Sonderabdruck aus dem
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. XXXVIII. 1929. Heft 5/8.
Verlag und Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Über ganze rationale Funktionen vierten Grades und ihre Kovarianten.

Von Gerhard Haenzel in Berlin.

Mit 3 Figuren im Text.

1. Die ganze rationale Funktion $n$ten Grades $f_n(z)$ der komplexen Variablen z besitzt für $n > 2$ gewisse Kovarianten, die aus den Kovarianten der binären Form $n$ter Ordnung $f_n(x_1, x_2)$ durch die Substitution $\frac{x_1}{x_2} = z$ hervorgehen. Die Kovarianten sind gegenüber den linearen Transformationen $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ invariant bis auf ganzzahlige Potenzen von $\alpha\delta - \beta\gamma$.

Dementsprechend hat die ganze rationale Funktion vierten Grades

$$f(z) = a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4$$

eine Kovariante $H(z)$ vom vierten und eine Kovariante $J(z)$ vom sechsten Grade, daneben zwei Invarianten

$$i = 2(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2)$$

und $$k = 6(a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4).$$

Durch Lösung der kubischen Resolvente

$$m^3 - \frac{i}{2} m - k = 0$$

kann $J(z)$ als Produkt dreier quadratischer Faktoren φ, χ, ψ dargestellt werden. $J(z) = 0$ ist eine durch Wurzelziehen lösbare Gleichung sechsten Grades. Sind m_1, m_2, m_3 die Lösungen der kubischen Resolvente, so gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} H(z) + m_1 f(z) &= -2\varphi^2 \\ H(z) + m_2 f(z) &= -2\psi^2 \qquad J(z) = 2\varphi\psi\chi. \\ H(z) + m_3 f(z) &= -2\chi^2 \end{aligned}$$

2. Die sechs Nullstellen von $J(z)$ werden nach Nr. 1 durch die drei Wurzeln m_1, m_2, m_3 der kubischen Resolvente eindeutig in drei Paare $z_{\mathrm{I}} z_{\mathrm{II}}$, $z_{\mathrm{III}} z_{\mathrm{IV}}$, $z_{\mathrm{V}} z_{\mathrm{VI}}$ geordnet, welche die Nullstellenpaare von φ, ψ, χ darstellen. Werden die beiden Nullstellen irgendeines solchen

Paares durch lineare Transformation nach $+1$ und -1 verlegt, so nimmt die zu ihnen gehörige Gleichung

$$H(z) + m_i f(z) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

die Form an $$z^4 - 2z^2 + 1 = 0.$$

Durch Koeffizientenvergleich folgen daraus die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} a_0 a_2 - a_1^2 + a_0 m_i &= 1 \\ a_0 a_3 - a_1 a_2 + 2a_1 m_i &= 0 \\ a_0 a_4 + 2a_1 a_3 - 3a_2^2 + 6a_2 m_i &= -2 \\ a_1 a_4 - a_2 a_3 + 2a_3 m_i &= 0 \\ a_4 a_2 - a_3^2 + a_4 m_i &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{und daraus:} \\ &a_1 = a_3,\ a_0 = a_4, \\ &a_2 = a_0 + 2m_i. \end{aligned}$$

Unter diesen Umständen nehmen $f(z)$ und $H(z)$ die Form an

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_1 z + a_0 \\ H(z) &= A_0 z^4 + 4A_1 z^3 + 6A_2 z^2 + 4A_1 z + A_0. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf die invarianten Eigenschaften der Kovarianten gegenüber linearen Transformationen ist somit bewiesen:

„Werden die sechs Nullstellen der Kovariante $J(z)$ durch die drei Lösungen der kubischen Resolvente in drei Paare geordnet, so gehen sowohl die vier Nullstellen der Funktion $f(z)$ als auch die vier Nullstellen der Kovariante $H(z)$ je paarweise in sich über durch Inversion an jedem Kreise über der Verbindungsstrecke eines Nullstellenpaares von $J(z)$ als Durchmesser und durch Spiegelung an diesem Durchmesser."

3. Wird über der Strecke AB als Durchmesser der Kreis geschlagen, so stellt die Inversion an diesem Kreise und die Spiegelung an der Geraden AB die lineare Transformation dar

$$w = \frac{(A+B)z - 2AB}{2z - (A+B)} \quad \text{oder} \quad \frac{w - A}{w - B} = e^{i\pi}\,\frac{z - A}{z - B}.\text{[1]}$$

Durch die Nullstellenpaare der Kovariante $J(z)$ sind also drei solche lineare Transformationen H, V, D bestimmt. Jede von ihnen vertauscht sowohl die Nullstellen z_1, z_2, z_3, z_4 der Funktion $f(z)$ untereinander paarweise, als auch die Nullstellen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4$ ihrer Kovariante $H(z)$, so daß den drei Transformationen H, V, D die drei möglichen Zerlegungen der vier Elemente z_1, z_2, z_3, z_4 in je zwei Paare entsprechen. Außerdem vertauscht H sowohl die beiden Fixpunkte

1) Vgl. hierzu die Abhandlung: Haenzel, Über ganze rationale Funktionen dritten Grades und ihre Kovarianten, Nr. 3, 4. Sitz.-Berichte der Berl. Mathem. Gesellschaft XXVII.

von V miteinander, als auch die von D. Entsprechendes gilt von V und D. Der ganze Zusammenhang läßt sich durch folgende Symbole darstellen:

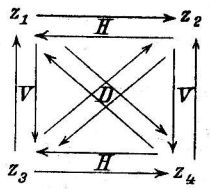

Fig. 1.
Nullstellenpaare $f(z)$.

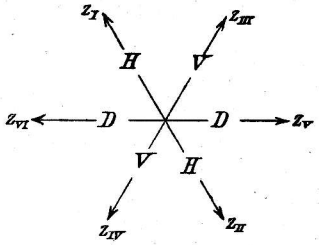

Fig. 2.
Fixpunktpaare $J(z)$.

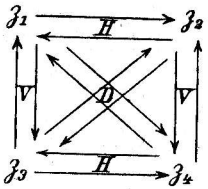

Fig. 3.
Nullstellenpaare $H(z)$.

Werden die drei Transformationen H, V, D in irgendeiner Reihenfolge nacheinander ausgeführt, so geht jede Nullstelle von $f(z)$, $H(z)$ und $J(z)$ in sich über. Daher gilt:

„Durch eine ganze rationale Funktion vierten Grades $f(z)$ sind drei lineare Transformationen gegeben. Jede von ihnen hat ein Nullstellenpaar der Kovariante $J(z)$ zu Fixpunkten und vertauscht sowohl die vier Nullstellen von $f(z)$ paarweise miteinander, als auch die vier Nullstellen der Kovariante $H(z)$. Jede vertauscht die beiden Fixpunkte der beiden übrigen, und aus allen dreien resultiert die Identität. Die drei Transformationen sind dabei untereinander vertauschbar, und aus je zwei von ihnen resultiert die dritte.“

(Eingegangen am 30. 5. 1928.)