und Sätze rechtwinkliger Dreiecke. Umgekehrt ist ein Dreeck, welches durch eine Gerade in zwei zum Ausgangsdreieck oder zueinander ähnliche Dreiecke geteilt werden kann, bereits rechtwinklig.

Für unsere Zwecke ist es schon deshalb günstiger, den Satz des Pythagoras als Satz über ähnliche Dreiecke anzusehen, weil wir die Messung von Flächeninhalten noch gar nicht definiert und dualisiert haben.

1.1 Allgemeine Dualisierung des Satzes

Mit „allgemeine Dualisierung“ ist gemeint, dass der absolute Mittelpunkt a.M. keine spezielle Lage in bezug auf das dualisierte rechtwinklige Dreieck hat. Aus den Eckpunkten A, B, C des rechwinkligen Dreiecks mit rechtem Winkel bei C werden beim Dualisieren drei Seiten a, b, c (Geraden) eines rechtstreckigen Dreiseits, also eines Dreiseits, bei dem die Schnittpunkte ac und bc senkrecht zueinander sind. Der duale Satz des Pythagoras besagt dann, dass die Summe der Quadrate der beiden Fächerweiten $d^*(a,c)$ und $d^*(b,c)$ gleich dem Quadrat der Fächerweite $d^*(a,b)$ ist, also

$$d^*(a,c)^2 + d^*(b,c)^2 = d^*(a,b)^2.$$

Euklidisch gesehen und mit den Bezeichnungen in Abbildung 2 heißt das:

$$\left(\frac{1}{b_1} \pm \frac{1}{b_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{a_1} \pm \frac{1}{a_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{c_1} \pm \frac{1}{c_2}\right)^2.$$

Bei der Lage des a.M. wie in der Abbildung, gelten überall die Pluszeichen.

Die letzte Formulierung, in der e-Längen stehen, sieht nicht besonders elegant aus. Insgesamt kommen sechs e-Längen vor, die zueinander in Beziehung gesetzt werden. Elegantere duale Formulierungen erhält man, wenn man den a.M. in einen Eckpunkt des Ausgangsdreiecks legt.

1.2 Dualisierung des Satzes mit a.M. in C

Wenn wir den a.M. vor dem Dualisieren in die Ecke C des Ausgangsdreiecks legen, wird beim Dualisieren die Seite c des Dreiseits zur Ferngerade und die Seiten a und b des Ausgangsdreiecks werden zu Fernpunkten. Die Konfiguration sieht dann aus, wie in Abbildung 3 dargestellt.

Euklidisch würde man das Ergebnis folgendermaßen ausdrücken (vgl. Abb. 4): Gegeben ein rechtwinkliges Dreieck ABC und sei H der Höhenfußpunkt.

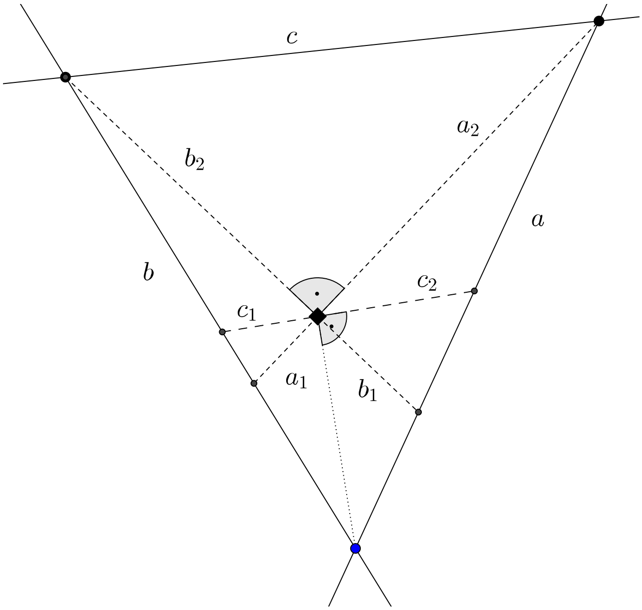

Abb. 2: Zum allgemeinen dualen Satz des Pythagoras

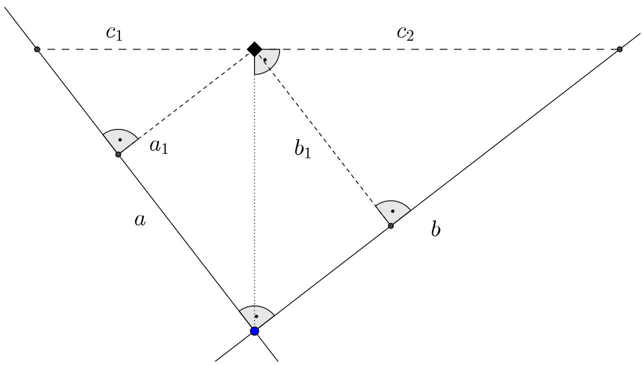

Abb. 3: Zum dualen Satz des Pythagoras mit absolutem Mittelpunkt in C: Es ist $1/a_1^2 + 1/b_1^2 = (1/c_1 + 1/c_2)^2$.

Seien h_a und h_b die von H aus auf die Katheten gefällten Lote und seien p, q die beiden Strecken, in welche die Hypotenuse durch H geteilt wird. Dann gilt

$$\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)^2.$$

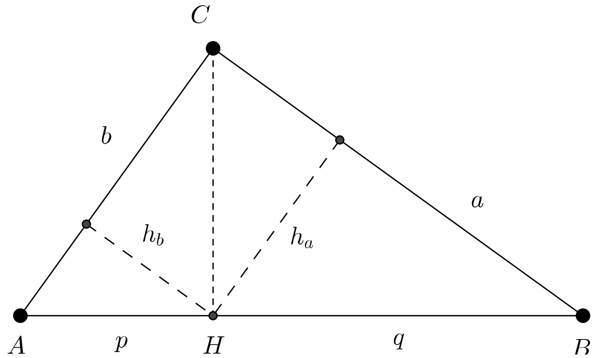

Abb. 4: Zum dualen Satz des Pythagoras mit absolutem Mittelpunkt in C: Es ist $1/h_a^2 + 1/h_b^2 = (1/p + 1/q)^2$.

1.3 Dualisierung des Satzes mit a.M. in A

Eine weitere Möglichkeit, den dualen Satz des Pythagoras zu spezialisieren besteht darin, den a.M. in einen der Eckpunkte A, B des rechtwinkligen Ausgangsdreiecks zu legen, sagen wir in A. Dann wird die Seite a des bei der Dualisierung entstehenden Dreiseits zur Ferngerade und die Kathete b sowie die Hypotenuse c des rechtwinkligen Ausgangsdreiecks werden zu Fernpunkten B und C (vgl. Abb. 5).

Auch hier ist es wieder sinnvoll, das Ergebnis euklidisch auszudrücken:

Satz 1.2 (Dualer Satz des Pythagoras)
In einem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten a und b und Höhe h ist:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 = \left(\frac{1}{h}\right)^2,$$

bzw. (weniger sachgemäß)

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2} \quad \textit{oder} \quad a^{-2} + b^{-2} = h^{-2}.$$

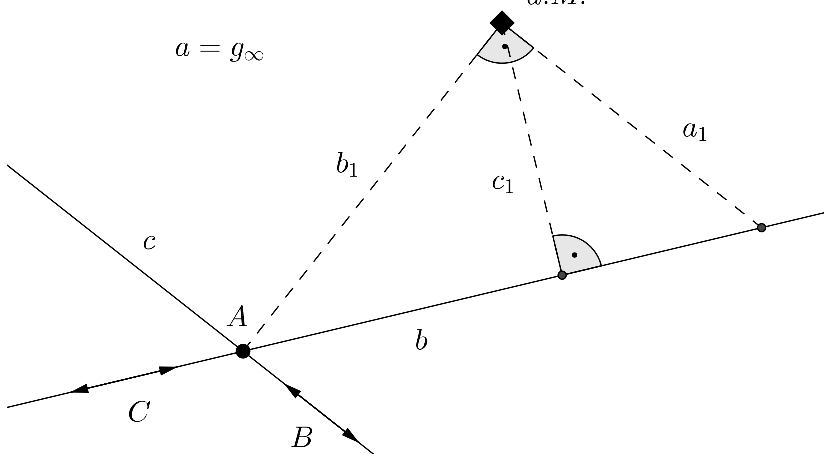

Abb. 5: Zum dualen Satz des Pythagoras mit absolutem Mittelpunkt in A: Es ist $1/a_1^2 + 1/b_1^2 = 1/c_1^2$.

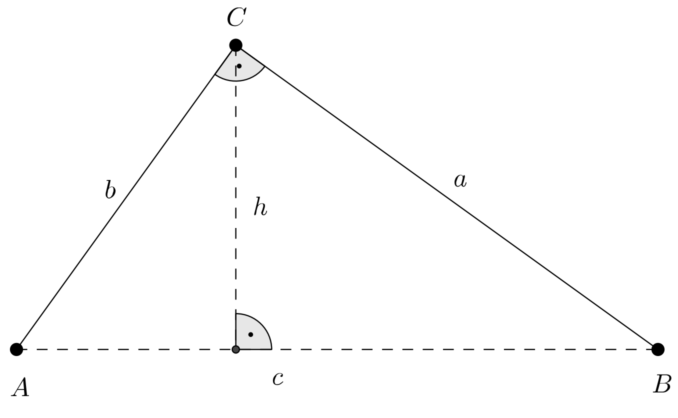

Abb. 6: Der gewöhnliche und der duale Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$ und $a^{-2} + b^{-2} = h^{-2}$.

Siehe dazu auch Abb. 6. Dieser Satz ist auch ohne Dualität aus dem gewöhnlichen Pythagoras einfach zu beweisen, aber dennoch ziemlich unbekannt. Der Satz aus Abschnitt 1.2 läßt sich schnell mit Satz 1.2 beweisen, weswegen wir ihn dort nicht extra als Satz formuliert haben.

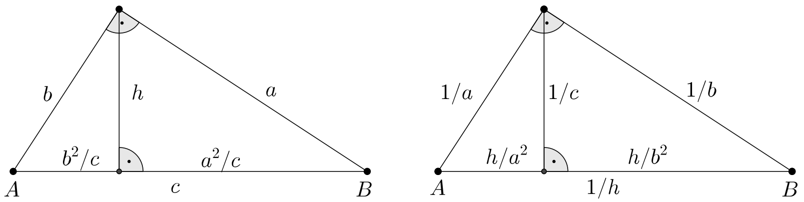

Abb. 7: Zwei ähnliche Dreiecke, die durch Muliplikation mit bzw. Division durch ab auseinander hervorgehen und zeigen, wie der Satz des Pythagoras und der duale Satz des Pythagoras miteinander zusammenhängen

Die beiden Dreiecke in Abb. 7 sind mit $ab = hc$ skalierte Versionen ein und desselben rechtwinkligen Dreiecks. Der Satz des Pythagoras angewandt auf das rechte Dreieck liefert das gleiche wie der duale Satz des Pythagoras angewandt auf das linke Dreieck.

Als Versuch, den Satz des Pythagoras und seine duale Version mit einer gewissen Symmetrie zu „vereinen", sprich, eine Formulierung zu finden, aus der sich beide Sätze sofort und in analoger Weise ergeben, kann man folgendes ansehen:

Satz 1.3 Symmetrischer Satz des Pythagoras
In einem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten a, b, Hypotenuse c und Höhe h gelten die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &= \frac{c}{h} \quad \textit{und} \\ a \cdot b &= c \cdot h. \end{aligned}$$

Mutipliziert bzw. dividiert man die linke Seite der ersten Gleichung mit der linken bzw. durch die linke Seite der zweiten und ebenso die rechte Seite der ersten mit der rechten bzw. durch die rechte Seite der zweiten, so ergibt sich der

primale Satz des Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

duale Satz des Pythagoras:

$$a^{-2} + b^{-2} = h^{-2}.$$

Will man für beide Seiten des pythagoreischen Satzes eine Art „duale Anwendung" nennen, könnte man sagen:

Der e-Pythagoras erlaubt, zu einem Rechteck mit Seiten a, b die Länge der Diagonale zu bestimmen.

Der d-Pythagoras erlaubt, zu einem Rechteck mit Seiten a, b die Länge des Lotes aus einer Ecke auf die Diagonale zu bestimmen.

Wie aus Abb. 7 und der bisherigen Besprechung ersichtlich, besteht bei einem rechtwinkligen Dreieck folgende Symmetrie: Wenn man a mit $1/b$, (also auch b und $1/a$) sowie c und $1/h$ (also auch h mit $1/c$) vertauscht, gehen alle gültigen Beziehungen in dem Dreieck wieder in gültige Beziehungen über. Beispiele: $\sin\alpha = a/c \to \sin\alpha = (1/b)/(1/h) = h/b$, oder $a^2+b^2 = c^2 \to (1/b)^2+(1/a)^2 = (1/h)^2$.

2 Zahlentheoretische Anwendung

In seinem Paper [1] wendet Johan Wästlund den dualen Satz des Pythagoras auf besonders schöne Weise an. Er nennt ihn dort „Inverse Pythagorean Theorem“ und benutzt ihn, um Eulers berühmte Gleichung für π zu beweisen:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \ldots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Die Grundidee des Beweises lässt sich wie folgt erklären. Zunächst wird gezeigt, dass die Eulersche Identität äquivalent ist zu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \ldots + \frac{1}{(-5)^2} + \frac{1}{(-3)^2} + \frac{1}{(-1)^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = 2 \cdot \frac{\pi^2}{8},$$

bzw, nach Muliplikation beider Seiten mit 4, zu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-1/2)^2} = \pi^2.$$

Für die folgenden Schritte bemerken wir, dass in der Physik die scheinbare Helligkeit eines Sterns umgekehrt proportional zum Quadrat seiner Entfernung ist. Wir denken uns ein System von N Sternen gleicher Leuchtkraft, die äquidistant auf einem Kreis um ihren gemeinsamen Schwerpunkt angeordnet sind und fragen nach der Gesamtstrahlung, die dann ein einem beliebigen Ort P auf dem Kreis von allen Sternen zusammen empfangen wird.

Die Maßeinheiten werden geeignet gewählt: Als Einheit der Entfernung wählen wir die Entfernung zwischen den Sternen, gemessen entlang der Kreisbögen. Der Umfang des Kreises beträgt also N und sein Durchmesser N/π. Die Lichmenge, die in einem Punkt P empfangen wird, ist Summe der Kehrwerte der quadratischen Abstände von P zu den einzelnen Sternen, gemessen entlang gerader Linien. Für unsere Zwecke wählen wir P ein für alle Mal genau in der Mitte zwischen zwei Sternen und definieren f_N als die Lichtmenge, die in P von den N Sternen insgesamt empfangen wird (Abb. 8).

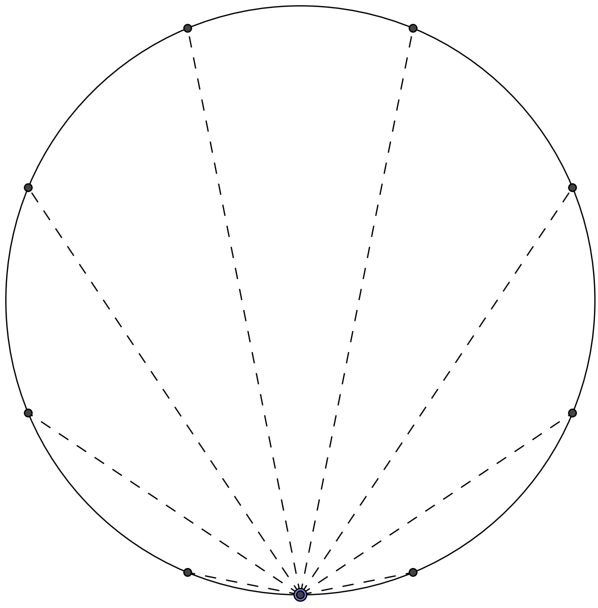

Abb. 8: P empfängt das Licht von acht Sternen. Der Kreisumfang ist 8 und die Entfernung von P zu den beiden nächstgelegenen Sternen *entlang dem Kreisbogen* beträgt jeweils 1/2 Einheit

Dann wird der Wert f_1 berechnet. Der Kreisumfang beträgt 1, der Durchmesser folglich $1/\pi$. Da P und der eine Stern diametral gegenüber liegen, ist die Summe der reziproken quadratischen Enfernungen von P zu allen Sternen gleich π^2 und deshalb $f_1 = \pi^2$.

Nun kommt der Trick, die Anwendung des dualen Satzes von Pythagoras. Wir zeigen: $f_1 = f_2$. Dazu schlagen wir um den Stern S_1^1 auf dem Kreis C_1 vom Umfang 1 als Mittelpunkt M_2 einen zweiten Kreis C_2 durch P, der also den Umfang 2 hat. Dann bezeichnen wir die beiden Schnittpunkte der Geraden durch S_1^1 und M_2 (hier ist das Tangente an den Kreis C_1 in M_2) mit dem Kreis C_2 mit S_2^1 und S_2^2. Das $\triangle S_2^1 S_2^2 P$ ist rechtwinklig mit rechtem Winkel in P und Höhe $\overline{PS_1^1}$. Nach Satz 1.2 empfängt also P genau so viel Licht von S_1^1, wie von

S_2^1 und S_2^2 zusammen. Es ist also $f_1 = f_2$.

Nun beweisen wir ganz analog $f_2 = f_4$. Um den Schnittpunkt M_4 der Geraden PM_2 mit dem Kreis C_2 schlagen wir einen Kreis C_4 durch P vom Umfang 4. Dann bezeichnen wir die beiden Schnittpunkte von $S_2^1M_4$ und C_4 mit S_4^1 und S_4^3. Das $\triangle S_4^1S_4^3P$ ist dann rechtwinklig mit Höhe $\overline{PS_2^1}$. Wieder nach dem dualen Satz des Pythagoras empfängt also P von S_2^1 genau so viel Licht, wie von S_4^1 und S_4^3 zusammen.

Ganz analog bezeichnen wir die beiden Schnittpunkte von $S_2^2M_4$ und C_4 mit S_4^2 und S_4^4 und sehen, dass P von S_2^2 genau so viel Licht erhält, wie von S_4^2 und S_4^4 zusammen.

P erhält also den $S_4^i, i = 1, \dots 4$ zusammen genau so viel Licht, wie von S_2^1 und S_2^2 zusammen, und das ist genau so viel Licht, wie P von S_1^1 allein erhält. Folglich ist $f_4 = f_2 = f_1$.

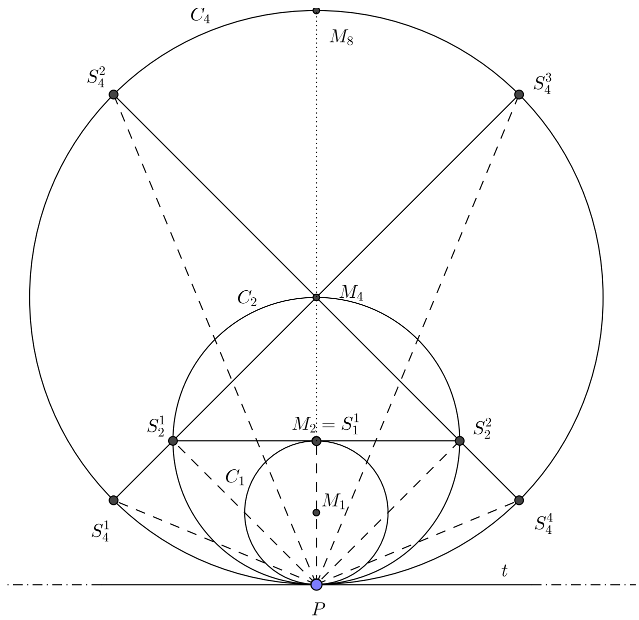

Abb. 9: P empfängt gleichviel Licht von S_1^1 wie von S_2^1 und S_2^2 zusammen, und das ist soviel, wie von S_4^1, S_4^2, S_4^3 und S_4^4 zusammen

Offenbar kann man so fortfahren und jedes S_4^i durch 2 Sterne S_8^j auf einem Kreis C_8 mit Umfang 8 und Mittelpunkt M_8 ersetzen, welche allo zusammen gnau so viel Licht auf P einstrahlen, wie S_1^1 alleine. Wir erhalten also $f_1 = f_{2^n}$ für alle $n = 1, 2, \dots$, bzw. $f_N = \pi^2$, für alle Zweierpotenzen N.

Die N Punkte (Sterne) $S_N^j, j = 1, \ldots, N$ liegen für jede Zweierpotenz N äquidistant auf dem Kreis C_N vom Umfang N und Durchmesser N/π und P liegt stets genau zwischen S_N^1 und S_N^N. Denkt man sich nun N immer weiter wachsend, so schmiegt sich C_N an die Kreistangente t in P immer mehr an. Fassen wir t als Zahlenstrahl auf mit Nullpunkt P, dann nähern sich die in den Punkten M_j aufgeschnitteten Kreise dem Zahlenstrahl t an und die „Sterne“ S_N^j nähern sich den Punkten $(n - 1/2)$. Anschaulich liegt nahe, und Wästlund zeigt, dass es tatsächlich so ist, dass die Summe der Lichteinstrahlungen von den S_N^j sich dabei immer mehr der Summe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n - 1/2)^2}$$

nähert. Nach einer entsprechenden Überlegung zum Grenzübergang erhalten wir, wegen $f_N = \pi^2$ für alle (Zweierpotenzen) N, daraus

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n - 1/2)^2} = \pi^2$$

und daraus schließlich die Eulersche Gleichung

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Wästlunds Überlegungen sind allgemeiner, als wir hier wiedergegeben haben. Interessant ist seine Analogie zwischen den Quadraten reziproker e-Entfernungen zur scheinbaren Helligkeit einer Lichtquelle. Seine Interpretation des dualen Satzes von Pythagoras lautet:

> *Die Spitze C eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit rechtem Winkel in C erhält von zwei gleichartigen Sternen in A und B zusammen genau so viel Licht, wie von einem einzigen solchen Stern im Höhenfußpunkt H des Dreiecks.*

Literatur

[1] Johan Wästlund. *Summing inverse squares by eukledian geometry.* `http://www.math.chalmers.se/~wastlund/Cosmic.pdf`, December 2010