

führt die Hyperfläche $x_1^2 + x_{\text{II}}^2 + x_{\text{III}}^2 - x_{\text{IV}}^2 + x_{\text{V}}^2 = 0$ in sich über. Durch diese Aussage ist aber die de Sitter-Welt noch nicht erschöpfend gekennzeichnet.

Über Lösungen der Gravitationsgleichungen Einsteins.

Von Gerhard Haenzel in Berlin.

(Eingegangen am 29. September 1931.)

Aus der letzthin von St. Jolles synthetisch abgeleiteten Theorie der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz ergeben sich für den Verfasser die Mittel zu einer sehr elementaren Beschreibung der beiden Raumzeitstrukturen Einsteins und de Sitters und zur anschaulichen Kennzeichnung ihrer charakteristischen Unterschiede abweichend von dem bisherigen Wege.

Für die Entwicklung der allgemeinen Relativitätstheorie haben zwei Weltstrukturen eine bedeutungsvolle Rolle gespielt. Jede von ihnen geht auf eine andere Lösung der Gravitationsfeldgleichungen Einsteins zurück. Die eine dieser Lösungen röhrt von Einstein her, die andere von de Sitter. Die diesbezüglichen Untersuchungen bedienen sich vorwiegend der Tensorrechnung und vermeiden es meist, ein geometrisches Modell der Weltstruktur zu entwerfen. Im folgenden soll gezeigt werden, wie man auf Grund einfacher liniengeometrischer Ansätze jene beiden Raumzeitstrukturen konstruktiv erzeugen und ihre charakteristischen Unterschiede kennzeichnen kann.

1. Die de Sitter-Lösung führt auf ein Bogenlement von der Form¹⁾:

$$ds^2 = -dr^2 - R^2 \sin^2 \frac{r}{R} [d\psi^2 + \sin^2 \psi \cdot d\theta^2] + \cos^2 \frac{r}{R} c^2 dt^2, \quad (1)$$

mit r , ψ , θ , t als Veränderliche. Dieses Bogenlement kommt durch die Substitutionen:

$$\begin{aligned} x_{\text{I}} &= R \sin \frac{r}{R} \cos \psi, & x_{\text{IV}} &= R \sin \frac{r}{R} \cdot \sin \psi \cdot \sin \theta, \\ x_{\text{III}} &= R \sin \frac{r}{R} \cdot \sin \psi \cdot \cos \theta, & x_{\text{V}} &= R \cos \frac{r}{R} \cdot \sin \frac{c t}{R}, \\ x_{\text{V}} &= R \cos \frac{r}{R} \cdot \cos \frac{c t}{R} \end{aligned}$$

auf die einfache Form:

$$ds^2 = dx_{\text{I}}^2 + dx_{\text{II}}^2 + dx_{\text{III}}^2 - dx_{\text{IV}}^2 + dx_{\text{V}}^2,$$

d. h. die de Sitter-Lösung läßt sich auf eine pseudosphärische Raumstruktur im Vierdimensionalen zurückführen und eine starre Kollineation

2. Eine starre Kollineation der pseudosphärischen Raumstruktur hat drei reelle dreidimensionale Deckräume, deren jeder in sich übergeht. Sorgen wir dafür, daß einer von ihnen, Δ_0 , durch $x_{\text{III}} = 0$ charakterisiert wird und führen in ihm ein:

$\varrho x_1 = x_1 + ix_{\text{II}}$, $\varrho x_2 = x_{\text{IV}} + x_{\text{V}}$, $\varrho x_3 = x_1 - ix_{\text{II}}$, $\varrho x_4 = x_{\text{IV}} - x_{\text{V}}$,
 $x_1 x_3 - x_2 x_4 = 0$ in sich über. Das durch die starre Kollineation gleichfalls festliebende Koordinatentetraeder ist ein Tangentialtetraeder von H^2 und hat zwei reelle Gegenkanten, nämlich den Strahl s , von dem aus sich die reellen Tangentialebenen $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ an H^2 anlegen, und den Strahl t , Schnitt der beiden konjugiert imaginären Tangentialebenen $x_1 = 0$, $x_3 = 0$. Die starre Kollineation läßt jede der ∞^1 Flächen des F^2 -Büsels:

$$F^2(\lambda), \quad x_1 x_3 - \lambda \cdot x_2 x_4 = 0 \quad (-\infty \dots \lambda \dots +\infty) \quad (\text{II})$$

einzel fest. Alle diese Flächen zweiter Ordnung haben s , t zu reziproken Polaren. Mit besonderem Vorteil läßt sich für die weitere Beschreibung der Raumstruktur die hyperbolische lineare Kongruenz C_t^s verwenden, welche die Strahlen s , t zu Leitgeraden hat. Ihre ∞^2 mit s und t inzidenten Strahlen werden mittels homogener Linienkoordinaten p_{ik} durch die Doppelgleichung gekennzeichnet:

$$p_{13} = p_{24} = 0.$$

Die ∞^1 Flächen des F^2 -Büsels $F^2(\lambda)$ paaren die ∞^2 Strahlen von C_t^s involutorisch, indem sie je zwei Kongruenzstrahlen g , g' als reziproke Polaren einander zuweisen, was sich analytisch ausdrückt durch:

$$-\frac{\lambda}{4} p_{12} = p'_{12}, \quad +\frac{\lambda}{4} p_{14} = p'_{14}, \quad +\frac{\lambda}{4} p_{23} = p'_{23}, \quad -\frac{\lambda}{4} p_{34} = p'_{34}. \quad (\text{III})$$

Eine solche Verwandtschaft nennt man eine „sekundäre Involution“¹⁾ auf der linearen Kongruenz C_t^s .

3. Nach allen diesen Vorbereitungen wird die Zeitmessung eingeführt durch:

$$\vartheta = c \ln \frac{x_2}{x_4} = c \ln \frac{x_{\text{IV}} + x_{\text{V}}}{x_{\text{IV}} - x_{\text{V}}}.$$

¹⁾ St. Jolles, Mathem. ZS. **27**, 427, 1927. Für die analytischen Formeln siehe G. Haenzel, Crelles Journ. **166**. Not., November 1917.

Dadurch läuft die Betrachtung des dreidimensionalen Raumes Δ_0 auf die Beobachtung einer ruhenden (höchstens in sich verschiebbaren) Ebene im Verlauf der Zeit hinaus. Zu einem vorgegebenen Zeitpunkt δ gehört nämlich jetzt die Ebene

$$\delta = x_2 - e^c \cdot x_4 = 0,$$

d. h. die (räumlich) ruhende Ebene δ muß für alle Zeit durch die Leitgerade $s(x_2 = x_4 = 0)$ von C_t^s gehen und der Ablauf der Zeit wird sich durch eine Drehung von δ um s darstellen. Sind z. B. δ_1, δ_2 die Lagen von δ zu den Zeiten ϑ_1, ϑ_2 , so bestimmt das Zeitintervall $\vartheta_2 - \vartheta_1$ diejenige Drehung, die δ_1 in δ_2 überführt. Sie heiße die zum Zeitintervall $\vartheta_2 - \vartheta_1$ gehörige „temporäre Kollineation“. Die beiden Ebenen $x_2 = 0, x_4 = 0$ stellen zwei zeitliche Grenzlagen dar, die in endlicher reeller Zeit nicht erreicht werden können. Der in endlicher reeller Zeit zugängliche Raumteil liegt zwischen ihnen, und die Ebene δ trägt für alle Zeit eine (zeitlich veränderliche) elliptische Maßbestimmung. Dementsprechend sind alle ganz zwischen $x_{iv} = +x_v$ und $x_{iv} = -x_v$ verlaufenden dreidimensionalen Räume elliptisch, d. h. der sich im Laufe der Zeit um die Ebene $x_{iv} = 0, x_v = 0$ drehende dreidimensionale de Sitter-Raum ist geschlossen und trägt eine zeitlich veränderliche elliptische Maßbestimmung.

Im Verlauf der Zeit geht sowohl jede Fläche des F^2 -Büsels:

$$F^2(\lambda), \quad x_1 x_3 - \lambda \cdot x_2 x_4 = 0, \quad -\infty \dots \lambda \dots +\infty$$

als auch jede Ebene des Ebenenbüschels durch t :

$$t(\kappa), \quad x_1 + \kappa \cdot x_3 = 0, \quad -\infty \dots \kappa \dots +\infty$$

in sich über. Hat also ein gegebener Punkt die homogenen Koordinaten $p_1 \dots p_4$, so beschreibt er ruhend die Weltlinie:

$$x_1 - \left(\frac{p_1^2}{p_2 p_4} \right) x_2 x_4 = 0.$$

4. Ein von Einstein gegen die de Sitter-Lösung erhobener Einwand¹⁾ nimmt hier eine rein geometrische Gestalt an. Soll eine Lösung nur dann als befriedigend anerkannt werden, wenn für alle Punkte im Endlichen die Feldgleichungen gelten, so darf die zugehörige Determinante der Potentiale $g_{\mu\nu}$ nirgends im Endlichen Null werden. Die Determinante hat bei de Sitter den Wert:

$$|g_{\mu\nu}| = -R^4 \sin^4 \frac{r}{R} \sin^2 \psi \cos^2 \frac{r}{R}.$$

Hier erscheint sie in der Form:

$$|g_{\mu\nu}| = \frac{1}{R^2} (x_i^2 + x_{ii}^2 + x_{ii}^2) (x_{iv}^2 + x_{ii}^2) (x_{iv}^2 - x_v^2).$$

Sie verschwindet also für die beiden Leitgeraden s, t der linearen Kongruenz C_t^s , nämlich für:

$$t \quad x_i = x_{ii} = x_{iv} = 0 \quad \text{und} \quad s \quad x_{ii} = x_{iv} = x_v = 0.$$

5. Eine Reihe grundlegender Untersuchungen Einsteins weisen der Welt räumlich gleichfalls eine elliptische Struktur, zeitlich ein parabolisches Verhalten zu. Diese Struktur läßt sich in entsprechender Form veranschaulichen wie vorhin diejenige der de Sitter-Welt. Ruht eine Ebene δ zu gegebener Zeit und kann sie im Laufe der Zeit nur in sich verschoben werden, so ist ihre Bewegung einerseits eine elliptische Drehung um einen Punkt C von δ . Als Bahnlinien der einzelnen Punkte fungieren elliptische Kreise um C . Sie sind bekanntlich die ∞^1 -Kegelschnitte eines Kegelschnittbüschels und berühren einander im zwei konjugiert imaginären Punkten der Polare e von C im polaren Felde der Maßbestimmung. Andererseits drückt sich der Verlauf der Zeit durch Parallelverschiebung von δ in der Normalenrichtung aus. Dabei beschreibt C eine Zeitgerade t_e . Die ∞^1 -Durchmesser der elliptischen Kreise um C beschreiben die ∞^2 -Strahlen einer linearen Kongruenz. Ihre eine Leitgerade ist t_e , die andere s_∞ liegt unendlich fern in der Richtung von δ . Eine solche lineare Kongruenz heißt „helikoidisch“¹⁾. Die ∞^1 -elliptischen Kreise um C beschreiben im Laufe der Zeit ∞^1 -quadratische Zylinder. Die Weltlinien der ∞^2 -Punkte von δ werden durch ihre in δ von C ausgehenden Radienvektoren auf diesen Zylindern ausgeschnitten.

6. Zusammenfassend läßt sich feststellen: Die starre de Sitter-Kongruenz ist dadurch charakterisiert, daß sie eine hyperbolische lineare Kongruenz C_t^s in sich überführt und auf dieser eine sekundäre Involution der Kongruenzstrahlen (III). Die lineare Kongruenz bedingt die Zeitmessung, der dreidimensionale Raum, in dem sie liegt, wird von einer ruhenden Ebene δ im Verlauf der Zeit durch Drehung um die Leitgerade s beschrieben, wobei durch s auch die beiden Grenzebenen der unendlich ferne Vergangenheit und Zukunft gehen. (Diese beiden Ebenen trennen je zwei durch III einander zugeordnete Strahlen harmonisch.) Die Weltlinien der ruhenden Punkte sind die Kegelschnitte, die von den Ebenen durch die Leitgerade t aus den Flächen des Flächenbüschels II heraus-

¹⁾ Die in Anm. 1, S. 798, genannte Abhandlung Einsteins, S. 271.

¹⁾ St. Jolles, I. c., S. 449.

geschmitten werden. Die Zeitdifferenz zweier Weltpunkte ist proportional dem In vom Doppelverhältnis, das die durch die beiden Punkte gehenden Kongruenzstrahlen mit den beiden Grenzenbrennen der unendlich fernen Vergangenheit und Zukunft bilden. Die beiden Leitergeraden s , t sind singuläre Stellen, auf ihnen verschwindet die Potentialdeterminante, auf s wird auch die Zeitmessung unbestimmt.

Auch in der Einstein-Welt ist die Zeitdifferenz zweier Weltpunkte durch die beiden mit ihnen izidenten Kongruenzstrahlen einer linearen Kongruenz bestimmt; diese beiden Strahlen sind die von den beiden Weltpunkten auf die Zeitgerade t_c gefällten Lote und die Zeitdifferenz ist dem Abstand ihrer auf t_c liegenden Fußpunkte proportional. Alle solche Lote gehören einer helikoidischen Kongruenz an. In der Gegenüberstellung dieser helikoidischen Kongruenz in der Einstein-Welt und jener hyperbolischen Kongruenz C_t^s in der der Sitter-Welt drücken sich die charakteristischen Unterschiede beider Weltstrukturen aus.

Einführung in die Mechanik und Akustik. Von Prof. Dr.-Ing. e. h. R. W. Pohl, Göttingen. (Band I der „Einführung in die Physik.“) Zweite, verbesserte Auflage. Mit 440 Abbildungen, darunter 14 entfehlte. VIII, 251 Seiten. 1931. Gebunden RM 15.80

Aus den Besprechungen der 1. Auflage: Die „Mechanik und Akustik“ von Pohl, der erste Teil seiner Vorlesungen über Experimentalphysik, bedeutet für die physikalische Lehrbuch-Literatur eine der wertvollsten Bereicherungen, die sie seit langem erfahren hat. Das Buch ist in jeder Beziehung ein überaus erfreuliches Novum, es geht einen neuen Weg und bringt auf diesem Wege eine erstaunliche Fülle wertvoller Anregung, nicht nur für den Lernenden, sondern, und das vielleicht noch mehr, für den Lehrenden. Man kann, ohne sich einen besonderen Weltblick zuschreiben zu dürfen, schon jetzt sagen, daß sich dieses Buch bald in der Bibliothek jedes Physiklehrers und in jeder Lehrerbibliothek finden wird. Für jeden, der sich mit der Darstellung des physikalischen Lehrstoffes beschäftigt, ist es obendrein von hohem Interesse zu sehen, wie Pohl bei der Auswahl des Stoffes verfährt, wie er ihn disponiert und wie er das, was daraus zu lernen ist, formuliert. . . . Pohls Lehrmethode ist ganz und gar auf Anschauung und Anschaulichkeit eingestellt. Es ist ein wahrer Vergnügen, zu sehen, wie er sie in den Vordergrund stellt. . . . Ganz besondere Anerkennung verdienen die Abbildungen, sie bilden fast für sich allein ein Lehrbuch. „Die Naturwissenschaften.“

Lehrbuch der Physik in elementarer Darstellung. Von Dr.-Ing. e. h. Dr. phil. Arnold Berliner. Vierte Auflage. Mit 802 Abbildungen. V, 658 Seiten. 1928.

Eins der besten Physikbücher, das ich kenne. Und daß in wenigen Jahren 4 starke Auflagen nötig geworden sind, zeigt, daß dies Urteil allgemein ist. Der Text verbindet Klarheit der Darstellung mit Eleganz des Ausdrucks, so daß es geradezu ein Vergnügen ist, ihm zu lesen, und das Figurenmaterial ist bewundernswert gut. Das Buch ist als erste Einführung für Physiker und Naturwissenschaftler gedacht und dementsprechend elementar, d. h., es vermeidet mathematische Entwicklung fast ganz. Erhältlich aber geht es weit, bis zu den modernen Fragen. Durch eine sehr geschickte Unterteilung des Textes und übersichtliche Druckanordnung in 2 Schriftgrößen — die kleingedruckten Abschnitte vertiefen und weisen weiter — wird das Durchschaubarkeit selbst der schwierigeren Kapitel leicht gemacht.

Physik. Ein Lehrbuch für Studierende an den Universitäten und Technischen Hochschulen von **Wilhelm H. Westphal**, a. o. Professor der Physik an der Universität Berlin und Leiter der physikalischen Übungen an der Technischen Hochschule Berlin. Zweite Auflage. Mit 492 Abbildungen. XVI, 571 Seiten. 1930. Gebunden RM 19.80

In particular, the first chapter is excellent, with its introduction to causality and the essence of hypothesis. This is clearly the way in which a text-book of physics should begin, and yet such an opening is all too rare . . . The author writes with unusual clarity: many English-speaking students would do well to improve their physics and their German by using this book. „Nature.“