Sonderabdruck aus dem
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. XLII. 1932. Heft 1/4.
Verlag und Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz und ihre Gerade-Kugel-Transformation.

Herrn St. Jolles zum 75. Geburtstage gewidmet.

Von Gerhard Haenzel in Berlin.

Die vorliegende Arbeit behandelt im Abschnitt I analytisch die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz, insbesondere ihre kürzlich von Herrn Jolles synthetisch entwickelte Polarentheorie. Im Abschnitt II wird eine Abbildung der linearen Strahlenkongruenz auf die Ebene geometrisch begründet und dabei ihre Polarentheorie auf Fundamentaltheoreme der Kreisgeometrie zurückgeführt, die Theorie der in der Kongruenz enthaltenen Regelscharen auf diejenige ebener Kurven. Nach solchen Vorbereitungen gelingt es im Abschnitt III, eine Abbildung der linearen Strahlenkongruenz auf die Kugelkongruenz rein geometrisch zu begründen. Hierdurch treten die für die Theorie der Differentialgleichungen so wichtigen Grundeigenschaften dieser Lieschen Berührungstransformationen unmittelbar anschaulich hervor.

I. Über die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz.

1. Mit der vollständigen Entwicklung der Polarentheorie der Kurven und Flächen zweiter Ordnung und der gleichzeitigen allgemeinen Durchführung des Dualitätsprinzipes leiteten Poncelet[1]) und Gergonne[1]) einen außerordentlichen Aufschwung der projektiven Geometrie ein. Später ermöglichte Plücker[1]) die analytische Behandlung des Dualitätsgesetzes und der Polarentheorie. Mit Rück-

1) Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures (1812/13), 1822. — Gergonne, Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue, Gerg. Ann. 16, 1825/26, S. 209—231. — Plücker, Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. 2, Essen 1831 (Zweite Abteilung: Das Prinzip der Reziprozität, § 1, S. 242—251).

sicht auf den hohen Entwicklungsstand, den die modernen analytischen Methoden im Laufe der Zeit erreichten, erscheint es fast erstaunlich, daß die Polarentheorie in den entsprechenden Gebilden der Strahlengeometrie — der linearen Kongruenz und dem linearen Komplex — bis vor kurzem gar nicht behandelt wurde. Erst in diesem Jahre wurde eine Abhandlung des Herrn Jolles[2]) über die Polarentheorie der linearen Kongruenz veröffentlicht. Darin nimmt die Polarität zwei verschiedene Formen an, die in bemerkenswerter Weise dual nebeneinander stehen, je nachdem als Element die Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$ oder der lineare Strahlenkomplex Γ den Ausgangspunkt bildet, je nachdem also das „polare $\mathfrak{R}^2$-Gebüsch" oder das „polare Γ-Gebüsch" der linearen Kongruenz betrachtet wird.

Der Entdecker der Polarität in der linearen Kongruenz leitet jedoch die gesamte Theorie seines polaren $\mathfrak{R}^2$-Gebüsches und seines polaren Γ-Gebüsches in synthetischer Form konstruktiv ab. Deshalb ist es von Interesse, auch eine einfache analytische Darstellung jener beiden durch die lineare Kongruenz bedingten polaren Korrelationen anzugeben.

2. Werden die (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden q, r der gegebenen linearen Strahlenkongruenz C_r^q als das eine Paar Gegenkanten des Koordinatentetraeders angesehen, etwa q als die die Kante $x_1 = x_2 = 0$ und r als $x_3 = x_4 = 0$, so stellt sich die lineare Kongruenz C_r^q bei Benutzung homogener Linienkoordinaten p_{ik} als Schnitt der beiden speziellen Komplexe $p_{12} = 0$ und $p_{34} = 0$ dar. Die den Linienkoordinaten anhaftende Plückersche Fundamentalbeziehung ergibt für die Kongruenzstrahlen die Gleichung:

$$p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Deutet man die vier übriggebliebenen Linienkoordinaten als homogene Punktkoordinaten — betreibt man die Geometrie der linearen Kongruenz als Geometrie auf der Fläche zweiter Ordnung —, so entspricht der in der Kongruenz enthaltenen (reellen oder imaginären) Regelschar zweiter Ordnung der Kegelschnitt auf der Fläche zweiter Ordnung. Auf der (reellen oder imaginären) Fläche zweiter Ordnung (mit reellem polaren Raume) sind einem gegebenen Kegelschnitte f^2 diejenigen ∞^2 Kegelschnitte zugeordnet, deren ∞^2 Ebenen durch den Pol von f^2 gehen. Diese ∞^2 Kegelschnitte bilden auf der Fläche eine lineare Mannigfaltigkeit zweiter Stufe, einen f^2-Bündel, und es be-

2) St. Jolles, Die Polarität als Grundlage in der Geometrie der linearen Strahlenkongruenz, Mathem. Ztschr. 33 (1931), S. 733—790. — Die Involutionen auf einer linearen Strahlenkongruenz, Mathem. Ztschr. 27 (1927), S. 427—452.

steht zwischen den ∞^3 Kegelschnitten der Fläche und ihren ∞^3 f^2-Bündeln eine polare Korrelation. Dieselbe zieht eine polare Korrelation zwischen den ∞^3 Regelscharen zweiter Ordnung der linearen Kongruenz C_r^q und ihren ∞^3 Bündeln solcher Regelscharen nach sich, und zwar zeigt sich im folgenden leicht, daß die Trägerfläche der in der Kongruenz enthaltenen Regelschar $\mathfrak{R}^2$ für die ∞^2 Trägerflächen des zugeordneten Bündels solcher Regelscharen autopolar ist.

Durch die lineare Kongruenz C_r^q gehen die ∞^1 linearen Komplexe eines Komplexbüschels, dargestellt durch $p_{12} + \lambda p_{34} = 0$, $(-\infty \cdots \lambda \cdots +\infty)$. Die ∞^3 linearen Komplexe, die für diesen Komplexbüschel nullinvariant sind, bilden das Γ-Gebüsch der linearen Kongruenz. Dieses ist perspektiv zum Gebüsch der ∞^3 in der Kongruenz enthaltenen Regelscharen zweiter Ordnung, dem $\mathfrak{R}^2$-Gebüsch der Kongruenz. Wird doch durch einen gegebenen linearen Komplex des Γ-Gebüsches die Kongruenz je in einer Regelschar zweiter Ordnung geschnitten. Demnach kann die Polarität in der linearen Strahlenkongruenz auch als Polarität in ihrem Γ-Gebüsch angesehen werden. Dabei ist dem gegebenen linearen Komplexe Γ des Γ-Gebüsches je ein Bündel von ∞^2 solchen Komplexen zugeordnet, und der lineare Komplex Γ ist für jene ∞^2 linearen Komplexe nullinvariant.

Demnach stellen sich drei polare Korrelationen in den betrachteten geometrischen Trägergebilden folgendermaßen nebeneinander:

Trägergebilde →	Die lineare Kongruenz als Träger ihres $\mathfrak{R}^2$-Gebüsches	Die Fläche zweiter Ordnung	Die lineare Kongruenz als Träger ihres Γ-Gebüsches
Die polare Korrelation ordnet einander zu →	Die Regelschar $\mathfrak{R}^2$ und die ∞^2 Regelscharen eines $\mathfrak{R}^2$-Bündels	Den Kegelschnitt f^2 und die ∞^2 Kegelschnitte eines f^2-Bündels	Den linearen Komplex Γ und die ∞^2 linearen Komplexe eines Γ-Bündels
Art der Zuordnung →	Die Trägerflächen zugeordneter Regelscharen sind füreinander autopolar	Zugeordnete Kegelschnitte sind füreinander auf der Fläche autopolar, ihre Ebenen bzgl. der Fläche konjugiert	Zugeordnete lineare Komplexe sind füreinander nullinvariant

3. Ein gegebener linearer Komplex des Γ-Gebüsches der linearen Kongruenz C_r^q hat eine Gleichung von der Form:

$$\text{(I)} \qquad \Gamma_\lambda = \lambda_1 p_{13} + \lambda_2 p_{14} + \lambda_3 p_{23} + \lambda_4 p_{42} = 0$$

je bei festen Parameterverhältnissen $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$. Er schneidet die lineare Kongruenz in einer Regelschar zweiter Ordnung. Die Träger-

fläche dieser Regelschar heißt die dem linearen Komplexe Γ_λ „adjugierte" einscharig in C_r^q enthaltene Fläche zweiter Ordnung, und der lineare Komplex heißt der Fläche zweiter Ordnung adjungiert.[3]) Die Gleichung der adjungierten Fläche zweiter Ordnung ergibt sich aus der Gleichung des Komplexes Γ_λ und den allen Kongruenzstrahlen anhaftenden Bedingungen $p_{12} = p_{34} = 0$ als:

$$\text{(Ia)} \qquad F_\lambda^2 = \lambda_1 x_1 x_3 + \lambda_2 x_1 x_4 + \lambda_3 x_2 x_3 - \lambda_4 x_2 x_4 = 0.$$

Dabei sind den speziellen linearen Komplexen des Γ-Gebüsches (I) die je in zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenen Flächen zweiter Ordnung (Ia) adjungiert, denn in den beiden Gleichungen (I) und (Ia) werden ja diese speziellen Gebilde durch die Bedingung gekennzeichnet[4]): $\lambda_1 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_3 = 0$.

4. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ und $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, \bar{\lambda}_4$ zwei Quadrupel von Parametern, so hat die bilineare Beziehung:

$$\text{(II)} \qquad \lambda_1 \bar{\lambda}_4 + \lambda_2 \bar{\lambda}_3 + \lambda_4 \bar{\lambda}_1 + \lambda_3 \bar{\lambda}_2 = 0$$

einen zweifachen geometrischen Ursprung: Sie gewährleistet einerseits im F^2-Gebüsch der einscharig in der linearen Kongruenz C_r^q enthaltenen Flächen zweiter Ordnung die gegenseitige Autopolarität zweier Flächen zweiter Ordnung $F_\lambda^2, \bar{F}_\lambda^2$, deren Koeffizienten $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$ ihr genügen, und sie zeigt andererseits an, daß im Γ-Gebüsch der linearen Kongruenz die diesen beiden Flächen adjungierten linearen Komplexe $\Gamma_\lambda, \bar{\Gamma}_\lambda$ füreinander nullinvariant sind. Je zweien einscharig in C_r^q enthaltenen füreinander autopolaren Flächen sind zwei nullinvariante lineare Komplexe des Γ-Gebüsches adjungiert. Demnach kennzeichnet die bilineare Beziehung (II) eine polare Korrelation im F^2-Gebüsch $\Pi(F^2)$ der linearen Kongruenz C_r^q und eine polare Korrelation im Γ-Gebüsch $\Pi(\Gamma)$, nämlich:

Für eine gegebene Fläche zweiter Ordnung P_μ^2 im F^2-Gebüsch der linearen Kongruenz C_r^q sind die ∞^2 einscharig in C_r^q enthaltenen Flächen eines F^2-Bündels $\pi(F^2)$ autopolar.	Für einen gegebenen linearen Komplex Γ im Γ-Gebüsch der linearen Kongruenz C_r^q sind die ∞^2 linearen Komplexe eines im Γ-Gebüsch enthaltenen Γ-Bündels $\pi(\Gamma)$ nullinvariant.

3) Dieser Ausdruck und mehrere weitere Fachausdrücke des Abschnittes I sind den in Anm. 2 genannten Abhandlungen entnommen. Sie sind hier durch „. . ." gekennzeichnet.

4) Die symmetrische Determinante jeder einscharig in C_r^q enthaltenen Fläche zweiter Ordnung hat den Rang zwei, wenn diese Bedingung erfüllt ist.

Ist bei festen Parameterverhältnissen $\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_4$:

$\mu_1 x_1 x_3 + \mu_2 x_1 x_4 + \mu_3 x_2 x_3 - \mu_4 x_2 x_4 = 0$	$\mu_1 p_{13} + \mu_2 p_{14} + \mu_3 p_{23} + \mu_4 p_{42} = 0$
die Gleichung der Fläche P_μ^2,	die Gleichung des linearen Komplexes Γ_μ,

so sind P_μ^2 und Γ_μ einander adjungiert. Aus der Gleichung

der Fläche P_μ^2	des Komplexes Γ_μ
geht die Gleichung	
ihres „Polar-F^2-Bündels" $\pi(F^2)$	seines „Polar-Γ-Bündels" $\pi(\Gamma)$

vermöge der bilinearen Beziehung $\mu_1 \lambda_4 + \mu_2 \lambda_3 + \mu_3 \lambda_2 + \mu_4 \lambda_1 = 0$ hervor, und sie lautet:

$\pi(F^2) = \lambda_1(\mu_1 x_1 x_3 + \mu_4 x_2 x_4) + \lambda_2(\mu_1 x_1 x_4 + \mu_3 x_2 x_4) + \lambda_3(\mu_1 x_2 x_3 + \mu_2 x_2 x_4) = 0.$	$\pi(\Gamma) = \lambda_1(\mu_1 p_{13} - \mu_4 p_{42}) + \lambda_2(\mu_1 p_{14} - \mu_3 p_{42}) + \lambda_3(\mu_1 p_{23} - \mu_2 p_{42}) = 0.$
Wird jeder einscharig in C_r^q enthaltenen Fläche zweiter Ordnung P_μ^2 der Bündel $\pi(F^2)$ der für sie autopolaren Flächen zweiter Ordnung von C_r^q zugeordnet, so sind die Flächen P_μ^2 und die Bündel $\pi(F^2)$ als „Polflächen" und „Polar-F^2-Bündel" korrelativ aufeinander bezogen. Sie bilden so das „polare F^2-Gebüsch" der linearen Kongruenz C_r^q.	Wird jedem linearen Komplexe Γ_μ des Γ-Gebüsches von C_r^q der Bündel $\pi(\Gamma)$ der für ihn nullinvarianten linearen Komplexe von C_r^q zugeordnet, so sind die Komplexe Γ_μ und die Bündel $\pi(\Gamma)$ als „Polkomplexe" und „Polar-Γ-Bündel" korrelativ aufeinander bezogen. Sie bilden so das „polare Γ-Gebüsch" der linearen Kongruenz C_r^q.

Sind die Fläche P_μ^2 des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ und der lineare Komplex Γ_μ des polaren Γ-Gebüsches $\Pi(\Gamma)$ einander adjungiert, so sind auch die ∞^2 Flächen des Polar-F^2-Bündels $\varkappa(F^2)$ bzw. den ∞^2 linearen Komplexen des Polar-Γ-Bündels $\pi(\Gamma)$ adjungiert. Das polare F^2-Gebüsch und das polare Γ-Gebüsch der linearen Strahlenkongruenz C_r^q sind perspektiv.

5. Nach Nr. 3 sind die ∞^2 je in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenen Regelflächen zweiter Ordnung des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ den ∞^2 speziellen linearen Komplexen des polaren Γ-Gebüsches $\Pi(\Gamma)$ adjungiert. Jeder Kongruenzstrahl p ist die Doppelpunktsgerade je einer solchen zerfallenen Fläche zweiter Ordnung. Die (reellen oder konjugiert imaginären) Ebenen der beiden Strahlenbüschel verbinden p mit den (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden der Kongruenz. Der Strahl p ist zugleich die Leitgerade des

adjungierten speziellen linearen Komplexes. Für diese speziellen Elemente gilt nun:

Im polaren F^2-Gebüsch $\Pi(F^2)$ besteht der Polar-F^2-Bündel $\pi(F^2)$ einer zerfallenen Fläche zweiter Ordnung P^2 aus dieser Fläche und aus allen übrigen durch die Doppelpunktsgerade p von P^2 gehenden Flächen zweiter Ordnung des F^2-Gebüsches. Im polaren F^2-Gebüsch $\Pi(F^2)$ heißt jede solche mit ihrem Polar-F^2-Bündel inzidente Fläche „Inzidenzfläche" und ihr Polar-F^2-Bündel „Inzidenz-F^2-Bündel". Da die Inzidenzflächen die einscharig in C_r^q enthaltenen zerfallenen Flächen zweiter Ordnung sind und ihre Doppelpunktsgeraden die lineare Kongruenz C_r^q erfüllen, so heißt letztere die „Inzidenzkongruenz" des polaren F^2-Gebüsches.

Im polaren Γ-Gebüsch $\Pi(\Gamma)$ besteht der Polar-Γ-Bündel $\pi(\Gamma)$ eines speziellen linearen Komplexes Γ aus diesem Komplexe und aus allen übrigen durch die Leitgerade p von Γ gehenden linearen Komplexen des Γ-Gebüsches. Im polaren Γ-Gebüsch $\Pi(\Gamma)$ heißt jeder solcher mit seinem Polar-Γ-Bündel inzidente lineare Komplex „Inzidenzkomplex" und sein Polar-Γ-Bündel „Inzidenz-Γ-Bündel". Da die Inzidenzkomplexe die speziellen linearen Komplexe von $\Pi(\Gamma)$ sind und ihre Leitgeraden die lineare Kongruenz C_r^q erfüllen, so heißt letztere die „Inzidenzkongruenz" des polaren Γ-Gebüsches.

6. Zwei gegebene Flächen zweiter Ordnung P_μ^2, P_ν^2 des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ werden durch einen Büschel solcher Flächen verbunden. Aus ihren Gleichungen folgt die Darstellung des sie verbindenden F^2-Büschels mittels eines Parameterquotienten $\varkappa_1 : \varkappa_2$:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^2 = {} & (\varkappa_1\mu_1 + \varkappa_2\nu_1)\, x_1 x_3 \\ & + (\varkappa_1\mu_2 + \varkappa_2\nu_2)\, x_1 x_4 \\ & + (\varkappa_1\mu_3 + \varkappa_2\nu_3)\, x_2 x_3 \\ & - (\varkappa_1\mu_4 + \varkappa_2\nu_4)\, x_2 x_4 = 0. \end{aligned}$$

Die den Flächen P_μ^2, P_ν^2 zugeordneten Polar-F^2-Bündel $\pi_\mu(F^2)$, $\pi_\nu(F^2)$ schneiden einander in einem F^2-Büschel $\pi_{\mu\nu}^2$, und von den beiden Büscheln $F_{\mu\nu}^2$, $\pi_{\mu\nu}^2$ ist jede Fläche des einen Büschels für alle Flächen des anderen autopolar. $F_{\mu\nu}^2$, $\pi_{\mu\nu}^2$ sind zwei „reziprok polare F^2-Büschel" im polaren F^2-Gebüsch $\Pi(F^2)$.

Zwei gegebene lineare Komplexe Γ_μ, Γ_ν des polaren Γ-Gebüsches $\Pi(\Gamma)$ werden durch einen Büschel solcher Komplexe verbunden. Aus ihren Gleichungen folgt die Darstellung des sie verbindenden Γ-Büschels mittels eines Parameterquotienten $\varkappa_1 : \varkappa_2$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu} = {} & (\varkappa_1\mu_1 + \varkappa_2\nu_1)\, p_{13} \\ & + (\varkappa_1\mu_2 + \varkappa_2\nu_2)\, p_{14} \\ & + (\varkappa_1\mu_3 + \varkappa_2\nu_3)\, p_{23} \\ & + (\varkappa_1\mu_4 + \varkappa_2\nu_4)\, p_{42} = 0. \end{aligned}$$

Die den Komplexen Γ_μ, Γ_ν zugeordneten Polar-Γ-Bündel $\pi_\mu(\Gamma)$, $\pi_\nu(\Gamma)$ schneiden einander in einem Γ-Büschel $\pi_{\mu\nu}$, und von den beiden Büscheln $\Gamma_{\mu\nu}$, $\pi_{\mu\nu}$ ist jeder Komplex des einen Büschels für alle Komplexe des anderen nullinvariant. $\Gamma_{\mu\nu}$, $\pi_{\mu\nu}$ sind zwei „reziprok polare Γ-Büschel" im polaren Γ-Gebüsch $\Pi(\Gamma)$.

Aus der Gleichung eines Büschels $F_{\mu\nu}^2$ bzw. $\Gamma_{\mu\nu}$ geht die Gleichung des reziprok polaren Büschels vermöge der beiden bilinearen Beziehungen $\mu_1\lambda_4 + \mu_2\lambda_3 + \mu_4\lambda_1 + \mu_3\lambda_2 = 0$, $\nu_1\lambda_4 + \nu_2\lambda_3 + \nu_4\lambda_1 + \nu_2\lambda_1 + \nu_3\lambda_2 = 0$ hervor und lautet:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix} \left[\begin{vmatrix} \mu_1 & -\mu_4 \\ x_2x_4 & x_1x_3 \end{vmatrix} \lambda_1 + \begin{vmatrix} \mu_1 & -\mu_3 \\ x_2x_4 & x_1x_4 \end{vmatrix} \lambda_2 \right] \\ & + \begin{vmatrix} \mu_1 & -\mu_2 \\ x_2x_4 & x_2x_3 \end{vmatrix} \left[\begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \lambda_1 + \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix} \lambda_2 \right] = 0. \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix} \left[\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_4 \\ p_{42} & p_{13} \end{vmatrix} \lambda_1 + \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_3 \\ p_{42} & p_{14} \end{vmatrix} \lambda_2 \right] \\ & + \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ p_{42} & p_{23} \end{vmatrix} \left[\begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \lambda_1 + \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix} \lambda_2 \right] = 0. \end{aligned}$$

II. Die lineare Strahlenkongruenz abgebildet auf die Gaußsche Zahlenebene.

7. Nach Einführung der beiden zueinander inversen Transformationen:

$$\text{(III)} \quad \begin{aligned} & p_{13} = p_1 + ip_2, \quad p_{42} = p_1 - ip_2, \quad p_{14} = p_3 + p_4, \\ & p_{23} = p_3 - p_4, \quad p_{12} = p_5 + ip_6, \quad p_{34} = p_5 - ip_6; \end{aligned}$$

$$\text{(III a)} \quad \begin{aligned} & p_1 = p_{13} + p_{42}, \quad p_2 = -i(p_{13} - p_{42}), \quad p_3 = p_{14} + p_{23}, \\ & p_4 = p_{14} - p_{23}, \quad p_5 = p_{12} + p_{34}, \quad p_6 = -i(p_{12} - p_{34}) \end{aligned}$$

kann die im Abschnitt I betrachtete allgemeine lineare Kongruenz C_r^q sowohl durch $p_{12} = p_{34} = 0$ als durch $p_5 = p_6 = 0$ gekennzeichnet werden. Da im zweiten Falle die Fundamentalrelation die Form $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_4^2 = 0$ annimmt, so ist bei Deutung von $\xi = \frac{p_1}{p_4}$, $\eta = \frac{p_2}{p_4}$, $\zeta = \frac{p_3}{p_4}$ als rechtwinklige kartesische Koordinaten die lineare Kongruenz C_r^q auf die Einheitskugel abgebildet. Dabei geht jeder Kongruenzstrahl in einen Kugelpunkt, jede Regelschar zweiter Ordnung in einen Kugelkreis und jede in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallene Regelschar zweiter Ordnung in zwei konjugiert imaginäre Strahlen der Kugel über. Wird hier noch die stereographische Projektion der Kugel auf die Ebene angefügt, so ist damit die lineare

Kongruenz ein-eindeutig auf die Zahlenebene abgebildet, und diese Abbildung drückt sich analytisch aus durch:

$$\text{(IV)} \qquad x = -\frac{p_{13}+p_{42}}{p_{23}}, \quad y = \frac{i(p_{13}-p_{42})}{p_{23}}; \quad \varrho p_{13} = 2(x+iy),$$
$$\varrho p_{42} = 2(x-iy), \quad \varrho p_{14} = x^2+y^2, \quad \varrho p_{23} = -4.$$

Die einscharig in der linearen Kongruenz enthaltene Fläche zweiter Ordnung:

$$\text{(V)} \qquad \mathfrak{a}_{13}p_{13} + \mathfrak{a}_{14}p_{14} + \mathfrak{a}_{42}p_{42} + \mathfrak{a}_{23}p_{23} = 0, \quad p_{12} = p_{34} = 0$$

entspricht in der Ebene dem Kreise:

$$\mathfrak{a}_{14}(x^2+y^2) + 2(\mathfrak{a}_{13}+\mathfrak{a}_{42})x + 2i(\mathfrak{a}_{13}-\mathfrak{a}_{42})y - 4\mathfrak{a}_{23} = 0.$$

Diese Gleichung sowie (III) und (IIIa) lassen erkennen, daß bei reeller Darstellung die Koeffizienten $\mathfrak{a}_{13}$ und $\mathfrak{a}_{42}$ konjugiert komplexe Zahlen sind und die Kreisgleichung dann auch lautet:

$$\mathfrak{a}_{14}z\bar{z} + 2\mathfrak{a}_{13}z + 2\bar{\mathfrak{a}}_{13}\bar{z} - 4\mathfrak{a}_{23} = 0.$$

Die in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallene Regelschar zweiter Ordnung geht in den Punkt der Ebene mit seinen beiden isotropen Geraden über. — Die in Nr. 2—6 behandelte Polarentheorie der linearen Kongruenz spiegelt sich in der Theorie einander senkrecht schneidender Kreise wider. Dabei kann in der Kongruenz sowohl die Regelschar zweiter Ordnung als auch ihr adjungierter linearer Komplex (3) zugrunde gelegt werden. Beide Gebilde sind durch (V) ausgedrückt, und die Bedingung für die Autopolarität zweier Flächen zweiter Ordnung R^2, R'^2 der Kongruenz sowie für die Nullinvarianz ihrer adjungierten Komplexe (4):

$$\mathfrak{a}_{13}\mathfrak{a}_{42}' + \mathfrak{a}_{42}\mathfrak{a}_{13}' + \mathfrak{a}_{23}\mathfrak{a}_{14}' + \mathfrak{a}_{14}\mathfrak{a}_{23}' = 0$$

gewährleistet zugleich die Orthogonalität ihrer beiden Bildkreise.

8. Bei der Abbildung der linearen Kongruenz auf die Ebene stellt jede ebene Kurve eine einscharig in der Kongruenz enthaltene Regelfläche dar, ein Doppelpunkt der Kurve einen Doppelstrahl der Fläche, ein Brennpunkt der Kurve ist Bild eines Kongruenzstrahles, dessen Verbindungsebenen mit den beiden Leitgeraden die Fläche berühren. Insbesondere gilt folgender wichtige Satz der Abbildung:

„Die ∞^1 Berührungskreise einer ebenen Kurve in einem Punkte P sind die Bilder der ∞^1 einscharig in der linearen Kongruenz enthaltenen Regelflächen zweiter Ordnung, welche die zur Kurve gehörige Regelfläche längs des entsprechenden Kongruenzstrahles p berühren. Der Krümmungskreis der Kurve in P ist das Bild des längs p oskulierenden Hyperboloides. Zwei einander längs eines Kongruenzstrahles berührende Regelflächen gehen in zwei einander in einem Punkte berührende Kurven der Bildebene über.“

III. Die Gerade-Kugel-Transformation der linearen Kongruenz.

9. Die bereits im Abschnitte II herangezogene Einheitskugel $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 1$ wird durch affine Dehnung in das Rotationsellipsoid:

$$\text{(VI)} \qquad M^2: \quad \xi^2+\eta^2+\frac{\zeta^2}{\mathfrak{a}^2} = 1$$

verwandelt, dessen Brennpunkte auf der ζ-Achse in den Abständen $\pm\varepsilon = \pm\sqrt{\mathfrak{a}^2-1}$ vom Anfangspunkte liegen. Werden um die beiden Brennpunkte als Mittelpunkte zwei Kugeln K_1, K_2 gelegt, deren Radien r_1, r_2 den Bedingungen $r_2 - r_1 = 2\mathfrak{a}$, $r_2 > r_1 > 0$ genügen, so liegen die Mittelpunkte aller Kugeln, welche K_1 und K_2 gleichsinnig berühren, auf jenem Rotationsellipsoid.[5]) Diese ∞^2 Kugeln erfüllen die Kugelkongruenz $[K_1K_2]$ mit den „Leitkugeln“ K_1, K_2. Das Rotationsellipsoid M^2 heiße die „Mittelpunktsfläche“ der Kugelkongruenz. Die Leitkugeln haben die Gleichungen:

$$\text{(VII)} \quad K_1: \quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2-2\varepsilon\zeta+(\varepsilon^2-r_1^2) = 0,$$
$$K_2: \quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2+2\varepsilon\zeta+(\varepsilon^2-r_2^2) = 0.$$

Werden in der Kugelgleichung $\xi^2+\eta^2+\zeta^2-2\alpha\xi-2\beta\eta-2\gamma\zeta+c = 0$ die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \varrho, c$ zu Kugelkoordinaten bestimmt, wo der Kugelradius ϱ der Gleichung $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\varrho^2-c = 0$ genügt, so stellt sich die Kugelkongruenz $[K_1K_2]$ durch die Gleichungen dar:

$$\text{(VIII)} \quad \varrho = \frac{4\varepsilon\gamma+(r_2^2-r_1^2)}{4\mathfrak{a}}, \quad c = \frac{(\varrho-r_1)^2+(\varrho-r_2)^2}{2} - (\varepsilon^2+\varrho^2).$$

Ein gegebener Punkt der Mittelpunktsfläche M^2 ist je der Mittelpunkt *einer* Kongruenzkugel. Er geht durch affine Dehnung aus dem senkrecht unter ihm gelegenen Punkte der Einheitskugel hervor und dieser durch stereographische Projektion aus einem Punkte der Zahlenebene. Demnach werden die Punkte der Zahlenebene durch stereographische Projektion und darauffolgende Affinität ein-eindeutig auf die Punkte der Mittelpunktsfläche M^2 und damit auf die Kugeln der Kugelkongruenz $[K_1K_2]$ abgebildet. Hier folgt nun:

„Die Abbildung der Ebene auf die Kugelkongruenz führt eine gegebene ebene Kurve ein-eindeutig in eine einscharig in der Kugelkongruenz enthaltene Kugelhüllfläche über. Die Kreise der Ebene entsprechen den einscharig in der Kugelkongruenz enthaltenen Dupin-Zykliden. Die ∞^1 Berührungskreise einer ebenen Kurve in einem Punkte sind die Bilder der ∞^1 Dupin-Zykliden, welche die zur Kurve gehörige Kugelhüllfläche längs einer Kreis-Krümmungslinie berühren. Unter ihnen entspricht der Krümmungskreis einer oskulierenden Zyklide. Zwei einander be-

5) J. Steiner, Allg. Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise u. Kugeln. Aus dem Nachlaß herausgegeben. Zürich u. Leipzig 1931, S. 232.

rührende Kurven gehen aus zwei einander (längs einer Kreis-Krümmungslinie) berührenden Kugelhüllflächen hervor."

Die Abbildung der Kugelkongruenz und der Ebene aufeinander ergibt die Substitutionen:

$$\text{(IX)} \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{4x}{x^2+y^2+4}, \quad \beta = \dfrac{4y}{x^2+y^2+4}, \quad \gamma = \mathfrak{a} \cdot \dfrac{x^2+y^2-4}{x^2+y^2+4}, \\ \varrho = \varepsilon \cdot \dfrac{x^2+y^2-4}{x^2+y^2+4} + \dfrac{r_1+r_2}{2}, \quad x = \dfrac{2\alpha}{1-\dfrac{\gamma}{\alpha}}, \quad y = \dfrac{2\beta}{1-\dfrac{\gamma}{\alpha}}. \end{cases}$$

10. Die Abbildung der linearen Kongruenz C_r^q auf die Ebene (Abschn. II) und die Abbildung der Ebene auf die Kugelkongruenz $[K_1 K_2]$ schließen sich zur „Gerade-Kugel-Abbildung der linearen Strahlenkongruenz C_r^q auf die Kugelkongruenz $[K_1 K_2]$" zusammen, nämlich:

„*Durch die Gerade-Kugel-Abbildung geht jede einscharig in C_r^q enthaltene Regelfläche in eine einscharig in $[K_1 K_2]$ enthaltene Kugelhüllfläche über, zwei Regelflächen, die einander längs eines Kongruenzstrahles berühren, entsprechen zwei Kugelhüllflächen, die einander längs einer Kreis-Krümmungslinie berühren, insbesondere entsprechen die Regelflächen zweiter Ordnung den Dupin-Zykliden.*"

Eine Regelfläche hat in jedem ihrer Punkte den durch diesen Punkt gehenden Regelstrahl s zur ersten Haupttangente; die zweiten Haupttangenten der ∞^1 Punkte des Regelstrahles s erfüllen die eine Regelschar des längs s oskulierenden Hyperboloides. Dieses Hyperboloid geht aber bei der Gerade-Kugel-Abbildung in die oskulierende Dupin-Zyklide der entsprechenden Kugelhüllfläche über (8 und 9). Den beiden Regelscharen des oskulierenden Hyperboloides entsprechen die beiden Hüllkugelscharen dieser Zyklide. Die Berührungskreise beider Kugelscharen mit der Hüllfläche geben in jedem Punkte die Hauptkrümmungsrichtungen der allgemeinen Kugelhüllfläche an. Daraus folgt:

„*Die Gerade-Kugel-Abbildung verwandelt Haupttangentenkurven und Hauptkrümmungskurven ineinander.*"

Aus den Gleichungen IV und IX resultieren die folgenden Substitutionen für die Gerade-Kugel-Abbildung der linearen Strahlenkongruenz C_r^q:

$$\alpha = \frac{p_{13}+p_{42}}{p_{14}-p_{23}}, \quad \beta = \frac{p_{13}-p_{42}}{i\,(p_{14}-p_{23})}, \quad \gamma = \frac{\mathfrak{a}\,(p_{14}+p_{23})}{p_{14}-p_{23}},$$

$$\varrho = \frac{\varepsilon\,(p_{14}+p_{23})}{p_{14}-p_{23}} + \frac{r_1+r_2}{2}.$$

(Eingegangen am 25. 11. 1931.)