Ueber die Theorie der Trägheitskegelschnitte,

von

Gerhard HAENZEL in Berlin-Wittenau, Deutschland.

Dass ein endlich begrenztes ebenes Flächenstück jedem Punkte seiner Ebene eine Trägheitsellipse zuweist, ist bekannt genug. Die Eigenschaften der Trägheitsellipsen sind in der Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente vielfach erörtert worden. Das Flächenstück bestimmt auch ein mit dieser Theorie verknüpftes polares Feld, auf das Culmann(1) zuerst hingewiesen hat. Nun lässt sich dieses polare Feld aus dem Zentrifugalmomente des Flächenstückes ableiten und die Trägheitsellipse eines gegebenen Punktes P erscheint dann als eine geometrische Eigenschaft des polaren Feldes: Dreht sich ein Strahl um den Punkt P, so umhüllen die beiden von ihm gleich weit abstehenden und zu ihm parallelen, konjugierten Strahlen des polaren Feldes die Trägheitsellipse von P. Die weiteren Eigenschaften der Trägheitsellipse folgen alsdann zwanglos aus geometrischen Sätzen des polaren Feldes.

Diese Ableitung gestaltet die Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente äusserst einfach und übersichtlich(2). Es ist aber bisher kaum beachtet worden, dass hinter ihr allgemeinere Eigenschaften des polaren Feldes stehen, die es gestatten, die Theorie der Trägheitsellipse zu der allgemeineren Theorie des "Trägheitskegelschnittes" zu erweitern. Hierfür werden im folgenden die wesentlichsten Sätze angegeben.

1. Eine symmetrische Punktinvolution auf einer Gerade g ordnet je zwei Punkte einander zu, die von dem im Endlichen liegenden Doppelpunkte P der Involution gleichen Abstand haben. Sie bestimmt eine involutorische Transformation φ_1. Aus φ_1 und einer anderen gegebenen involutorischen Transformation φ resultiert eine projektive Transformation ψ. Die beiden durch ψ bestimmten (re-

(1) Culmann, Die graphische Statik, Zürich, 2. Abschn., 7. Kap. § 63-67.

(2) Herr Jolles, Synthetische Theorie der Zentrifugal- u. Trägheitsmomente eines ebenen Flächenstückes, Archiv der Mathematik u. Physik, III, 2. Bd. S. 327-341.—Diese Abhandlung enthält die nachfolgenden Resultate soweit sie sich auf polare Felder mit imaginärer Inzidenzkurve beziehen.

ellen oder konjugiert imaginären) liegen zu P symmetrisch und werden durch φ einander zugeordnet. Daher gilt der Satz:

"*Sind $g(AA_1, BB_1, \ldots, XX_1, \ldots)$ die Punktepaare einer Involution auf einer Gerade g, so liegt ein gegebener Punkt P von g stets in der Mitte zwischen zwei einander zugeordneten (reellen oder konjugiert imaginären) Punkten dieser Involution.*"

2. In einem polaren Felde mit der (reellen oder imaginären) Inzidenzkurve γ^2 ist ein gegebener Durchmesser d von γ^2 der Träger einer (hyperbolischen oder elliptischen) Involution konjugierter Punkte. Der Schnittpunkt P eines gegebenen Strahles d_1 mit dem ihm konjugierten Durchmesser d des Feldes (Fig. 1) hälftet daher den Abstand zweier auf d liegenden (reellen oder konjugiert imaginären) konjugierten Punkten G, G_1 (1). Zieht man durch G und G_1 die Parallelen g und g_1 zu d_1, so sind g und g_1 als Polaren von bzw. G_1 und G konjugierte Strahlen und haben von P gleichen Abstand.

Der Punkt P trägt im polaren Felde eine Involution konjugierter Strahlen. Ist dem gegebenen Strahle $\mathfrak{x}$ von P der Strahl $\mathfrak{x}_1$ konjugiert, so sind die Geraden g und g_1 Träger zweier projektiver Punktreihen, wenn den Schnittpunkten X, X_1 der $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ mit g die Schnittpunkte X_1', X' der $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}$ mit g_1 entsprechen. Die projektiven Punktreihen $g(\ldots, X, \ldots, X_1, \ldots)$ und $g_1(\ldots, X_1', \ldots, X', \ldots)$ erzeugen einen durch g und g_1 gehenden Strahlenbüschel zweiter Ordnung, sobald $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_1$ die Involution konjugierter Strahlen von P beschreiben. Je zwei Strahlen XX_1' und X_1X' dieses Strahlenbüschels zweiter Ordnung sind zueinander parallel und haben von P gleichen Abstand.

Die Punkte X, X_1, X', X_1' bestimmen ein Polarviereck des polaren Feldes, weil zwei Paar Gegenseiten, nämlich g, g_1 und $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1$ aus konjugierten Strahlen des polaren Feldes bestehen. Daher sind auch XX_1' und X_1X' konjugierte Strahlen und es gilt:

"*Dreht sich in einem polaren Felde ein gegebener Strahl um einen seiner Punkte P, so umhüllen die zu ihm parallelen und von ihm gleich weit entfernten konjugierten Strahlen des polaren Feldes einen Kegelschnitt π^2 mit dem Mittelpunkte P. Die Involution der konjugierten Strahlen von P im polaren Felde ist die Involution der konjugierten Durchmesser des Kegelschnittes π^2.*"

3. Wie eingangs erwähnt wurde, lässt sich das mit der Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente eines ebenen Flächenstückes verknüpfte polare Feld aus dem Zentrifugalmomente dieses Flächen-

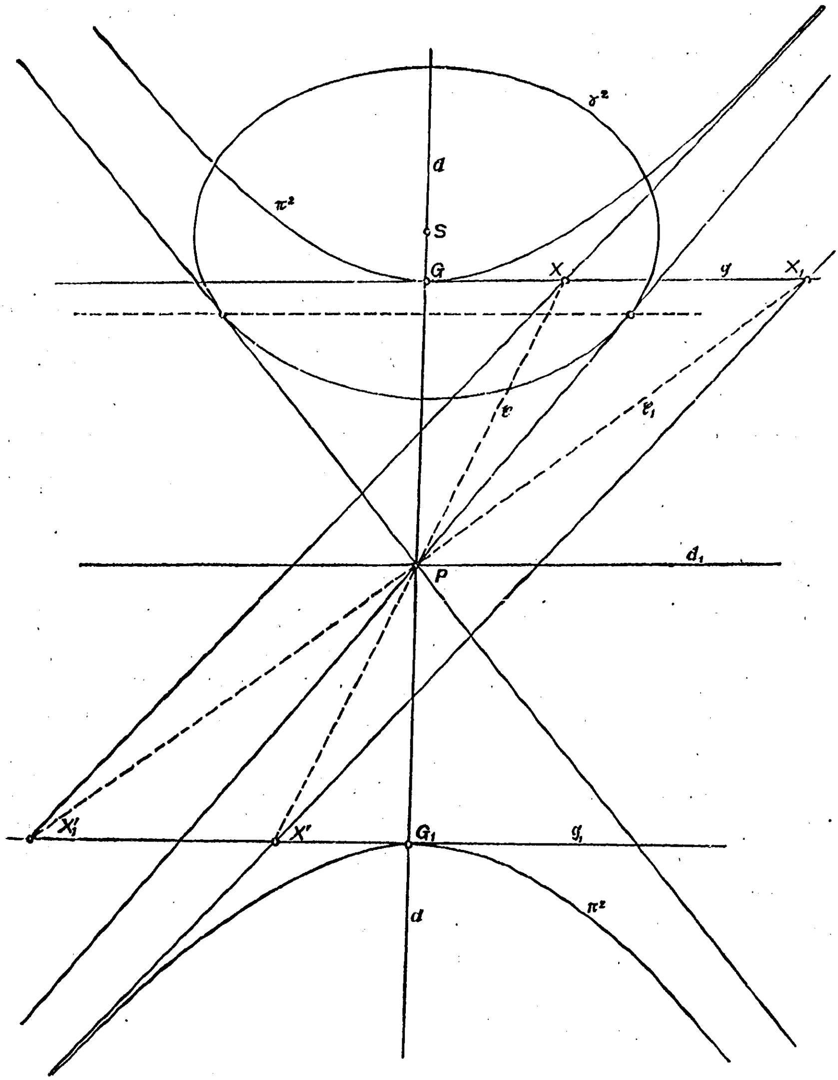

Fig. 1

stückes herleiten (Anm. 2). In dem endlich begrenzten ebenen Flächenstücke F habe ein gegebenes Element dF von einem in seiner Ebene liegenden Strahle x den parallel zu einer gegebenen Richtung $\mathfrak{x}$ gemessenen Abstand r_x und von einem Strahle y den parallel zu einer Richtung $\mathfrak{y}$ gemessenen Abstand r_y. Dann heisst bekanntlich das über das Flächenstück F erstrecke Integral

$\int_F r_x r_y dF$ das Zentrifugalmoment von F bezüglich x, y. Es geht, wenn x mit y und $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{y}$ zusammenfällt, in das Trägheitsmoment

$\int_F r_x^2 dF$ von F bezüglich x über.

Mit denselben Bezeichnungen heisst das Integral

$\int_F r_x dF$ das statische Moment von F bezüglich x. Wird nun jedem Elemente dF eine seinem Abstande r_x von x proportionale Masse zuerteilt, so ist hierdurch ein Massensystem $M_{rx} = \int_F r_x dF$ bestimmt und es entspricht dem Strahle x eindeutig der Schwerpunkt X von M_{rx}. Das Integral

$\int_F r_x r_y dF$ stellt nunmehr das statische Moment von M_{rx} bezüglich des Strahles y dar. Es verschwindet daher, wenn y durch den Schwerpunkt X von M_{rx} geht. Nun ist

$\int_F r_x (r_y dF) = \int_F r_y (r_x dF)$, d.h. ein gegebener Strahl y geht durch den Schwerpunkt X von M_{rx}, wenn der Schwerpunkt Y von M_{ry} auf x liegt. Einem gegebenen Punkte X der Ebene ist also ein Strahl x zugeordnet, den Strahlen $y \ldots.$ des Strahlenbüschels X entsprechen die Punkte $Y \ldots.$ der Punktreihe x. Das Flächenstück F bestimmt also in seiner Ebene durch sein Zentrifugalmoment ein polares Feld f^2. Bezüglich irgend zweier konjugierten Strahlen von f^2 verschwindet das Zentrifugalmoment von F. Mit jeder Tangente der Inzidenzkurve des polaren Feldes fallen zwei konjugierte Strahlen zusammen und das Zentrifugalmoment geht in das Trägheitsmoment bezüglich jener Tangente über. Da nun das Trägheitsmoment von F niemals Null wird, so hat f^2 eine imaginäre Inzidenzkurve. Die konjugierten Strahlen eines Punktes im polaren Felde sind seine Trägheitsachsen für das Flächenstück.

Herr Jolles hat weiter nachgewiesen, dass die Trägheitsellipse, die das Flächenstück F einem gegebenen Punkte P zuordnet, von den von P paarweise gleich weit abstehenden, parallelen und konjugierten Strahlen des polaren Feldes f^2 umhüllt wird. Die Trägheitsellipse von P ist also identisch mit dem Kegelschnitte π^2, den das polare Feld f^2 nach Nr. 2 dem Punkte P zuweist. Aus diesem Grunde bezeichnen wir die in Nr. 2 abgeleiteten Kegelschnitte π^2 eines gegebenen polaren Feldes als die "Trägheitskegelschnitte im polaren Felde," oder :

"*Dreht sich in einem polaren Felde ein gegebener Strahl um einen seiner Punkte P, so umhüllen die zu ihm parallelen und von ihm gleich weit entfernten, konjugierten Strahlen des polaren Feldes einen Kegelschnitt π^2 mit dem Mittelpunkte P, den Trägheitskegelschnitt von P.*"

4. In einem polaren Felde sind die konjugierten Normalstrahlen eines gegebenen Punktes P die Hauptachsen seines Trägheitskegelschnittes π^2, die (reellen oder konjugiert imaginären) Doppelstrahlen der Involution konjugierter Strahlen von P sind die Asymptoten von π^2. Ist daher die Inzidenzkurve γ^2 des polaren Feldes eine Ellipse, so ist der Trägheitskegelschnitt eines Punktes P eine Hyperbel oder ein imaginärer Kegelschnitt, je nachdem P ausserhalb oder innerhalb der Inzidenzkurve liegt. Ein polares Feld mit einer Hyperbel als Inzidenzkurve weist einem Punkte P eine Hyperbel oder eine Ellipse als Trägheitskegelschnitt zu, je nachdem P ausserhalb oder innerhalb der Inzidenzkurve liegt. Alle Trägheitskegelschnitte eines polaren Feldes mit imaginärer Inzidenzkurve sind Ellipsen. Der Sonderfall, dass die Inzidenzkurve eine Parabel ist, werde hier ausgeschlossen.

Der dem Mittelpunkte S des polaren Feldes zugewiesene Trägheitskegelschnitt σ^2 heisse der "zentrale Trägheitskegelschnitt" des polaren Feldes. Er hat mit ihm seine Durchmesserinvolution gemein. Von zwei parallelen Tangenten des zentralen Trägheitskegelschnittes σ^2 hat jede den Berührungspunkt der anderen zum Pol (2). Diese beiden Pole sind konjugierte Punkte und es folgt:

"*Der Inzidenzkegelschnitt des polaren Feldes und sein zentraler Trägheitskegelschnitt sind füreinander polarinvariant.*"

Die beiden Kegelschnitte bestimmen zwei polare Korrelationen. Diese sind miteinander vertauschbar und durch ihre Resultierende ist die perspektive Involution bestimmt, welche den Mittelpunkt S des polaren Feldes zum Zentrum und die unendlich ferne Gerade zur Involutionsachse hat, also die Spiegelung am Punkte S. Deshalb folgt:

"*Die Pole einer gegebenen Geraden bezüglich der Inzidenzkurve des polaren Feldes und bezüglich seines zentralen Trägheitskegelschnittes gehen durch Spiegelung am Mittelpunkte auseinander hervor. Die Polaren eines gegebenen Punktes sind parallel.*"

5. Alle Trägheitskegelschnitte, deren Mittelpunkte auf einer Gerade g liegen, berühren die beiden von g gleich weit abstehenden, zu g parallelen, konjugierten Strahlen in Punktepaaren: T, T_I, T'. T_I', ... Der Verbindungsstrahl eines solchen Punktepaares T, T_I ist aber stets der zu g konjugierte Durchmesser des in T und T_I berührenden Trägheitskegelschnittes. Mithin sind alle solche Verbindungsstrahlen dem Strahle g im polaren Felde konjugiert (2) und gehen durch den Pol von g, oder:

"*Alle Trägheitskegelschnitte, deren Mittelpunkte auf derselben Gerade g liegen, berühren die beiden von g gleich weit abstehenden konjugierten Strahlen in Punktepaaren, deren Verbindungsgeraden durch den Pol von g gehen*(1)."

Die Brennpunkte F, F' des polaren Feldes sind Träger orthogonaler Strahleninvolutionen. Ihre Trägheitskegelschnitte sind daher reelle Kreise wenn das polare Feld einen Hyperbel oder einen imaginären Kegelschnitt zur Inzidenzkurve hat (4). Die Durchmessersehnen dieser Kreise haben dieselbe Länge wie die zum Durchmesser FF' des polaren Feldes normale Achse des zentralen Trägheitskegelschnittes.

6. Die Brennpunkte F, F' des polaren Feldes bestimmen eine Schar konfokaler Kegelschnitte, deren Brennpunkte sie sind. Von der Haupt- und der Nebenachse des Trägheitskegelschnittes eines Punktes P berührt die eine die durch P gehende Hyperbel, die andere die durch P gehende Ellipse aus der Schar konfokaler Kegelschnitte.

Die Tangentenpaare vom Punkte P an die mit dem polaren Felde konfokalen Kegelschnitte sind die Strahlenpaare einer symmetrischen Involution. Die normalen Doppelstrahlen der Involution fallen mit den Achsen des Trägheitskegelschnittes π^2 von P zusammen. Zwei konjugierte Strahlen x, x' der symmetrischen Involution berühren den gegebenen Kegelschnitt φ^2 aus der Schar der konfokalen Kegelschnitte und fallen mit zwei Durchmessern von π^2 zusammen, die zu der Hauptachse von π^2 symmetrisch liegen. Die von x gleich weit entfernten konjugierten Strahlen t, t_1 des polaren Feldes haben daher von x denselben Abstand, den die von x' gleich weit entfernten konjugierten Strahlen t', t_1' von x' haben. Gleitet x als Tangente an φ^2, so bleibt der Abstand der von x gleich weit entfernten konjugierten Parallelstrahlen des polaren Feldes derselbe wie der Abstand der Strahlen t', t_1'. Daher ist bewiesen:

"*Gleitet ein Strahl g an einem der konfokalen Kegelschnitte*

(1) Herr Jolles, a.a. O. S 336.

φ^2 des polaren Feldes, so umhüllen die von g gleich weit abstehenden konjugierten Strahlen zwei zu φ^2 ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte."

Alle Trägheitskegelschnitte, deren Mittelpunkte auf demselben Kegelschnitte φ^2 aus der Schar der konfokalen Kegelschnitte liegen, enthalten auf ihren mit den Normalen von φ^2 zusammenfallenden Achsen gleich lange Sehnen.

"*Jede mit dem polaren Felde konfokale Ellipse (Hyperbel) ist der Ort solcher Punkte, deren Trägheitskegelschnitte gleich lange Hauptachsen (Nebenachsen) haben.*"

Eine Ellipse und eine Hyperbel aus der Schar der konfokalen Kegelschnitte schneiden einander in vier Punkten. Die Trägheitskegelschnitte dieser vier Punkte sind kongruent.

Dreht sich ein Strahl um einen seiner Punkte Z, so umhüllt der konjugierte Normalstrahl eine Parabel. Der Schnittpunkt beider Strahlen beschriebt eine rationale Kurve dritter Ordnung mit dem Doppelpunkte Z. Die Mittelpunkte aller Trägheitskegelschnitte, die ihre eine Achse durch Z senden, erfüllen diese Kurve.

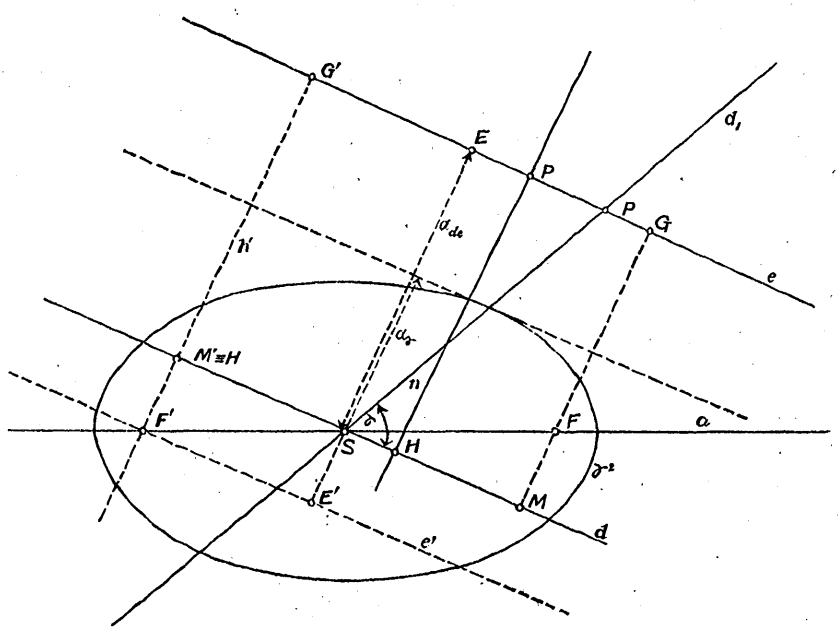

Fig. 2

7. Von den konjugierten Normalstrahlen e, h eines Punktes P (Fig. 2) berühre e die durch P gehende Ellipse π_e^2, h die durch P gehende Hyperbel π_h^2 aus der Schar der konfokalen Kegelschnitte. Auf h liegt die Hauptachse a_π des Trägheitskegelschnittes π^2 von P, auf e seine Nebenachse b_π. Es sei d der zu e parallele, d_1 der zu e konjugierte Durchmesser des polaren Feldes und es schneide d_1 den Strahl e in P'. Im Trägheitskegelschnitte π'^2 mit dem Mittelpunkte P' sei auf d_1 die (reelle oder imaginäre) Durchmesserhalbsehne p_{d1} enthalten. Die Inzidenzkurve γ^2 des polaren Eeldes enthalte auf d_1 die (relle oder imaginäre) Durchmesserhalbsehne $\mathfrak{e}$. Dann besteht nach Nr. 1 und Nr. 2 die Gleichung:

$$p_{d1}^2 = \varphi P'^2 - (\mathfrak{e})^2$$

Schliessen d_1 und d den Winkel α ein, so ist der Abstand der Strahlen d und e voneinander: $a_{de} = \varphi P' \sin\alpha$. Die eine Achse a_π des Trägheitskegelschnittes π^2 von P ist $a_\pi = p_{d1} \sin\alpha$. Der Abstand des Strahles d von der zu d parallelen Tangente der Inzidenzkurve γ^2 beträgt $a_\gamma = \mathfrak{e} \sin\alpha$. Daher gilt:

$$a_\pi^2 = a_{de}^2 - (a_\gamma^2). \tag{I}$$

Es sei $\dfrac{x^2}{a_\gamma^2} + \dfrac{y^2}{b_\gamma^2} = 1$ die Gleichung der Inzidenzkurve γ^2 des polaren Feldes, wobei a_γ, b_γ nach Bedarf reelle oder imaginäre Werte annehmen, je nachdem γ^2 eine Ellipse, Hyperbel oder ein imaginärer Kegelschnitt ist. Die Schar der mit ihr konfokalen Kegelschnitte wird dann mittels eines Parameters λ dargestellt durch:

$$\frac{x^2}{a_\gamma^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b_\gamma^2 + \lambda} = 1.$$

Aus dieser Schar gehe durch den Punkt P die Ellipse π_e^2 mit dem Parameterwert λ_e und die Hyperbel π_h^2 mit dem Parameterwert λ_h, sodass die halbe Hauptachse der Ellipse die Länge $\mathfrak{a}_e = \sqrt{a_\gamma^2 + \lambda_e}$, die halbe Hauptachse der Hyperbel die Länge $\mathfrak{a}_h = \sqrt{a_\gamma^2 + \lambda_h}$ hat. Für die halbe Hauptachse a_π und die halbe Nebenachse b_π des Trägheitskegelschnittes π^2 von P gelten dann auf Grund des Satzes aus Nr. 6 und nach Gleichung (I) die Beziehungen:

$$a_\pi^2 = \mathfrak{a}_e^2 - a_\gamma^2 = a_\gamma^2 + \lambda_e - a_\gamma^2 = \lambda_e,$$

$$b_\pi^2 = \mathfrak{a}_h^2 - a_\gamma^2 = a_\gamma^2 + \lambda_h - a_\gamma^2 = \lambda_h,$$

oder $$a_\pi = \sqrt{\lambda_e}, \quad b_\pi = \sqrt{\lambda_h}$$

mit anderen Worten:

"*Legt man die Inzidenzkurve des polaren Feldes einem System elliptischer Koordinaten zu Grunde, so sind die halbe Hauptachse und die halbe Nebenachse eines Trägheitskegelschnittes gegeben durch die absoluten Quadratwurzeln aus den elliptischen Koordinaten* λ_e, λ_h *seines Mittelpunktes.*"

8. Unsere Untersuchung ergab, dass jeder Punkt P eines polaren Feldes Mittelpunkt eines Trägheitskegelschnittes ist, den die von P paarweise gleich weit abstehenden, einander parallelen, konjugierten Strahlen umhüllen. Richtung und Länge seiner Hauptachsen liessen sich mit Hilfe der dem polaren Felde konfokalen Kegelschnitte leicht angeben. Auf die analogen Eigenschaften des polaren Raumes werde hier nur hingewiesen.

Gehören einem mit Masse belegten ebenen Flächenstücke nur Massenteile ein und desselben Vorzeichens an, so hat das mit ihm verknüpfte polare Feld eine imaginäre Inzidenzkurve. Treten dagegen positive und negative Massenteile auf, so verschwindet das Trägheitsmoment für die Tangenten eines reellen Kegelschnittes und an die Stelle der Theorie der Trägheitsellipse tritt die allgemeinere Theorie des Trägheitskegelschnittes. Beide Fälle lassen sich jetzt mittels der dargelegten Eigenschaften des polaren Feldes einheitlich behandeln.