

# Über die Trägheitsflächen des polaren Raumes,

VON

Gerhard HAENZEL in Berlin.

Schon Culmann<sup>(1)</sup> hat gezeigt, dass ein endlich begrenztes Raumstück durch seine Zentrifugal- und Trägheitsmomente mit dem (reellen) polaren Raume einer imaginären Fläche zweiter Ordnung eng verknüpft ist. Später hat Herr Jolles<sup>(2)</sup> die Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente eines Raumstückes einer einfachen projektiv-geometrischen Behandlungsweise zugänglich gemacht. Das Trägheitsellipsoid eines gegebenen Punktes und die mit ihm zusammenhängenden Theoreme über die Zentrifugal- und Trägheitsmomente ergeben sich dabei als geometrische Eigenschaften eines reellen polaren Raumes, der seinerseits durch das gegebene Raumstück bestimmt ist.

Der mit dem Raumstück verbundene polare Raum hat stets eine imaginäre Inzidenzfläche. Seine für die Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente wesentlichen Sätze bleiben aber auch in Kraft, wenn als Inzidenzfläche ein Ellipsoid, ein Strahlenhyperboloid oder ein strahlenloses Hyperboloid zu Grunde liegt. An Stelle der Trägheitsellipsoide treten dann andere (reelle oder imaginäre) Flächen zweiter Ordnung und es gelingt in der folgenden Abhandlung die Theorie dieser „Trägheitsflächen des polaren Raumes“ in ihren Grundzügen zu entwickeln. Dabei entspricht es der Natur der Sache, dass manche der angegebenen Resultate für den speziellen Fall des (reellen) polaren Raumes mit imaginärer Inzidenzfläche bereits von Herrn Jolles bewiesen wurden.

1. Die Inzidenzfläche  $I^2$  eines gegebenen reellen polaren Raumes sei ein Ellipsoid, ein Strahlenhyperboloid, ein strahlenloses Hyperboloid oder eine imaginäre Fläche zweiter Ordnung. Ein gegebener Durchmesser  $d$  trägt im polaren Raume eine (hyperbolische oder elliptische) Involution konjugierter Punkte. Ein gegebener Punkt  $P$  von  $d$  (Fig.) hälftet den Abstand zweier (reellen oder konjugiert

---

(<sup>1</sup>) Culmann, Die graphische Statik, 2. Aufl., 3. Abschn., 3. Kap., Nr. 106. Zürich 1875.

(<sup>2</sup>) Hell Jolles, Synthetische Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente eines Raumstückes, Archiv d. Mathem. u. Physik, 4. Bd., 1902.



Die beiden Paare paralleler Ebenen  $\gamma, \gamma_1$  bestimmen ein vollständiges Vierkant. Das dritte Paar Gegenebenen des Vierkant sind  $\xi_1$  und die Verbindungsebene  $\xi$  der Schnittstrahlen  $(\gamma\mu)$  und  $(\gamma_1\mu_1)$ . In diesem vollständigen Vierkant sind nicht nur die Gegenebenen  $\gamma, \gamma_1$  einander konjugiert, sondern auch die Gegenebenen  $\xi, \xi_1$ , weil  $\xi$  den der Ebene  $\xi_1$  konjugierten Strahl  $\xi$  von  $P$  enthält. Also sind auch  $\mu, \mu_1$  als drittes Paar Gegenebenen einander konjugiert, wir haben ein Polvierkant des polaren Raumes vor uns. Durchlaufen  $\xi, \xi_1$  den polaren Bündel  $P$ , so beschreiben die konjugierten Ebenen  $\mu, \mu_1$  einen Ebenenbündel zweiter Ordnung (mit dem Mittelpunkte  $P$ ), das Erzeugnis der korrelativen ebenen Felder  $\gamma, \gamma_1$ . Somit gilt:

*„In einem polaren Raume umhüllen die von einem gegebenen Punkte  $P$  paarweise gleich weit entfernten, einander parallel und konjugierten Ebenen eine Fläche zweiter Ordnung  $\Pi^2$  mit dem Mittelpunkte  $P$ . Die im polaren Raume konjugierten Strahlen und Ebenen von  $P$  sind konjugierte Durchmesser und Durchmesserbenen von  $\Pi^2$ .“*

Der Berührungskegel von  $P$  an die Inzidenzfläche des polaren Raumes ist der Asymptotenkegel der Fläche  $\Pi^2$ .

Gehören zu drei Punkten der Ebene  $\gamma$  die Gleichungen  $U=0, V=0, W=0$  und zu drei Punkten von  $\gamma_1$  die Gleichungen  $U_1=0, V_1=0, W_1=0$ , so wird der Schnittpunkt  $X$  des gegebenen Strahles  $\xi$  von  $P$  mit  $\gamma$  mittels dreier Parameter  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  individualisiert durch:

$$\lambda_1 U + \lambda_2 V + \lambda_3 W = 0.$$

In analoger Weise lässt sich der Punkt  $X_1$  von  $\gamma_1$  durch  $U_1, V_1, W_1$  mittels dreier Parameter  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  festlegen. Wird nun in der oben beschriebenen Weise dem Punkte  $X$  von  $\gamma$  der Strahl  $x_1$  von  $\gamma_1$  zugeordnet, in dem die  $\xi$  konjugierte Ebene  $\xi_1$  von  $P$  die Ebene  $\gamma_1$  schneidet, so sind dadurch die ebenen Felder  $\gamma, \gamma_1$  korrelativ aufeinander bezogen; das zieht bekanntlich eine Relation nach sich von der Form:

$$\sum_{i,k} \tau_{ik} \lambda_i \mu_k = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Der von den beiden korrelativen Feldern soeben erzeugte Ebenenbündel zweiter Ordnung legitimiert sich analytisch durch:

$$\begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} & U \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} & V \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} & W \\ U & V & W & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Ausführungen der Einleitung werden die erzeugten Flächen zweiter Ordnung als die „Trägheitsflächen des polaren Raumes“ bezeichnet.

2. Die polare Korrelation des gegebenen polaren Raumes mit der Inzidenzfläche  $\Gamma^2$  werde symbolisch mit  $\Gamma$  bezeichnet; sie ist mit  $\infty^3$  perspektiv involutorischen Kollineationen  $K$  vertauschbar<sup>(1)</sup>. Nämlich ein gegebener Punkt  $P$  und seine Polarebene  $\pi$  für  $\Gamma^2$  sind Involutionzentrum und Involutionsebene einer perspektiven Involution  $K$ , die mit  $\Gamma$  vertauschbar ist. Aus jeder solchen perspektiven Involution  $K$  und der polaren Korrelation  $\Gamma$  resultiert je eine neue polare Korrelation:

$$\Gamma_1 = K\Gamma = \Gamma K,$$

die wiederum mit  $\Gamma$  vertauschbar ist. Einem gegebenen Punkte  $A$  der Involutionsebene  $\pi$  wird durch  $\Gamma$  und  $\Gamma_1$  ein und dieselbe Polarebene zugeordnet. Die Inzidenzflächen beider polaren Korrelationen berühren einander längs ihres in  $\pi$  liegenden Kegelschnittes und beide Inzidenzflächen sind füreinander polarinvariant. Insbesondere bestimmen der Mittelpunkt  $S$  des gegebenen polaren Raumes und die unendlich ferne Ebene als Involutionzentrum und Involutionsebene eine spezielle perspektive Involution, nämlich die Spiegelung  $\Sigma$  am Punkte  $S$ . Aus  $\Sigma$  und  $\Gamma$  resultiert die polare Korrelation:

$$\Sigma_1 = \Gamma\Sigma = \Sigma\Gamma$$

und die Inzidenzfläche  $\Sigma^2$  von  $\Sigma_1$  fällt mit der Trägheitsfläche zusammen, die im polaren Raume von  $\Gamma^2$  dem Mittelpunkte  $S$  zu. Sie wird von dem von  $S$  paarweise gleich weit entfernten, einander parallelen und konjugierten Ebenen umhüllt. Wir nennen sie die „zentrale Trägheitsfläche“ des gegebenen polaren Raumes und folgern:

„Die Inzidenzfläche  $\Gamma^2$  eines polaren Raumes und seine zentrale Trägheitsfläche  $\Sigma^2$  sind füreinander polarinvariant; sie sind kon-

(1) Reye, Geometrie der Lage, III. Abtlg. 26. Vortrag, Leipzig 1910.

zentrisch und je zwei parallele Tangentialebenen der einen Fläche sind konjugiert bzgl. der anderen Fläche.“

3. Ein gegebener polarer Raum teilt sich hinsichtlich seiner Trägheitsflächen von selbst in verschiedene Bereiche:

a) Ist die Inzidenzfläche des polaren Raumes ein *Ellipsoid*, so haben alle Punkte innerhalb desselben imaginäre Trägheitsflächen. Alle äusseren Punkte besitzen strahlenlose Hyperboloide als Trägheitsflächen und jedes derselben schneidet die Inzidenzfläche  $I^2$  in dem einzigen reellen Zweige einer biquadratischen Raumkurve erster Art.

b) In einem polaren Raume, dessen Inzidenzfläche ein *Strahlenhyperboloid* ist, haben alle Punkte im Innern der Inzidenzfläche Strahlenhyperboloide als Trägheitsflächen, alle äusseren Punkte dagegen strahlenlose Hyperboloide. Erstere schneiden die Inzidenzfläche in einer biquadratischen Raumkurve erster Art mit einem reellen Zweige, letztere schneiden die Inzidenzfläche in einer imaginären biquadratischen Raumkurve erster Art.

c) Hat der polare Raum ein *strahlenloses Hyperboloid* zur Inzidenzfläche, so sind die Trägheitsflächen aller inneren Punkte Ellipsoide und schneiden die Inzidenzfläche in einer biquadratischen Raumkurve erster Art mit einem reellen Zweige; im Aussengebiete gehört dagegen zu jedem Punkte je ein Strahlenhyperboloid als Trägheitsfläche. Es schneidet die Inzidenzfläche in einer imaginären biquadratischen Raumkurve erster Art.

d) Der polare Raum mit *imaginärer* Inzidenzfläche enthält nur Trägheitsellipsoide.

4. Die  $\infty^2$  Trägheitsflächen, deren Mittelpunkte eine gegebene Ebene  $\pi$  erfüllen, berühren (1) die beiden von  $\pi$  gleich weit entfernten parallelen und konjugierten Ebenen in  $\infty^2$  Punktepaaren. Eines derselben,  $P_1, P_2$ , greifen wir heraus; in ihm berühre die Trägheitsfläche  $H^2$  jene beiden Ebenen. Dann ist der Verbindungsstrahl  $P_1P_2$  für  $H^2$  der zu der Durchmesserenebene  $\pi$  konjugierte Durchmesser. Der Strahl  $P_1P_2$  ist daher auch im polaren Raume zu der Ebene  $\pi$  konjugiert (1) und es folgt:

„Die  $\infty^2$  Trägheitsflächen des polaren Raumes, deren Mittelpunkte eine gegebene Ebene  $\pi$  erfüllen, berühren die beiden von  $\pi$  gleich weit entfernten, konjugierten Ebenen in Punktepaaren, deren Verbindungsstrahlen durch den Pol der Ebene  $\pi$  gehen“.

5. Die Trägheitsflächen der Punkte eines Durchmessers  $d$  des

polaren Raumes schneiden den Durchmesser  $d$  in den Punktepaaren der von  $d$  im polaren Raume getragenen Involution konjugierter Punkte. Es sei nun  $II^2$  eine solche Trägheitsfläche mit dem Mittelpunkte  $P$  und es sei  $p_a$  ihre auf  $d$  liegende (reelle oder imaginäre) Durchmesserhalbsehne. Die Inzidenzfläche  $I^2$  des polaren Raumes mit dem Mittelpunkte  $S$  enthalte auf  $d$  die (reelle oder imaginäre) Durchmesserhalbsehne  $g_a$ . Dann gilt die Gleichung:

$$p_a^2 = -g_a^2 + SP^2.$$

Alle Trägheitsflächen, deren Mittelpunkte den Durchmesser  $d$  erfüllen, berühren die von  $d$  paarweise gleich weit entfernten, konjugierten Ebenen und werden deshalb von ein und demselben quadratischen Zylinder in kongruenten Kegelschnitten umhüllt. Denn die Ebenen dieser Berührungskegelschnitte sind dem Durchmesser  $d$  konjugiert, also untereinander parallel. Ist  $s^2$  die Quadratsumme dreier paarweise konjugierten Durchmesserhalbsehnens der zentralen Trägheitsfläche  $\Sigma^3$ , so berechnet sich diese Quadratsumme  $p^2$  für die gegebene Trägheitsfläche  $II^2$  mit dem Mittelpunkte  $P$  nunmehr nach der Formel:

$$p^2 = s^2 + SP^2.$$

Hieraus folgt gleichzeitig der Satz:

„Die Mittelpunkte der  $\infty^2$  Trägheitsflächen, für welche die Quadratsumme dreier paarweise konjugierten Durchmessersehnens je denselben Wert hat, erfüllen je eine mit dem polaren Raume konzentrische Kugel.“

6. Der Achsenkomplex des polaren Raumes ist—wie bekannt—ein tetraedraler quadratischer Strahlenkomplex und besteht aus den Hauptachsen aller Trägheitsflächen. Die Schar der mit dem polaren Raume konfokalen Flächen zweiter Ordnung sendet durch einen gegebenen Punkt  $P$  je ein Ellipsoid, ein strahlenloses Hyperboloid und ein Strahlenhyperboloid, die einander in  $P$  senkrecht schneiden, sodass mit ihren drei Normalen in  $P$  die Hauptachsen der Trägheitsfläche von  $P$  zusammenfallen.

Eine gegebene Gerade  $g$  wird von zwei der konfokalen Flächen berührt. Die mit  $g$  inzidenten Tangentialebenen  $\tau, \tau'$  dieser Flächen stehen aufeinander senkrecht. Die Paare der Berührungsebenen durch  $g$  an die konfokalen Flächen sind die Ebenenpaare einer symmetrischen Ebeneninvolution mit den normalen Doppelsebenen

$\tau, \tau'$ . Ist  $g$  eine Achse des polaren Raumes mit dem Fusspunkte  $P$ , so fallen mit  $\tau, \tau'$  zwei Symmetrieebenen der Trägheitsfläche  $H^2$  von  $P$  zusammen. Das gegebene Ebenenpaar  $\tau, \tau'$  jener *symmetrischen* Ebeneninvolution berühre die Fläche  $K^2$  aus der Schar der konfokalen Flächen. Dann haben die zu  $\tau$  parallelen und konjugierten Ebenen  $\pi, \pi_1$  von  $\tau$  denselben Abstand, den die zu  $\tau'$  parallelen und konjugierten Ebenen  $\pi', \pi'_1$  von  $\tau'$  haben. Gleitet  $\tau'$  an der Fläche  $K^2$ , so bleibt die Länge dieses Abstandes ungeändert. Somit ist bewiesen:

„Die  $\infty^3$  Trägheitsflächen deren Mittelpunkte je eine mit dem polaren Raume konfokale Fläche erfüllen, enthalten auf ihren mit den Normalen der konfokalen Fläche zusammenfallenden Hauptachsen je gleiche Achsenabschnitte.“

7. Ist die Inzidenzfläche des polaren Raumes ein Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} + \frac{z^2}{a_3} = 1, \quad 0 < a_3 < a_2 < a_1,$$

so weist die Parameterdarstellung der mit ihr konfokalen Flächen:

$$\frac{x^2}{a_1 + \lambda} + \frac{y^2}{a_2 + \lambda} + \frac{z^2}{a_3 + \lambda} = 1$$

einem gegebenen Punkte  $P$  in einem der Oktanten des Raumes die Parameterwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  der drei mit  $P$  inzidenten (reellen) konfokalen Flächen als *elliptische* Koordinaten zu und es ist bekannt, welche Intervalle des Parameters  $\lambda$  je die konfokalen Ellipsoide, Strahlenhyperboloide, strahlenlose Hyperboloide und imaginären konfokalen Flächen liefern. Ist aber die Inzidenzfläche ein Hyperboloid oder eine imaginäre Fläche (mit reellem polaren Raume)—was in den obigen Gleichungen doch nur eine Vorzeichenänderung der  $a_1, a_2, a_3$  bedingt—so werden jene von  $\lambda$  durchlaufenen Intervalle ihre Rollen in leicht angebbarer Weise zu vertauschen haben, um abermals die verschiedenen Arten der konfokalen Flächen zu konstituieren. Die (reelle oder imaginäre) Inzidenzfläche des (reellen) polaren Raumes lässt sich daher stets der Parameterdarstellung seiner konfokalen Flächen und einem System elliptischer Koordinaten seiner Punkte zu Grunde legen.

Liegt unter diesen Umständen ein gegebener Punkt  $X$  auf der konfokalen Fläche mit dem Parameterwerte  $\lambda_x$ , so fällt (6.) die eine Hauptachse seiner Trägheitsfläche mit der Normalen der konfokalen

Fläche in  $X$  zusammen. Die auf der Normale liegende halbe Achsensehne der Trägheitsfläche hat (nach Anwendung des Satzes der Nr. 6 und der ersten Gleichung der Nr. 5) die Länge:

$$\varphi = \sqrt{-a_1 + (a_1 + \lambda_x)} = \sqrt{\lambda_x}.$$

Hieraus folgt:

„Liegt die Inzidenzfläche des polaren Raumes einem Systeme elliptischer Koordinaten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  zu Grunde, so hat die Trägheitsfläche eines gegebenen Punktes  $P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  die Hauptachsenlängen:  $\alpha = 2\sqrt{\lambda_1}$ ,  $\beta = \sqrt{\lambda_2}$ ,  $\gamma = 2\sqrt{\lambda_3}$ .“

Weiter zeigt nunmehr einfache Rechnung:

„Die drei Hauptachsen der Trägheitsfläche mit dem Mittelpunkt  $P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  bestimmen gegen die drei Symmetrieebenen des polaren Raumes Richtungen, deren Kosinusse den folgenden neun Grössen proportional sind:

$$\begin{array}{l} \sqrt{\frac{(a_1 + \lambda_2)(a_1 + \lambda_3)}{(a_1 + \lambda_1)(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}} \quad \sqrt{\frac{(a_1 + \lambda_1)(a_1 + \lambda_3)}{(a_1 + \lambda_2)(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}} \quad \sqrt{\frac{(a_1 + \lambda_1)(a_1 + \lambda_2)}{(a_1 + \lambda_3)(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}} \\ \sqrt{\frac{(a_2 + \lambda_2)(a_2 + \lambda_1)}{(a_2 + \lambda_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_1)}} \quad \sqrt{\frac{(a_2 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_3)}{(a_2 + \lambda_2)(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}} \quad \sqrt{\frac{(a_2 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_2)}{(a_2 + \lambda_3)(a_2 - a_3)(a_2 - a_1)}} \\ \sqrt{\frac{(a_3 + \lambda_2)(a_3 + \lambda_3)}{(a_3 + \lambda_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}} \quad \sqrt{\frac{(a_3 + \lambda_1)(a_3 + \lambda_2)}{(a_3 + \lambda_2)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}} \quad \sqrt{\frac{(a_3 + \lambda_1)(a_3 + \lambda_2)}{(a_3 + \lambda_3)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}} \end{array}$$

Die Hauptachsen der  $\infty^3$  Trägheitsflächen eines polaren Raumes erfüllen also seinen Achsenkomplex; die Trägheitsfläche eines gegebenen Punktes ist durch Lage und Länge ihrer Hauptachsenabschnitte auf Grund der beiden letzten Sätze bestimmt. Zu einer gegebenen Trägheitsfläche sind je sieben andere kongruent; die Mittelpunkte der acht Flächen sind je acht assoziierte Punkte von drei verschiedenartigen konfokalen Flächen.

Wird ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt, mit den drei Symmetrieebenen des polaren Raumes als Koordinatenachsen, so ist die Trägheitsfläche eines Punktes  $P(x, y, z)$  durch die in  $\lambda$  kubische Gleichung bestimmt:

$$\begin{aligned} (a_1 + \lambda)(a_2 + \lambda)(a_3 + \lambda) - x^2(a_2 + \lambda)(a_3 + \lambda) - y^2(a_1 + \lambda)(a_3 + \lambda) \\ - z^2(a_1 + \lambda)(a_2 + \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Die Quadratwurzeln aus den drei Lösungen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  der Gleichung ergeben die halben Hauptachsenlängen der Trägheitsfläche, während die Richtungskosinusse dieser Hauptachsen sich folgendermassen darstellen:



$$\begin{array}{c|c|c} \frac{2x}{a_1 + \lambda_1} & \frac{2x}{a_1 + \lambda_2} & \frac{2x}{a_1 + \lambda_3} \\ \frac{2y}{a_2 + \lambda_1} & \frac{2y}{a_2 + \lambda_2} & \frac{2y}{a_2 + \lambda_3} \\ \frac{2z}{a_3 + \lambda_1} & \frac{2z}{a_3 + \lambda_2} & \frac{2z}{a_3 + \lambda_3} \end{array}$$

Zu den kónfokalen Flächen gehören auch die Fokalellipse :

$$\frac{x^2}{a_1 - a_3} + \frac{y^2}{a_2 - a_3} = 1, \quad z = 0$$

und die Fokalhyperbel :

$$\frac{x^2}{a_1 - a_2} - \frac{z^2}{a_3 - a_2} = 1, \quad y = 0$$

des polaren Raumes. Ihre Tangenten sind die Fokalachsen und die Punkte der Fokalkurven sind daher die Mittelpunkte der rotatorischen Trägheitsflächen. Auf weitere Eigenschaften der Trägheitsflächen eines polaren Raumes führt die Theorie seines Achsenkomplexes.