Über ganze rationale Funktionen[1]).

Von Gerhard Haenzel in Berlin.

I. Über Kovarianten und Invarianten ganzer rationaler Funktionen.

1. Zwei ganze rationale Funktionen zweiten Grades:

$$f(z) = a_0 z^2 + 2a_1 z + a_2$$
$$\varphi(z) = \alpha_0 z^2 + 2\alpha_1 z + \alpha_2$$

haben bekanntlich eine simultane Kovariante zweiten Grades:

$$\vartheta(z) = (a_0\alpha_1 - a_1\alpha_0)z^2 + (a_0\alpha_2 - a_2\alpha_0)z + (a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1).$$

Werden die beiden Nullstellen von $\vartheta(z)$ durch lineare Transformation nach $+1$ und -1 verlegt, und nimmt infolgedessen die Gleichung $\vartheta(z) = 0$ die Form $z^2 - 1 = 0$ an, so folgt $a_0 = a_2$, $\alpha_0 = \alpha_2$, mit anderen Worten:

„*Haben zwei ganze rationale Funktionen zweiten Grades f, φ eine simultane Kovariante mit zwei voneinander verschiedenen Nullstellen z_{I}, z_{II}, so gehen sowohl die beiden Nullstellen von f als auch die beiden Nullstellen φ ineinander über durch Inversion am Kreise über der Verbindungsstrecke der Nullstellen z_{I}, z_{II} als Durchmesser und durch Spiegelung an diesem Durchmesser*“.

Wird über der Strecke $z_{\mathrm{I}} z_{\mathrm{II}}$ als Durchmesser der Kreis geschlagen, so stellt die Inversion an diesem Kreise und die Spiegelung an der Gerade $z_{\mathrm{I}} z_{\mathrm{II}}$ die Transformation dar:

$$z' = \frac{(z_{\mathrm{I}} + z_{\mathrm{II}})z - 2z_{\mathrm{I}} z_{\mathrm{II}}}{2z - (z_{\mathrm{I}} + z_{\mathrm{II}})} \quad \text{oder} \quad \frac{z' - z_{\mathrm{I}}}{z' - z_{\mathrm{II}}} = e^{i\pi} \cdot \frac{z - z_{\mathrm{I}}}{z - z_{\mathrm{II}}}.$$

Diese „Kovariantentransformation“ δ ist also elliptisch; sie führt sowohl jeden der Kreise durch die beiden Fixpunkte z_{I}, z_{II} in sich über, als auch jeden diese Kreise senkrecht schneidenden Kreis. Sie vertauscht die Punkte, Geraden und Kreise der komplexen Ebene paarweise involutorisch miteinander. Sind x, x' ein Paar konjugierter Punkte der Transformation δ (Fig. 1), z_{I}, z_{II} ihre beiden Fixpunkte, so gehört der Kreis durch x, x' und z_{I} dem ersten jener beiden Kreisbüschel an und enthält auch den zweiten

1) Vorgetragen in der 252. Sitzung am 12. Dezember 1928.

Fixpunkt z_{II}. Der diesen Umkreis des Dreiecks $xx'z_I$ in x, x' senkrecht schneidende Kreis liegt im zweiten Büschel, sein Mittelpunkt M_x ist der Pol der Dreieckseite xx' für den Umkreis des Dreiecks und die Gerade $M_x z_I$ schneidet den Umkreis im zweiten Fixpunkte z_{II} der Transformation.

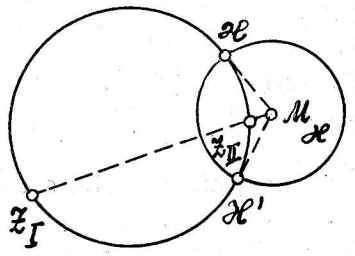

Fig. 1

Wurde die Transformation δ soeben durch ihre beiden Fixpunkte, oder durch den einen Fixpunkt und ein Paar konjugierter Punkte xx' bestimmt, so können auch umgekehrt die Fixpunkte aus zwei Paaren konjugierter Punkte konstruiert werden.

Die Punktepaare AA', BB' seien Paare konjugierter Punkte der Transformation. Sie bestimmen das einfache Vierseit (Fig. 2) AB, $A'B'$, AB', $A'B$ und es läßt sich zeigen, daß auch die Ecken C und C' durch die Transformation einander zugeordnet werden. Die vier Kreise, die sich um die vier von den Seiten des Vierseits gebildeten Dreiecke ABC', $A'BC$, $AB'C$ und $A'B'C'$ beschreiben lassen, schneiden einander in dem gemeinschaftlichen Punkte O. Die vier Geraden $A'BC'$, $AB'C'$, ABC und $A'B'C$ stellen vier Kreise durch den unendlich fernen Punkt der komplexen Zahlenebene dar. Ihnen entsprechen bzw. jene vier mit O inzidenten Kreise $AB'C$, $A'BC$, $A'B'C'$ und ABC'. Demnach ordnet die Transformation δ dem Punkte O den Punkt ∞ zu, und O ist der Mittelpunkt ihres Inversionskreises. Die Verbindungsgerade der beiden gesuchten Fixpunkte z_I, z_{II} hälftet sowohl den Winkel AOA' wie den Winkel BOB'. Spiegelt man A' an ihr nach $\overline{A'}$ so liegen O, A und $\overline{A'}$ in einer Gerade. A und $\overline{A'}$ gehen durch Inversion am Inversionskreise der Transformation auseinander hervor. Dieser Inversionskreis kann jetzt leicht konstruiert werden und schneidet jene Winkelhalbierende o in den Fixpunkten z_I und z_{II}.

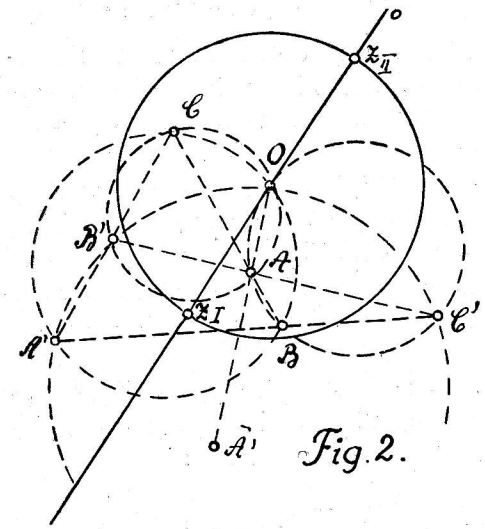

Fig. 2.

2. Die ganze rationale Funktion dritten Grades

$$f(z) = a_0 z^3 + 3a_1 z^2 + 3a_2 z + a_3$$

hat die Hesse'sche Kovariante

$$H(z) = (a_1^2 - a_0 a_2) z^2 + (a_1 a_2 - a_0 a_3) z + (a_2^2 - a_1 a_3)$$

und die Jacobi'sche Kovariante

$$J(z) = (a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3) z^3 + 3(a_0 a_1 a_3 - 2a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2) z^2$$
$$- 3(a_0 a_2 a_3 - 2a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2) z - (a_0 a_3^2 - 3a_1 a_2 a_3 + 2a_2^3).$$

Verlegt man die beiden Nullstellen z_I, z_{II} von $H(z)$ nach $+1$ und -1, so wird $a_0 = a_2$ und $a_1 = a_3 = \sqrt{1+a_0^2}$, und es folgt:

$$f(z) = a_0 z^3 + 3\sqrt{1+a_0^2}\, z^2 + 3a_0 z + \sqrt{1+a_0^2},$$
$$\frac{J(z)}{2} = \sqrt{1+a_0^2}\, z^3 + 3a_0 z^2 + 3\sqrt{1+a_0^2}\, z + a_0.$$

Mit anderen Worten:

„Hat die Hesse'sche Kovariante $H(z)$ einer ganzen rationalen Funktion dritten Grades $f(z)$ zwei voneinander verschiedene Nullstellen z_I, z_{II}, so gehen die drei Nullstellen z_1, z_2, z_3 von $f(z)$ in die drei Nullstellen $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$, $\mathfrak{z}_3$ der Jacobi'schen Kovariante $J(z)$ über durch Inversion am Kreise über der Strecke $z_I z_{II}$ als Durchmesser und durch Spiegelung an diesem Durchmesser“ [2]).

Hieraus und aus den in 1. dargelegten Eigenschaften der Transformation δ folgen leicht die Sätze:

„Die Nullstellendreiecke einer ganzen rationalen Funktion dritten Grades $f(z)$ und ihrer Jacobi'schen Kovariante $J(z)$ haben einen gemeinschaftlichen Umkreis k^2, der jeden Kreis durch die beiden Nullstellen der Hesse'schen Kovariante rechtwinklig schneidet. Jede Nullstelle z_i von $f(z)$ bildet mit den drei Nullstellen von $J(z)$ auf dem Umkreise k^2 einen harmonischen Wurf und liegt mit einer Nullstelle $\mathfrak{z}_i$ von $J(z)$ auf einem Kreise $k_i^2 (i = 1, 2, 3)$ durch die beiden Nullstellen z_I, z_{II} von $H(z)$. Auf diesem Kreise k_i^2 bilden die Punkte z_I, z_{II}, z_i, $\mathfrak{z}_i$ wiederum einen harmonischen Wurf“. (Fig. 3).

Das dem Umkreise k^2 von $z_1 z_2 z_3$ in diesen Punkten umschriebene Dreieck $P_1 P_2 P_3$ hat demzufolge die Eigenschaft, daß die Gerade $P_i z_i$ den Umkreis k^2 in der zugehörigen Nullstelle $\mathfrak{z}_i$ von $J(z)$ schneidet. Die drei Verbindungsstrahlen $z_i \mathfrak{z}_i$ gehen durch ein und denselben Punkt L des Dreiecks (Lemoine'scher Punkt), ihre drei

2) Haenzel, Über ganze rationale Funktionen dritten Grades und ihre Kovarianten. Sitz.-Ber. d. Berl. Math. Ges. XXVII. Jahrgang, 1928. — Bemerkung bei der Korrektur: Herr W. Weber teilte mir zu dieser Abhandlung mit, daß die obigen Sätze in einer (mir unbekannten) Programmschrift: Godt, „Über einige sogenannte merkwürdige Punkte des Dreiecks“ (Lübeck 1903) enthalten sind.

Pole für den Umkreis k^2 sind die Mittelpunkte der drei mit $z_i \mathfrak{z}_i$ inzidenten Kreise k_i^2. Es sind die apollonischen Kreise des Dreiecks $z_1 z_2 z_3$; aus alledem folgt:

„Die apollonischen Kreise des Nullstellendreiecks einer kubischen Funktion schneiden dessen Umkreis in den drei Nullstellen der Jacobi'schen Kovariante und schneiden einander in den beiden Nullstellen der Hesse'schen Kovariante".

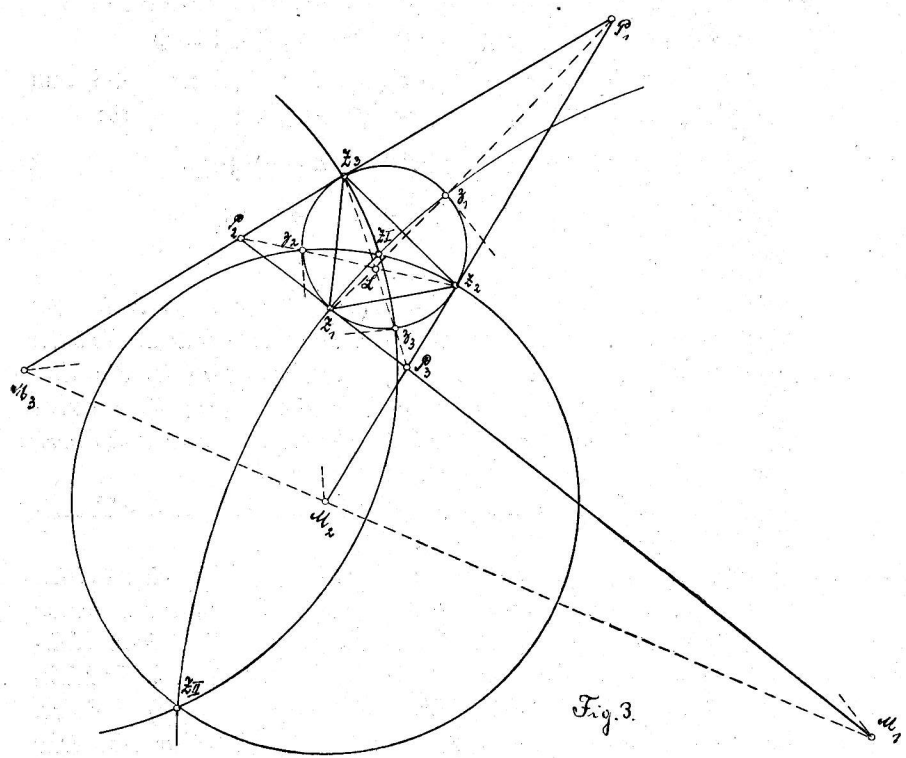

Fig. 3.

Die beiden Nullstellen der Hesse'schen Kovariante fallen demnach mit den isodynamischen Zentren des Nullstellendreiecks von $f(z)$ zusammen.

Der vorliegende Satz ist geeignet die Kovarianten der kubischen Funktion unter alleiniger Benutzung von Geraden, Kreisen und Doppelverhältnissen zu definieren. Auch ergibt sich aus ihm in allereinfachster Weise die von F. Klein herrührende Interpretation der kubischen Formen auf der Kugel [3]).

Bildet man nämlich durch lineare Transformation den Kreis

3) F. Klein, Ges. Mathem. Abhandlg. I. Bd. XXVII, S. 495—497. Erlangen 1872.

k^2 so auf sich ab, daß die Punkte z_{I}, z_{II} in den Mittelpunkt von k^2 und in ∞ übergehen, so bestimmen die sechs Nullstellen $z_1 \mathfrak{z}_2 z_3 \mathfrak{z}_1 z_2 \mathfrak{z}_3$ ein dem Kreise k^2 einbeschriebenes reguläres Sechseck. Eine geeignete stereographische Projektion führt dann stets z_{I} und z_{II} in den Süd- und den Nordpol über und das Sechseck der Nullstellen von f und J in ein dem Äquator einbeschriebenes reguläres Sechseck.

Die Gruppe der Gleichung $f(z) = 0$ (Diedergruppe $n = 3$) besteht bekanntlich aus den drei Transformationen (einschl. der Identität), welche die Nullstellen von f permutieren und aus den drei Transformationen, welche je zwei dieser Nullstellen miteinander vertauschen und die dritte zum Fixpunkte haben. Bei der Darstellung in der komplexen Ebene werden die ersteren durch die drei entsprechenden linearen Abbildungen des Umkreises k^2 auf sich selbst bestimmt. Zu den letzteren gelangt man dadurch, daß man die drei Sehnen $z_i \mathfrak{z}_i$ zieht, die der Umkreis des Nullstellendreiecks in den drei apollonischen Kreisen hervorruft und über diesen drei Sehnen als Durchmesser die drei Kreise konstruiert. Jede Inversion an einem solchen Kreise und die Spiegelung am zugehörigen Durchmesser $z_i \mathfrak{z}_i$ stellt eine Transformation der zweiten Art dar.

3. Die ganze rationale Funktion vierten Grades

$$f(z) = a_0 z^4 + 4 a_1 z^3 + 6 a_2 z^2 + 4 a_3 z + a_4$$

hat bekanntlich eine Kovariante $H(z)$ vom vierten und eine Kovariante $J(z)$ vom sechsten Grade, sowie die Invarianten

$$i = 2(a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2)$$

und

$$k = 6(a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4).$$

Mit Hilfe der Lösungen m_1, m_2, m_3 der kubischen Resolvente $m^3 - \frac{i}{2} m - k = 0$ wird $J(z)$ in bekannter Weise als Produkt dreier quadratischer Faktoren φ, χ, ψ dargestellt:

$$\begin{aligned} H(z) + m_1 f(z) &= -2\varphi^2 \\ H(z) + m_2 f(z) &= -2\chi^2 \qquad J(z) = 2\varphi\chi\psi. \\ H(z) + m_3 f(z) &= -2\psi^2 \end{aligned}$$

Die sechs Nullstellen von $J(z)$ werden dadurch eindeutig in drei Paare $z_{\mathrm{I}} z_{\mathrm{II}}$, $z_{\mathrm{III}} z_{\mathrm{IV}}$, $z_{\mathrm{V}} z_{\mathrm{VI}}$ geordnet, die Nullstellenpaare von φ, χ und ψ. Verlegt man die beiden Nullstellen irgend eines solchen Paares nach $+1$ und -1, so nimmt die zu ihnen gehörige Gleichung:

$$H(z) + m_i f(z) = 0$$

die Form an:

$$z^4 - 2z^2 + 1 = 0,$$

woraus die Beziehungen folgen:

$$a_0 = a_4,\ a_1 = a_3 = \sqrt{a_0(a_0 + 3m_i) - 1},\ a_2 = a_0 + 2m_i.$$

Unter diesen Umständen gehen f und H über in:

$$f(z) = a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_1 z + a_0,$$
$$H(z) = A_0 z^4 + 4A_1 z^3 + 6A_2 z^2 + 4A_1 z + A_0.$$

Daher ist bewiesen:

„*Werden die sechs Nullstellen der Kovariante $J(z)$ durch die Lösungen der kubischen Resolvente in drei Paare geordnet, so gehen sowohl die vier Nullstellen der Funktion $f(z)$ als auch die vier Nullstellen der Kovariante $H(z)$ je paarweise ineinander über durch Inversion an jedem Kreise über der Verbindungsstrecke eines Nullstellenpaares von $J(z)$ als Durchmesser und durch Spiegelung an diesem Durchmesser*“ [4]).

Jede der drei Transformationen hat ein Nullstellenpaar von $J(z)$ zu Fixpunkten und vertauscht sowohl die vier Nullstellen von $f(z)$ paarweise miteinander als auch die vier Nullstellen von $H(z)$. Jede vertauscht die beiden Fixpunkte der beiden übrigen und aus allen dreien resultiert die Identität. Sie sind dabei untereinander vertauschbar und aus je zwei von ihnen resultiert die dritte.

Die dargelegten geometrischen Eigenschaften der Kovarianten gestatten es wiederum aus den vier Nullstellen einer ganzen rationalen Funktion vierten Grades $f(z)$ die sechs Nullstellen ihrer Kovariante $J(z)$ ohne jede Rechnung zu konstruieren:

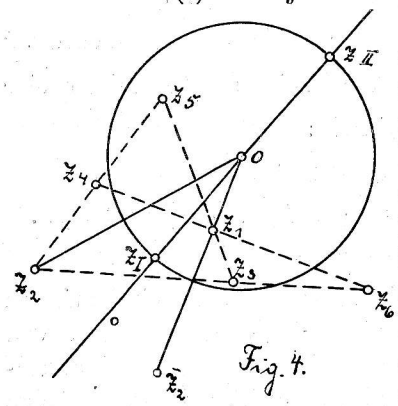

Fig. 4.

Paart man die Nullstellen z_1, z_2, z_3, z_4 von $f(z)$ auf eine der drei möglichen Weisen, etwa z_1 mit z_2 und z_3 mit z_4, so bestimmt diese Paarung das von den Geraden $z_1 z_3$, $z_2 z_4$, $z_1 z_4$, $z_2 z_3$ gebildete Vierseit (Fig. 4). Die Ecken z_5, z_6 sind die Schnittpunkte der Seitenpaare $z_1 z_4$, $z_2 z_3$ und $z_1 z_3$, $z_2 z_4$. Die vier Umkreise der vier Dreiecke $z_1 z_3 z_6$, $z_2 z_3 z_5$, $z_1 z_4 z_5$, $z_2 z_4 z_6$ gehen durch denselben Punkt $O(1)$. Die Winkel-

4) Haenzel, Über ganze rationale Funktionen vierten Grades und ihre Kovarianten. Jahresbericht d. Dtsch. Mathem. Vereinigung, 1929.

halbierende o des Winkels $z_1 O z_2$ halbiert auch den Winkel $z_3 O z_4$. Spiegelt man z_2 und z_4 an o nach $\bar{z}_2$ und $\bar{z}_4$, so liegen $O z_1 \bar{z}_2$ und $O z_3 \bar{z}_4$ je in einer Gerade und der Inversionskreis der Paarung $z_1 \bar{z}_2$ und $z_3 \bar{z}_4$ schneidet o in zwei Nullstellen der Kovariante $J(z)(1)$. Die beiden anderen Paarungen der vier Nullstellen von $f(z)$ liefern mit Hilfe gleicher Konstruktionen die übrigen vier Nullstellen von $J(z)$ [5]).

Konstruiert man andererseits bei irgend einer Paarung der vier Nullstellen von $f(z)$ die beiden Kreise über den beiden Verbindungsstrecken jener Paare als Durchmesser, so gehen die zu der Paarung gehörigen beiden Nullstellen von $J(z)$ ineinander über durch Inversion am Kreise und Spiegelung am Durchmesser des ersten Paares ebenso wie am Kreise und Durchmesser des zweiten Paares.

Soll die Invariante i einer ganzen rationalen Funktion vierten Grades den Wert Null annehmen, so bestimmen drei ihrer Nullstellen eine ganze rationale Funktion dritten Grades, deren Hessesche Kovariante die vierte Nullstelle zur Nullstelle hat. Soll dagegen die Invariante k verschwinden, so fällt eine Nullstelle der Jacobi'schen Kovariante jener kubischen Funktion mit der vierten Nullstelle zusammen. Die geometrische Bedingung für den ersten Fall ist also die, daß drei der vier Nullstellen ein Dreieck bilden, dessen appollonische Kreise einander in der vierten Nullstelle schneiden, während im zweiten Falle die Nullstellen vier harmonische Punkte eines Kreises sind.

4. Zu der ganzen rationalen Funktion fünften Grades

$$f(z) = a_0 z^5 + 5a_1 z^4 + 10a_2 z^3 + 10a_3 z^2 + 5a_4 z + a_5$$

gehören außer 18 verschiedenen Kovarianten vom ersten bis neunten Grade vier Fundamentalinvarianten J_4, J_8, J_{12}, J_{18} die bzgl. der Koeffizienten von $f(z)$ vom vierten, achten, zwölften und achtzehnten Grade sind. Bezeichnet man mit α, β, γ die drei Lösungen von

5) Der Zusammenhang zwischen den Nullstellen der Funktion $f(z)$ und denen ihrer Kovariante $J(z)$ läßt sich noch auf folgende Weise geometrisch darstellen: Jede Seite des vollständigen Nullstellenvierecks wird in jeder ihrer beiden Nullstellen von je einer gleichseitigen Hyperbel berührt. Die vier je zwei Gegenseiten berührenden gleichseitigen Hyperbeln sind konzentrisch und schneiden einander in zwei Nullstellen der Kovariante $J(z)$. Zu jeder Paarung der vier Nullstellen von $f(z)$ gehört ein Büschel gleichseitiger konzentrischer Hyperbeln, die den oben konstruierten Punkt O zum Mittelpunkt haben. Jede Verbindungsstrecke eines Nullstellenpaares wird von den Hyperbeln des Büschels in den Punktepaaren einer Involution geschnitten und von zwei Hyperbeln in ihren beiden Nullstellen berührt.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix} = 0$$

und setzt

$$p = \frac{a_0\beta\gamma - a_1(\beta+\gamma)+a_2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}, \quad q = \frac{a_0\alpha\gamma - a_1(\alpha+\gamma)+a_2}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)},$$

$$r = \frac{a_0\alpha\beta - a_1(\alpha+\beta)+a_2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)},$$

sowie

$$l = \frac{p}{(\gamma-\beta)^5}, \quad m = \frac{q}{(\alpha-\gamma)^5}, \quad n = \frac{r}{(\alpha-\beta)^5},$$

so stellen sich die vier Fundamentalinvarianten in der Form dar:

$$\begin{aligned} J_4 &= (lm+ln+mn)^2 - 4lmn(l+m+n) \\ J_8 &= l^2m^2n^2(lm+ln+mn) \\ J_{12} &= l^4m^4n^4 \\ J_{18} &= 4l^5m^5n^5(l-m)(l-n)(m-n). \end{aligned}$$

Unter ihnen ist die sogenannte Hermite'sche[6]) Invariante J_{18} dadurch von Bedeutung, daß für $J_{18} = 0$ die Lösung der Gleichung $f(z) = 0$ in algebraischer Form durch das Wurzelzeichen möglich ist. Auf algebraischem Wege zeigt sich[7]), daß für $J_{18} = 0$ die eine Wurzel z_5 von $f(z) = 0$ eine Sonderstellung einnimmt. Bildet man nämlich eine ganze rationale Funktion vierten Grades $f_4(z)$, welche die vier übrigen Wurzeln von $f(z) = 0$ zu Nullstellen hat, so fällt z_5 stets mit einer Nullstelle der zu $f_4(z)$ gehörigen Kovariante sechsten Grades zusammen. Mit anderen Worten: Für $J_{18} = 0$ kann man auf eine einzige Art vier der fünf Nullstellen so paaren, daß die dadurch bestimmte Transformation von der Form δ (1) die fünfte Nullstelle zum Fixpunkte hat. Die Hermite'sche Invariante verschwindet umgekehrt stets sobald diese Bedingung erfüllt ist und $f(z) = 0$ ist dann durch Wurzelziehen lösbar. Für $J_{18} = 0$ müssen daher die fünf Nullstellen der Funktion einer geometrischen Bedingung unterliegen, die aus den früheren Resultaten nunmehr leicht gewonnen wird.

Es sei (Fig. 5) z_5 die als Fixpunkt der Transformation δ isolierte Nullstelle, $z_1 z_2$ und $z_3 z_4$ die durch δ bewirkte Paarung der

6) Hermite, Cambr. and Dublin Math. Journal, Bd. 9.

7) Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, S. 355, Leipzig 1872.

übrigen vier Nullstellen. Dann enthält der Umkreis k^2 des Dreiecks $z_1 z_2 z_5$ auch den zweiten Fixpunkt z_5' von δ (1). Ist $M_{1,2}$ der Pol der Dreieckseite $z_1 z_2$ für den Umkreis k^2, so schneidet die Gerade $M_{1,2} z_5$ auf k^2 den zweiten Fixpunkt z_5' aus, und der Kreis über $z_5 z_5'$ als Durchmesser ordnet sowohl z_1 und z_2 als auch z_3 und z_4 mittels Inversion und Spiegelung an $z_5 z_5'$ einander zu.

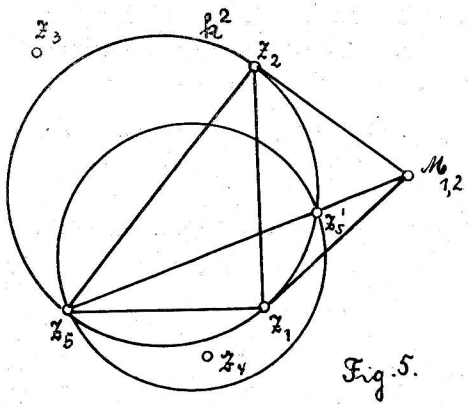

Fig. 5.

Die Aufgabe, zu vier gegebenen Nullstellen z_1, z_2, z_3, z_4 eine fünfte z_5 so zu bestimmen, daß die Hermite'sche Invariante der zugehörigen Funktionen $f(z)$ fünften Grades den Wert Null annimmt, findet deshalb folgende konstruktive Lösungen:

Die vier gegebenen Punkte bestimmen ∞^1 rationale Funktionen vierten Grades. Die sechs Nullstellen der zugehörigen Kovariante $J(z)$ lassen sich nach 3. konstruieren. Jede dieser sechs Nullstellen bildet mit z_1, z_2, z_3, z_4 die Nullstellen von ganzen rationalen Funktionen fünften Grades, deren Hermite'sche Invariante verschwindet und ist also eine Lösung der Aufgabe. Die übrigen Lösungen erhält man, wenn man z_5 so bestimmt, daß es mit drei von den gegebenen Punkten das Nullstellenquadrupel ganzer rationaler Funktionen vierten Grades bildet, deren Kovarianten $J(z)$ den vierten gegebenen Punkt zur Nullstelle haben. Dazu sind die Umkreise der vier durch z_1, z_2, z_3, z_4 bestimmten Dreiecke zu konstruieren. In jedem Dreieck, z. B. in $z_1 z_2 z_3$, verbindet man (Fig. 6) den Pol einer Dreieckseite $z_2 z_3$ für den Umkreis mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte z_1. Der Schnittpunkt S dieser Verbindungsgerade mit dem Umkreise bestimmt den Durchmesser $z_1 S$ eines Kreises; durch Inversion an diesem Kreise und durch Spiegelung am Durchmesser $z_1 S$ geht die vierte Nullstelle z_4 in den gesuchten Punkt z_5 über. Führt man die Konstruktion

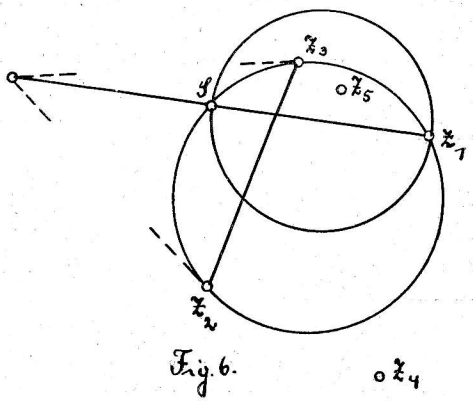

Fig. 6.

in sämtlichen vier Dreiecken an allen Dreieckseiten durch, so ergeben sich die übrigen Lösungen der Aufgabe. Insgesamt erfüllen also 18 Punkte mit den vier gegebenen die verlangte Bedingung.

5. Das System der Kovarianten und Invarianten einer ganzen rationalen Funktion sechsten Grades

$$f(z) = a_0 z^6 + 6 a_1 z^5 + 15 a_2 z^4 + 20 a_3 z^3 + 15 a_4 z^2 + 6 a_5 z + a_6$$

enthält unter anderem die biquadratische Kovariante

$$C_4 = (a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2) z^4 + (2 a_0 a_5 - 6 a_1 a_4 + 4 a_2 a_3) z^3 + (a_0 a_6 - 9 a_2 a_4 + 8 a_3^2) z^2 - (2 a_1 a_6 - 6 a_2 a_5 + 4 a_3 a_4) z + (a_2 a_6 - 4 a_3 a_5 + 3 a_4^2)$$ [8].

Es sei

$$J_2 = a_0 a_6 - 6 a_1 a_5 + 15 a_2 a_4 - 10 a_3^2$$

die bzgl. der Koeffizienten a_i quadratische Invariante, sowie C_{12} die hinsichtlich der a_i kubische Kovariante zwölften Grades von $f(z)$. Dann stellt das identische Verschwinden der Kovariante C_4 die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, daß $f(z)$ die Kovariante sechsten Grades einer biquadratischen Funktion ist[9] (3). Unter diesen Umständen zerfällt $f(z)$ (abgesehen von einem konstanten Faktor) in die drei quadratischen Faktoren, die man aus $\sqrt{\sqrt[3]{C_{12} + \frac{1}{6} f^2 \sqrt{-J_2}} + \varepsilon \sqrt[3]{C_{12} - \frac{1}{6} f^2 \sqrt{-J_2}} \cdots W}$ erhält, wenn man für ε die drei dritten Wurzeln der Einheit setzt[10]. Im Anschluß an die vorhergehenden Nummern entsteht daher die Aufgabe, die geometrische Bedingung für das Verschwinden der Kovariante C_4 und für die damit verbundene Auflösbarkeit von $f(z) = 0$ durch den obigen Wurzelausdruck W zu bestimmen.

Ist $f(z)$ die Kovariante sechsten Grades einer biquadratischen Funktion, so gibt es drei Transformationen von der Form δ (1), welche die vier Nullstellen dieser biquadratischen Funktion paarweise miteinander vertauschen. Jede der drei Transformationen hat ein Nullstellenpaar von $f(z)$ zu Fixpunkten und vertauscht die beiden Nullstellen der beiden übrigen Paare (3). Daraus und aus den Eigenschaften der Transformation δ wird leicht gefolgert (Fig. 7):

„Verschwindet die biquadratische Kovariante C_4 einer ganzen rationalen Funktion sechsten Grades $f(z)$ und ist infolgedessen die Gleichung $f(z) = 0$ durch den Wurzelausdruck W auflösbar, so bilden die sechs Nullstellen von $f(z)$ die drei Schnittpunktepaare dreier einander senkrecht schneidender Kreise. Auf jedem Kreise bilden vier der Nullstellen einen harmonischen Wurf, die beiden übrigen sind inverse Punkte des Kreises“.

8) Faà de Bruno, Théorie des Formes binaires, Nr. 141, 167, Turin 1876.
9) Clebsch, a. a. O. S. 283 ff.
10) Clebsch, a. a. O. S. 451.

Die Mittelpunkte der drei Kreise bestimmen das Dreieck I II III. Die Verbindungsgerade der beiden Nullstellen eines Nullstellenpaares ist eine Höhe des Dreiecks I II III und der Fußpunkt der Höhe halbiert die Verbindungsstrecke. Die sechs Nullstellen von $f(z)$ liegen daher paarweise auf drei durch denselben Punkt gehenden Geraden und es folgt:

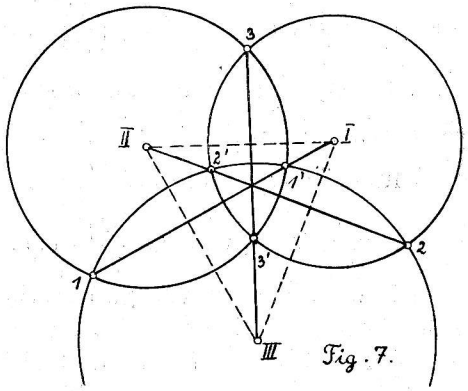

Fig. 7.

„Die Nullstellen ganzer rationaler Funktionen sechsten Grades mit verschwindender Kovariante C_4 sind die Ecken von Brianchonschen Sechsseiten“.

Wird einer der Kreise, z. B. der Kreis durch $2, 2', 3, 3'$ mit dem Mittelpunkte I so auf sich abgebildet, daß 1 und 1′ bzw. in I und ∞ übergehen, so bilden die vier Punkte $2, 2', 3, 3'$ die Scheitel zweier aufeinander senkrechter Durchmesser. Bei geeigneter stereographischer Projektion auf die Kugel entsprechen alsdann den sechs Punkten $1, 1', 2, 2', 3, 3'$ der Nord- und der Südpol der Kugel sowie vier äquidistante Punkte ihres Äquators. Wir erhalten auf diese Weise die von F. Klein herrührende Interpretation der mit der Diëdergruppe $n = 4$ verknüpften Formen. Hier wie in Nr. 2 folgen diese Interpretationen aus Spezialfällen der vorstehend entwickelten Sätze.

II. Über die Polarfunktionen ganzer rationaler Funktionen.

1. Es sei

$$f(z) = a_0 z^n + \binom{n}{1} a_1 z^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n$$

die ganze rationale Funktion n-ten Grades und es werde mit $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}z}$ folgende an der Funktion $f(z)$ auszuführende Operation bezeichnet.

Man bildet $\frac{d\left(z^n f\left(\frac{1}{z}\right)\right)}{dz} \equiv \Delta_f(z)$ und hieraus $z^{n-1} \Delta_f\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \frac{\mathfrak{d}f}{\mathfrak{d}z}$, sodaß

unter dem Symbol $\frac{\mathfrak{d}f}{\mathfrak{d}z}$ diejenige Funktion zu verstehen ist, die aus $f(z)$ durch folgende Operationen hervorgeht: In $f(z)$ ist z durch $\frac{1}{z}$ zu ersetzen, alsdann ist $f\left(\frac{1}{z}\right)$ mit z^n zu multiplizieren und nach z abzuleiten, danach wiederum z durch $\frac{1}{z}$ zu ersetzen und schließlich mit z^{n-1} zu multiplizieren.

Unterwirft man die erhaltene Funktion $\frac{\mathfrak{d}f}{\mathfrak{d}z}$ denselben Operationen, so gelangt man zu $\frac{\mathfrak{d}^2 f}{\mathfrak{d}z^2}$ u. s. f.

Die n-Nullstellen von $f(z)$ bestimmen ein vollständiges n-Eck in der komplexen Zahlenebene, das vollständige Nullstellenpolygon von $f(z)$. Nach dem Satz von Schicht[11]) hat die erste Polare der unendlich fernen Geraden in bezug auf das vollständige Nullstellenpolygon die $n-1$ Nullstellen der ersten Ableitung der Funktion zu reellen Brennpunkten. Daher gelangt man von den n-Nullstellen von $f(z)$ auch auf folgendem Wege zu den $n-1$ Nullstellen von $\frac{\mathfrak{d}f}{\mathfrak{d}z}$: Die n-Nullstellen von $f(z)$ sind am Einheitskreise und an der reellen Achse zu spiegeln. In bezug auf das dann erhaltene n-Eck ist die erste Polare der unendlich fernen Geraden zu bestimmen. Die $n-1$ reellen Brennpunkte dieser algebraischen Kurve $(n-1)$ter Klasse werden alsdann am Einheitskreise und an der reellen Achse in die Nullstellen von $\frac{\mathfrak{d}f}{\mathfrak{d}z}$ gespiegelt.

Mit Hilfe der Operationen $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}z}$ und mittels einer neuen komplexen Variablen w sowie der gewöhnlichen Ableitung $\frac{df}{dz}$ lassen sich nun aus $f(z)$ folgende $n-1$ algebraische Formen herleiten:

$$\Pi_1 = \frac{1}{n}\left[w\frac{df}{dz} + \frac{\mathfrak{d}f}{\mathfrak{d}z}\right]$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{n-1}\left[w\frac{d\Pi_1}{dz} + \frac{\mathfrak{d}\Pi}{\mathfrak{d}z}\right]$$

$$= \frac{1}{n(n-1)}\left[w^2\frac{d^2 f}{dz^2} + w\left(\frac{d\frac{\mathfrak{d}\Pi_1}{\mathfrak{d}z}}{dz} + \frac{\mathfrak{d}\frac{d\Pi_1}{dz}}{\mathfrak{d}z}\right) + \frac{\mathfrak{d}^2 f}{\mathfrak{d}z^2}\right]$$

dabei ist

11) Haenzel, Ein neuer Satz über die Nullstellen ganzer rationaler Funktionen, Sitz.-Ber. d. Berl. Math. Ges. XXVII. — Siehe Anm. 12 auf S. 45.

$$\frac{d\frac{\mathfrak{d}\Pi_1}{\mathfrak{d}z}}{dz} = \frac{\mathfrak{d}\frac{d\Pi_1}{dz}}{\mathfrak{d}z}$$

$$\Pi_3 = \frac{1}{n-2}\left[w\frac{d\Pi_2}{dz} + \frac{\mathfrak{d}\Pi_2}{\mathfrak{d}z}\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Pi_{n-1} = \left[w\frac{d\Pi_{n-2}}{dz} + \frac{\mathfrak{d}\Pi_{n-2}}{\mathfrak{d}z}\right].$$

Die $n-1$ algebraischen Gleichungen $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0, \ldots \Pi_\nu = 0, \ldots \Pi_{n-1} = 0$ sind in dieser Reihenfolge von fallendem Grade in z, von steigendem in w. Sie bestimmen ebensoviele algebraische Funktionen $w_1(z), w_2(z), \ldots w_\nu(z), \ldots w_{n-1}(z)$, welche im folgenden als „Polarfunktionen" der ganzen rationalen Funktionen $f(z)$ bezeichnet werden.

2. In der Gleichung $\Pi_\nu = 0$ ist der Koeffizient der höchsten Potenz in w die νte Ableitung der Ausgangsfunktion $f(z)$ nach z. Daher gilt der Satz:

„Die Pole der Polarfunktionen $w_1(z), w_2(z), \ldots w_\nu(z), \ldots w_{n-1}(z)$ einer ganzen rationalen Funktion $f(z)$ sind bzw. die Nullstellen der Ableitung $f'(z), f''(z), \ldots f^{(\nu)}(z), \ldots f^{(n-1)}(z)$ von $f(z)$".

Mit anderen Worten:

„Die Pole der ersten, zweiten, dritten ... Polarfunktion einer ganzen rationalen Funktion $f(z)$ liegen auf den reellen Brennpunkten der ersten, zweiten, dritten ... Polare der unendlich fernen Gerade in bezug auf das Nullstellenpolygon von $f(z)$".

Aus $\Pi_1 = 0$ folgt als erste Polarfunktion

$$w_1 = -\frac{\frac{\mathfrak{d}f}{\mathfrak{d}z}}{\frac{df}{dz}}.$$

Für ihre Nullstellen ergibt sich der Satz:

„Spiegelt man die n-Nullstellen einer ganzen rationalen Funktion am Einheitskreise und an der reellen Achse und bestimmt für das dadurch erhaltene n-Eck die erste Polare der unendlich fernen Geraden, so gehen die $n-1$ Brennpunkte dieser Kurve durch Spiegelung an der reellen Achse und am Einheitskreise in die Nullstellen der ersten Polarfunktion über".

Die zweite Polarfunktion ist:

$$w_2 = \frac{-\dfrac{d\dfrac{\mathfrak{d}\Pi_1}{\mathfrak{d}z}}{dz} \pm \sqrt{\left(\dfrac{d\dfrac{\mathfrak{d}\Pi_1}{\mathfrak{d}z}}{dz}\right)^2 - \dfrac{d^2 f}{dz^2}\cdot\dfrac{\mathfrak{d}^2 f}{\mathfrak{d}z^2}}}{\dfrac{d^2 f}{dz^2}}.$$

Ist einerseits

$$f(z) = a_0 z^n + \binom{n}{1} a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

andererseits

$$f(x_1 x_2) = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_n x_2^n$$

so stimmen hinsichtlich ihrer Koeffizienten völlig überein: $\dfrac{d^2 f}{dz^2}$ mit $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$, ebenso $\dfrac{\mathfrak{d}^2 f}{\mathfrak{d}z^2}$ mit $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ und $\dfrac{d\dfrac{\mathfrak{d}\Pi_1}{\mathfrak{d}z}}{dz}$ mit $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$. Daher haben die Diskriminante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d\dfrac{\mathfrak{d}\Pi_1}{\mathfrak{d}z}}{dz} & \dfrac{d^2 f}{dz^2} \\ \dfrac{\mathfrak{d}^2 f}{\mathfrak{d}z^2} & \dfrac{d\dfrac{\mathfrak{d}\Pi_1}{\mathfrak{d}z}}{dz} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \end{vmatrix}$$

der zweiten Polarfunktion von $f(z)$ und die Hesse'sche Form von $f(x_1 x_2)$ dieselben entsprechenden Koeffizienten. Mit anderen Worten:

„Die Verzweigungspunkte der zweiten Polarfunktion einer ganzen rationalen Funktion $f(z)$ liegen in den Nullstellen der Hesse'schen Kovariante von $f(z)$".

3. Die kubische Funktion

$$f(z) = a_0 z^3 + 3 a_1 z^2 + 3 a_2 z + a_3$$

hat die erste Polarfunktion

$$w = -\frac{a_1 z^2 + 2 a_2 z + a_3}{a_0 z^2 + 2 a_1 z + a_2}$$

ihre Nullstellen gehen durch $z' = \dfrac{1}{z}$ aus den Brennpunkten derjenigen Ellipsen hervor, die das aus dem Nullstellendreieck von $f(z)$ durch $z' = \dfrac{1}{z}$ hervorgehende Dreieck in seinen Seitenmitten

berührt; ihre Pole dagegen sind die Brennpunkte der Ellipse, die das Nullstellendreieck selbst in den Seitenmitten berührt. Die zweite Polarfunktion ist

$$w = \frac{-(a_1 z + a_2) \pm \sqrt{H(z)}}{a_0 z + a_1},$$

wo $H(z)$ die Hesse'sche Kovariante der kubischen Funktion darstellt. Die zweite Polarfunktion hat daher den Schwerpunkt des Nullstellendreiecks zum Pol und seine isodynamischen Zentren (I, 2) zu Verzweigungspunkten. Die durch sie als Fixpunkte bestimmte involutorische Transformation δ (I, 1) vertauscht die Nullstellen der kubischen Funktion mit den Nullstellen ihrer Jacobischen Kovariante (I, 2).

Die erste und zweite Polarfunktion einer biquadratischen Funktion sind:

$$w = -\frac{a_1 z^3 + 3 a_2 z^2 + 3 a_3 z + a_4}{a_0 z^3 + 3 a_1 z^2 + 3 a_2 z + a_3}$$

und

$$w = \frac{-(a_2 z^3 + 2 a_3 z + a_4) \pm \sqrt{H(z)}}{a_0 z^2 + 2 a_1 z + a_2}.$$

Jede involutorische Transformation, welche die Nullstellen der biquadratischen Funktion untereinander vertauscht, vertauscht auch die Verzweigungspunkte ihrer zweiten Polarfunktion (I, 3) u. s. f.

12) Zu der in Anm. 11 genannten Abhandlung teile ich nachträglich mit, daß ein ähnliches Theorem wie der Satz des Herrn Schicht bereits von van den Berg aufgestellt wurde, (Nieuw Archief voor Wiskunde, Deel XV, 1888, S. 140) und daß beide Sätze in speziellen Fällen übereinstimmen.