

# Über die charakteristischen Involutionen der nicht-euklidischen Bewegungen.

Von Gerhard Haenzel, Berlin.

1. Die Theorie der Involutionen hat eine bemerkenswerte Erweiterung dadurch erfahren, daß Herr Jolles<sup>1)</sup> eine vollständige und organische Theorie aller Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz aufgestellt hat. Die Grundlage für diese Theorie wird durch die einfache Erkenntnis gewonnen, daß die  $\infty^2$  Paare einander zugeordneter Strahlen einer Involution auf einer linearen Strahlenkongruenz aus reziproken Polaren eines polaren Raumes bestehen, eine Definition, die für alle reellen und imaginären Vorkommnisse in gleicher Weise tragfähig bleibt.

Paart ein polarer Raum die Strahlen einer linearen Kongruenz involutorisch, indem er sie als reziproke Polaren einander zuweist, so liegt seine [reelle oder imaginäre<sup>2)</sup>] Inzidenzfläche entweder einschichtig in der linearen Kongruenz (primärer polarer Raum) oder sie trägt zwei involutorische Regelscharen des geschart involutorischen Raumes der Kongruenz (sekundärer polarer Raum). Die Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz teilen sich daher in zwei Klassen, die „primären“ und die „sekundären“ Involutionen. Jede der beiden Klassen wird mit Hilfe der sie bestimmenden polaren Räume eingehend untersucht, wobei wieder die hyperbolischen, parabolischen und elliptischen Kongruenzen in gleicher Weise Berücksichtigung finden.

Im folgenden soll die Bedeutung der Theorie involutorischer linearer Strahlenkongruenzen für die Bewegungen im nicht-euklidischen Raume untersucht werden.

2. Eine allgemeine Kollineation hat die drei Paare (reeller, zusammenfallender oder konjugiert imaginärer) Gegenkanten ihres Decktetraeders zu Doppelstrahlen. Mindestens zwei Gegenkanten sind immer reell. Führt eine Kollineation eine Fläche zweiter Ordnung  $F^2$  so in sich über, daß die (reelle oder imaginäre) Regelschar und Leitchar der Fläche je in sich übergehen, so nennen wir sie eine positive Hermite'sche Kollineation. Sie bestimmt auf beiden Regel-

<sup>1)</sup> Herr Jolles, „Die Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz“, Mathem. Zeitschrift, Bd. 27, 1927.

<sup>2)</sup> Imaginäre Fläche zweiter Ordnung mit reellem Polarsystem.

scharen je zwei kollokale projektive Regelscharen zweiter Ordnung. Werden etwa die Regelstrahlen durch einen Parameter  $\lambda$ , die Leitstrahlen durch einen Parameter  $\mu$  individualisiert, so sind ihre projektiven Beziehungen dargestellt durch:

$$\begin{aligned} a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d &= 0, & ad - bc &\neq 0 \\ e\mu\mu' + f\mu + g\mu' + h &= 0, & eh - fg &\neq 0 \end{aligned}$$

Die Doppelstrahlen der beiden kollokalen projektiven Regelscharen und der beiden kollokalen projektiven Leitscharen sind bei den Strahlenflächen und den imaginären Flächen zweiter Ordnung<sup>2)</sup> je zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) windschiefe Regelstrahlen und Leitstrahlen. Bei den reellen strahlenlosen Flächen sind je ein solcher Leitstrahl und ein solcher mit ihm inzidenter Regelstrahl zwei konjugiert imaginäre Geraden erster Art. Sie bilden ein windschiefes Raumvierseit und bestimmen ein Tangentialtetraeder der Fläche  $F^2$ , das Decktetraeder der Kollineation. Für dieses als Koordinatentetraeder ist die Gleichung der Fläche  $F^2$ :

I. ....  $x_1 x_4 - k \cdot x_2 x_3 = 0,$

wo  $k$  eine von der Wahl des Einheitpunktes abhängige Konstante darstellt. Die positive Hermitesche Kollineation ist wiedergegeben durch:

II. ....  $\rho x_1' = c_{11} x_1, \rho x_2' = c_{22} x_2, \rho x_3' = c_{33} x_3, \rho x_4' = c_{44} x_4$

mit den Nebenbedingungen:

$$c_{11} \cdot c_{22} \cdot c_{33} \cdot c_{44} \neq 0, \quad c_{11} \cdot c_{33} - c_{22} \cdot c_{44} = 0.$$

Das von den vier Doppelstrahlen  $q: x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, r: x_3 = 0, x_4 = 0; s: x_1 = 0, x_3 = 0; t: x_2 = 0, x_4 = 0$  gebildete Raumvierseit  $qrst$  ist Basisvierseit eines  $F^2$ -Büschels  $F^2_{qrst}$ . Mit Hilfe eines Parameters  $K$  läßt der Büschel sich darstellen durch:

III. ....  $x_1 x_4 - K \cdot x_2 x_3 = 0.$

Alle Flächen dieses  $F^2$ -Büschels gehen durch die Hermitesche Kollineation II. in sich über.

3. Ist die durch I. dargestellte Fläche  $F^2$  eine reelle Strahlenfläche oder ist sie imaginär<sup>2)</sup>, so sind die Gegenkantenpaare des Tangentialtetraeders die (reellen oder konjugiert imaginären) Regelstrahlen  $q, r$ ; die (reellen oder konjugiert imaginären) Leitstrahlen  $s, t$  und die stets reellen reziproken Polaren  $u, v$ . Die drei linearen Kongruenzen  $C^2_r, C^2_t, C^2_v$  mit den Leitgeradenpaaren  $qr, st, uv$  gehen

durch die Hermitesche Kollineation II. in sich über. Sind  $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$  die bekannten homogenen Linienkoordinaten, so sind die Kongruenzstrahlen von  $C^2_r, C^2_t, C^2_v$  bzw. charakterisiert durch:

$$\text{IV. .... } \begin{cases} C^2_r: & p_{12} = 0, \quad p_{34} = 0 \\ C^2_t: & p_{13} = 0, \quad p_{24} = 0 \\ C^2_v: & p_{14} = 0, \quad p_{23} = 0 \end{cases}$$

Die drei linearen Kongruenzen bestimmen drei geschart involutorische Räume  $\Sigma_{qr}, \Sigma_{st}, \Sigma_{uv}$  je als deren Deckstrahlenkongruenz. Die zugehörigen geschart involutorischen Kollineationen führen bei der getroffenen Wahl des Koordinatentetraeders auf die Substitutionsformeln:

$$\text{V. .... } \begin{cases} \Sigma_{qr}: & \rho x_1' = x_1, \quad \rho x_2' = x_2, \quad \rho x_3' = -x_3, \quad \rho x_4' = -x_4 \\ \Sigma_{st}: & \rho x_1' = x_1, \quad \rho x_2' = -x_2, \quad \rho x_3' = x_3, \quad \rho x_4' = -x_4 \\ \Sigma_{uv}: & \rho x_1' = x_1, \quad \rho x_2' = -x_2, \quad \rho x_3' = -x_3, \quad \rho x_4' = x_4 \end{cases}$$

Es ist bekannt, das diese drei geschart involutorischen Kollineationen untereinander vertauschbar sind, daß aus je zweien von ihnen die dritte resultiert und aus allen dreien die Identität.

Die drei  $F^2$ -Büschel  $F^2_{stuv}, F^2_{gruv}, F^2_{qrst}$  mit den Basisvierseiten  $stuv, qr uv, qr st$  geben mittels des Parameters  $K$  Anlaß zu den Gleichungen:

$$\text{VI. .... } \begin{cases} F^2_{stuv}: & x_1 x_2 - K \cdot x_3 x_4 = 0 \\ F^2_{gruv}: & x_1 x_3 - K \cdot x_2 x_4 = 0 \\ F^2_{qrst}: & x_1 x_4 - K \cdot x_2 x_3 = 0 \end{cases}$$

Jede gegebene Fläche des  $F^2$ -Büschels  $F^2_{stuv}$  liegt mit ihrer Regelschar in der linearen Kongruenz  $C^2_t$ , mit der andern in der linearen Kongruenz  $C^2_v$ ; ihre Regelstrahlen ebensowohl wie ihre Leitstrahlen werden durch die Kollineation des geschart involutorischen Raumes  $\Sigma_{qr}$  der linearen Kongruenz  $C^2_r$  (IV. und V.) involutorisch gepaart. Entsprechendes gilt von den beiden übrigen  $F^2$ -Büscheln: Jede Fläche irgend eines  $F^2$ -Büschels liegt je einscharig in den beiden linearen Kongruenzen, deren Leitgeradenpaare das Basisvierseit des  $F^2$ -Büschels bilden; durch die geschart involutorische Kollineation der dritten linearen Kongruenz werden die Regelstrahlen und die Leitstrahlen der Fläche je involutorisch gepaart.

Die polaren Räume der Flächen des  $F^2$ -Büschels  $F^2_{stuv}$  paaren infolgedessen ihrerseits die  $\infty^2$  Kongruenzstrahlen von  $C^a_r$  involutorisch, indem sie je zwei Strahlen von  $C^a_r$  als reziproke Polaren in bezug auf alle Flächen des Büschels einander zuweisen. Desgleichen sind die  $\infty^2$  Strahlen der Kongruenz  $C^a_r$  paarweise reziproke Polaren für die  $\infty^1$  Flächen des  $F^2$ -Büschels  $F^2_{gruv}$  und die Kongruenzstrahlen von  $C^a_v$  paarweise reziproke Polaren für die  $\infty^1$  Flächen des Büschels  $F^2_{qrst}$ . Diese auf den linearen Kongruenzen  $C^a_r, C^a_t, C^a_v$  durch die  $F^2$ -Büschel  $F^2_{stuv}, F^2_{gruv}, F^2_{qrst}$  hervorgerufenen involutorischen Paarungen heißen nach Herrn Jolles (1) sekundäre Involutionen auf diesen Kongruenzen. Zusammenfassend gilt daher:

„Drei lineare Strahlenkongruenzen  $C^a_r, C^a_t, C^a_v$ , deren Leitgeradenpaare die (reellen oder konjugiert imaginären) Gegenkantenpaare eines Tetraeders sind, bestimmen einerseits die drei geschart involutorischen Räume  $\Sigma_{qr}, \Sigma_{st}, \Sigma_{uv}$  als deren Deckstrahlenkongruenzen, andererseits die drei  $F^2$ -Büschel  $F^2_{stuv}, F^2_{gruv}, F^2_{qrst}$  mit den Basisseiten  $stuv, gruv, qrst$ . Die  $\infty^1$  Flächen jedes der drei  $F^2$ -Büschel werden je durch die geschart involutorische Kollineation der zugehörigen linearen Kongruenz beidscharig involutorisch gepaart und bedingen ihrerseits auf dieser Kongruenz eine sekundäre Involution<sup>3)</sup>: Konjugierte Strahlen der sekundären Involution sind reziproke Polaren für alle Flächen des  $F^2$ -Büschels. Jeder der drei geschart involutorischen Räume hat die Strahlen der einen Kongruenz zu Deckstrahlen. Er ordnet in den beiden andern linearen Kongruenzen je zwei Strahlen einander zu, die auch reziproke Polaren für die  $\infty^1$  Flächen des je zugehörigen  $F^2$ -Büschels sind, d. h. er bestimmt auf ihnen dieselben sekundären Involutionen wie jene  $F^2$ -Büschel.“

Eine Kollineation, die das Tetraeder mit den Gegenkantenpaaren  $qr, st, uv$  zum Decktetraeder hat, führt die drei sekundären Involutionen auf den linearen Kongruenzen  $C^a_r, C^a_t, C^a_v$  in sich über. Umgekehrt gibt es nur eine Kollineation, die eine (und darum jede) der drei sekundären Involutionen invariant läßt und zwei gegebene Punkte oder Ebenen des Raumes einander zuweist. Diese sekundären Involutionen heißen deshalb die charakteristischen Involutionen der Kollineation.

4. Ist die durch I. dargestellte Fläche  $F^2$  eine reelle strahllose Fläche, so wird der  $F^2$ -Büschel  $F^2_{qrst}$

$$x_1 x_4 - K \cdot x_2 x_3 = 0$$

von  $\infty^1$  reellen strahllosen Flächen erfüllt. Der geschart involutorische Raum  $\Sigma_{uv}$

$$\rho x'_1 = x_1, \quad \rho x'_2 = -x_2, \quad \rho x'_3 = -x_3, \quad \rho x'_4 = x_4$$

<sup>3)</sup> Herr Jolles, „Die windschief involutorischen Paarungen in einer linearen Strahlenkongruenz“, Mathem. Zeitschrift, Bd. 13, 1922, Nr. 21.

hat die hyperbolische Deckstrahlenkongruenz  $C^a_v$ . Die Flächen des  $F^2$ -Büschels  $F^2_{qrst}$  bedingen durch ihre polaren Räume auf dieser Kongruenz eine sekundäre Involution; konjugierte Strahlen der sekundären Involution sind reziproke Polaren für alle Flächen des Büschels. Die für die Flächen des  $F^2$ -Büschels konjugierten Punkte der einen Leitgerade  $u$  bilden eine hyperbolische Punktinvolution, die konjugierten Punkte der andern Leitgerade  $v$  eine elliptische. Führt eine positive Hermitesche Kollineation die Flächen des  $F^2$ -Büschels  $F^2_{qrst}$  und die sekundäre charakteristische Involution auf  $C^a_v$  in sich über, so hat sie außer den reellen Leitgeraden von  $C^a_v$  noch zwei Paare Doppelstrahlen. Die beiden Strahlen jedes Paares projizieren je aus dem einen reellen Doppelpunkte auf  $u$  die beiden konjugiert imaginären Doppelpunkte auf  $v$  und sind deshalb konjugiert imaginäre Geraden erster Art. Die Kollineation besitzt nur die eine charakteristische Involution auf  $C^a_v$ .

5. Wird der Koordinatenbestimmung im elliptischen Raume ein Polartetraeder seiner [imaginären<sup>2)</sup>] Fundamentalfäche zugrunde gelegt, so ergibt sich als Gleichung dieser Fläche:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Eine allgemeine Bewegung im elliptischen Raum hat ein Paar reziproker Polaren  $u, v$  der Fundamentalfäche zu reellen Doppelstrahlen. Die beiden übrigen Gegenkantenpaare  $qr$  und  $st$  des Decktetraeders sind paarweise konjugiert imaginäre Deckstrahlen der Kollineation. Daraus folgt:

„Die allgemeine Bewegung im elliptischen Raume hat drei charakteristische Involutionen, die eine liegt auf einer hyperbolischen linearen Kongruenz  $C^a_v$ , die beiden andern auf zwei elliptischen linearen Kongruenzen  $C^a_r$  und  $C^a_t$ .“

Die Kollineation läßt sich in zwei elliptisch gescharte Kollineationen zerlegen, von denen die eine  $C^a_r$ , die andere  $C^a_t$  zur Deckstrahlenkongruenz hat. Die beiden gescharten Kollineationen werden als Parallelverschiebungen erster und zweiter Art bezeichnet. Sie geben Anlaß zu Substitutionen der folgenden Arten:

#### Parallelverschiebungen

##### I. Art

$$\rho x'_1 = \alpha x_1 - \beta x_2 - \gamma x_3 - \delta x_4 \quad \rho x'_1 = \alpha' x_1 - \beta' x_2 - \gamma' x_3 - \delta' x_4$$

$$\rho x'_2 = \beta x_1 + \alpha x_2 + \delta x_3 - \gamma x_4 \quad \rho x'_2 = \beta' x_1 + \alpha' x_2 - \delta' x_3 + \gamma' x_4$$

$$\rho x'_3 = \gamma x_1 - \delta x_2 + \alpha x_3 + \beta x_4 \quad \rho x'_3 = \gamma' x_1 + \delta' x_2 + \alpha' x_3 - \beta' x_4$$

$$\rho x'_4 = \delta x_1 + \gamma x_2 - \beta x_3 + \alpha x_4 \quad \rho x'_4 = \delta' x_1 - \gamma' x_2 + \beta' x_3 + \alpha' x_4$$

##### II. Art

mit den Nebenbedingungen:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \neq 0 \qquad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \delta'^2 \neq 0$$

Die Kongruenzstrahlen von  $C_i^{\alpha}$  und  $C_i^{\beta}$  sind bzw. Clifford'sche Parallelen erster und zweiter Art.

Nummehr ergeben sich alle Eigenschaften der Clifford'schen Parallelen von selbst:

*„Liegt auf der hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz  $C_i^{\alpha}$  die charakteristische Involution einer allgemeinen Bewegung im elliptischen Raume, so werden durch diese Involution zwei elliptische lineare Strahlenkongruenzen  $C_i^{\alpha}$ ,  $C_i^{\beta}$  mitbestimmt (3). Sie werden von Clifford'schen Parallelen erster und zweiter Art erfüllt. Die  $\infty^1$  Flächen des F<sub>2</sub>-Büschels  $F_{\text{erst}}^2$  (VI.) liegen je einscharig in  $C_i^{\alpha}$  und in  $C_i^{\beta}$ , ihre Regelstrahlen sind Clifford'sche Parallelen erster Art, ihre Leitstrahlen Clifford'sche Parallelen zweiter Art. Sie sind Clifford'sche Flächen. Gescharte (und insbesondere geschart involutorische) Kollineationen mit den Deckstrahlenkongruenzen  $C_i^{\alpha}$  und  $C_i^{\beta}$  sind Parallelverschiebungen erster und zweiter Art. Da zwei solche aber untereinander vertauschbar sind (3), so haben die Clifford'schen Flächen die Krümmung Null. Zu einer gegebenen Geraden des elliptischen Raumes lassen sich die  $\infty^2$  Parallelen erster und zweiter Art leicht konstruieren.“*

**6.** Der hyperbolische Raum hat eine reelle strahlenlose Fundamentalfäche. Eine Bewegung im hyperbolischen Raume hat nur eine charakteristische Involution auf einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz  $C_i^{\alpha}$  (4). Die beiden übrigen Gegenkantenpaare des Decktetraeders bestehen aus konjugiert imaginären Geraden erster Art. Weitere charakteristische Involutionen auf linearen Kongruenzen sind nicht vorhanden und es entfällt daher die Möglichkeit, die Bewegungen in zwei reelle Parallelverschiebungen zu zerlegen.

Auf die Zerlegung der allgemeinen Bewegung im nicht-euklidischen (hyperbolischen oder elliptischen) Raume in zwei reelle Drehungen und auf den Zusammenhang mit der Theorie der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz sei hier nur hingewiesen. Diese Zerlegung führt auf die von Herrn Jolles<sup>1)</sup> behandelten inzidentpaarigen Involutionen und auf den Satz:

*„Wird eine nicht-euklidische Bewegung in zwei Drehungen zerlegt, so hat jede derselben eine charakteristische inzidentpaarige Involution auf ein und derselben hyperbolischen linearen Kongruenz, und aus den beiden inzidentpaarigen Involutionen der beiden Drehungen resultiert die charakteristische Involution der resultierenden Bewegung.“*