Journal für die reine und angewandte Mathematik.
Herausgegeben von K. Hensel, H. Hasse, L. Schlesinger.
Druck und Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10.

Sonderabdruck aus Band 166 Heft 3. 1932.

Eine analytische Theorie der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz und deren Anwendung.

Von *Gerhard Haenzel* in Berlin-Wittenau.

Die Theorie der Involutionen schien schon lange ein völlig durchforschtes Gebiet der Geometrie zu sein. Die Eigenschaften involutorischer Strahlenbüschel, Punktreihen und Ebenenbüschel erster Ordnung und die der involutorischen Verwandtschaften zwischen Grundgebilden der zweiten Stufe und zwischen Grundgebilden der dritten Stufe sind bekannt. Seit v. Staudt die Involutionen zum Fundament seiner grundlegenden geometrischen Theorie des Imaginären gemacht hatte, konnten wesentliche neue Fortschritte auf diesem Gebiete der Geometrie nicht mehr erzielt werden.

Erst in neuester Zeit erfuhr die Theorie der Involutionen eine tiefgehende Erweiterung dadurch, daß Herr Jolles eine vollständige und organische Theorie aller Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz aufstellte. Die Grundlage für diese Theorie ruht in der Erkenntnis, daß die Paare einander zugeordneter Strahlen einer Involution auf einer linearen Strahlenkongruenz aus reziproken Polaren eines polaren Raumes bestehen, eine Definition, die für alle reellen und imaginären Vorkommnisse in gleicher Weise tragfähig bleibt. Von hier aus wurden erstmalig Involutionen auf zweidimensionalen Gebilden der Strahlengeometrie nachgewiesen, und die Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz dürften nunmehr für den Strahlenraum von ähnlicher Bedeutung sein wie die Involutionen auf den Grundgebilden erster Stufe für den Punkt- und Ebenenraum.

Die diesbezüglichen Untersuchungen des Herrn Jolles[1]) bedienen sich der rein synthetischen Methode. Das liegt aber in der Natur der Sache, denn sie stützen sich unmittelbar auf das v. Staudtsche Werk, und es gelang hier zum ersten Male, die geometrische Theorie des Imaginären sachgemäß zu erweitern.

Welche Ergebnisse das Studium der Involutionen im Strahlenraume für die Geometrie selbst noch zeitigen wird, bleibt abzuwarten. Daneben entsteht schon jetzt die Aufgabe, die neue Theorie auf das Gebiet der Analysis auszudehnen und auf ihre Verwendbarkeit zu prüfen. Zu diesem Zweck müssen zunächst ihre Grundlagen durch einfache analytische Ansätze charakterisiert werden. Dabei leistet die Theorie der Elementarteiler[2]) Dienste, wie denn auch umgekehrt die Theorie involutorischer linearer

[1]) Jolles, Die Involutionen auf einer linearen Strahlenkongruenz, Mathem. Zeitschr. **27** (1928), S. 427. — Als Vorarbeiten dieser grundlegenden Abhandlung sind anzusehen: Primäre und sekundäre polare Räume einer linearen Strahlenkongruenz, Crelle **134** (1908), S. 1. — Die windschief involutorischen Paarungen in einer linearen Strahlenkongruenz, Mathem. Zeitschr. **26** (1927), S. 177.

[2]) Weierstraß, Über Scharen bilinearer und quadratischer Formen, Berl. Monatsber. 1868, S. 310 ff., Ges. Werke Bd. II, S. 19 ff. — Kronecker, Berl. Monatsber. 1874, S. 215, Ges. Werke Bd. I, S. 291—392. — Weitere Literatur und ein Überblick über die Entwicklung der Theorie finden sich bei Muth, Theorie und Anwendung der Elementarteiler, Leipzig 1899.

Strahlenkongruenzen die Elementarteilertheorie als klassifikatorisches Prinzip mitunter ersetzen kann [3]). Dann lassen sich die Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz im vierdimensionalen Raume verwenden. Insbesondere werden durch sie die Kollineationen im vierdimensionalen Raume, deren Untersuchung bisher der Analysis allein vorbehalten war, der inneren Anschauung zugänglich. Daß die Theorie der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz für die nichteuklidische Geometrie von Bedeutung ist, wurde von mir schon kürzlich gezeigt [4]), und ich komme jetzt ausführlich darauf zurück. Die dabei erhaltenen Ergebnisse schaffen die Möglichkeit, die Theorie der involutorischen linearen Strahlenkongruenzen in der vierdimensionalen Welt der Relativitätstheorie zur Anwendung zu bringen, um dadurch manche Resultate der Gravitationstheorie zu der bisher ihnen mangelnden Anschaulichkeit zu erheben. Die von Herrn Einstein gegebene Lösung seiner Feldgleichungen der Gravitation führt auf ein anderes Weltbild als die Lösung des Herrn de Sitter. Die Strukturen beider Weltbilder wurden im Anschluß an die hier entwickelten Theoreme in einer weiteren Abhandlung [5]) abgeleitet.

I. Die analytische Darstellung der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz.

1. Zwei gegebene konjugierte Strahlen einer Involution auf einer linearen Strahlenkongruenz C_t^s mit den (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden s, t werden einander als reziproke Polaren eines polaren Raumes zugeordnet. Demzufolge gibt es zwei Arten von Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz. Die (reelle oder imaginäre) Inzidenzfläche des (reellen) polaren Raumes liegt nämlich entweder einscharig in der linearen Kongruenz, oder sie trägt zwei involutorische Regelscharen des geschart involutorischen Raumes der linearen Kongruenz. Aus diesen Definitionen folgt:

Bestimmt eine Fläche F^2 zweiten Grades mit der Gleichung $\sum_{\varkappa=1}^{4}\sum_{\lambda=1}^{4} a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda = 0$ eine Involution auf einer linearen Strahlenkongruenz, so gehen die homogenen Linienkoordinaten p_{ik}, p'_{ik} konjugierter Kongruenzstrahlen g, g' durch lineare involutorische Substitutionen ineinander über, als deren 36 Koeffizienten die 36 Minoren zweiten Grades aus der symmetrischen Determinante $|a_{\varkappa\lambda}|$ auftreten.

Die involutorischen Substitutionen sind die folgenden sechs:

$$\begin{aligned}
p'_{12} = {} & (a_{23}\cdot a_{34} - a_{33}\cdot a_{24})\, p_{23} + (a_{33}\cdot a_{14} - a_{13}\cdot a_{34})\, p_{13} + (a_{13}\cdot a_{24} - a_{23}\cdot a_{14}) p_{12} \\
& + (a_{13}\cdot a_{44} - a_{34}\cdot a_{14})\, p_{14} + (a_{23}\cdot a_{44} - a_{34}\cdot a_{24})\, p_{24} \\
& + (a_{33}\cdot a_{44} - a_{34}^2)\, p_{34} \\
p'_{13} = {} & (a_{22}\cdot a_{34} - a_{23}\cdot a_{24})\, p_{23} + (a_{23}\cdot a_{14} - a_{12}\cdot a_{34})\, p_{13} + (a_{12}\cdot a_{24} - a_{22}\cdot a_{14})\, p_{12} \\
& + (a_{12}\cdot a_{44} - a_{24}\cdot a_{14})\, p_{14} + (a_{22}\cdot a_{44} - a_{24}^2)\, p_{24} \\
& + (a_{23}\cdot a_{44} - a_{34}\cdot a_{24})\, p_{34} \\
p'_{14} = {} & (a_{22}\cdot a_{33} - a_{23}^2)\, p_{23} + (a_{23}\cdot a_{13} - a_{33}\cdot a_{12})\, p_{13} + (a_{12}\cdot a_{23} - a_{22}\cdot a_{13})\, p_{12} \\
& + (a_{12}\cdot a_{34} - a_{13}\cdot a_{24})\, p_{14} + (a_{22}\cdot a_{34} - a_{23}\cdot a_{24})\, p_{24} + (a_{23}\cdot a_{34} - a_{33}\cdot a_{24})\, p_{34}
\end{aligned}$$

u. s. f.

Zu diesen Substitutionen treten bei den primären Involutionen [1]) die analytischen Bedingungen dafür, daß die beiden Leitgeraden der Trägerkongruenz zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Regelstrahlen der Fläche F^2 sind, bei den sekundären Involutionen [1])

---

[3]) Haenzel, Theorie und Klassifikation der Kollineationen vermöge der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz, The Tohoku Mathem. Journal **31** (September 1929).

[4]) Haenzel, Die charakteristischen Involutionen der nichteuklidischen Bewegungen, Monatshefte für Mathematik und Physik **37**, 2 (1930).

[5]) Haenzel, Über Lösungen der Gravitationsgleichungen Einsteins, Zeitschr. für Physik **72** (1931), S. 798.

dagegen die analytischen Bedingungen dafür, daß diese beiden Leitgeraden zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) reziproke Polaren der Fläche darstellen. Im folgenden läßt sich dieser Zusammenhang in beiden Fällen auf zweierlei Weise sehr einfach zeigen.

2. Eine allgemeine reelle Kollineation im dreidimensionalen Raum wird mittels homogener Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 durch die Substitution:

$$\text{(I)} \qquad \varrho x_i' = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} x_k, \qquad a_{ik} \text{ reell}, \ |a_{ik}| \neq 0, \ i = 1, \ldots, 4,$$

charakterisiert. Die Koordinaten der vier Doppelpunkte der Kollineation gehen in bekannter Weise aus den vier Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ der Determinantengleichung:

$$\Delta(\varrho) \equiv |a_{ik} - \varrho| = 0$$

hervor. Fallen keine zwei Doppelpunkte zusammen und liegen keine drei auf einer Geraden, keine vier in einer Ebene, so sind die vier Punkte die Eckpunkte des Decktetraeders. Bei Benutzung dieses Tetraeders als Koordinatentetraeder werden die drei Gegenkantenpaare $q\,r$, $s\,t$, $u\,v$ des Tetraeders dargestellt durch:

$$\begin{array}{llllll} q & x_1 = 0, \ x_2 = 0 & s & x_1 = 0, \ x_3 = 0 & u & x_1 = 0, \ x_4 = 0 \\ r & x_3 = 0, \ x_4 = 0 & t & x_2 = 0, \ x_4 = 0 & v & x_2 = 0, \ x_3 = 0\,. \end{array}$$

Die drei Gegenkantenpaare geben die Leitgeradenpaare dreier linearer Strahlenkongruenzen C_r^q, C_t^s und C_v^u ab. Sind $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ die bekannten homogenen Linienkoordinaten, so werden die Kongruenzstrahlen von C_r^q, C_t^s und C_v^u durch die drei Gleichungspaare gekennzeichnet:

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{array}{lll} C_r^q & p_{12} = 0 & p_{34} = 0 \\ C_t^s & p_{13} = 0 & p_{24} = 0 \\ C_v^u & p_{14} = 0 & p_{23} = 0\,. \end{array} \right.$$

Die sechs Doppelstrahlen q, r, s, t, u, v bestimmen außerdem die drei einfachen Raumvierseite:

$$stuv \qquad qruv \qquad qrst.$$

Diese drei einfachen Raumvierseite sind die Basisvierseite dreier F^2-Büschel:

$$F^2_{stuv} \qquad F^2_{qruv} \qquad F^2_{qrst}\,.$$

Die drei F^2-Büschel geben mittels eines Parameters λ Anlaß zu den Gleichungen:

$$\text{(III)} \quad x_1 x_2 - \lambda \cdot x_3 x_4 = 0 \qquad x_1 x_3 - \lambda \cdot x_2 x_4 = 0 \qquad x_1 x_4 - \lambda \cdot x_2 x_3 = 0\,.$$

Jede gegebene Fläche F^2_λ des F^2-Büschels F^2_{stuv} liegt mit ihrer einen Regelschar in der linearen Kongruenz C_t^s, mit der anderen in der linearen Kongruenz C_v^u. Im (reellen) polaren Raume der Fläche F^2_λ wird jedem gegebenen Kongruenzstrahle der Kongruenz C_t^s ein anderer Strahl dieser Kongruenz als reziproke Polare zugeordnet, und ebenso gehört zu jedem gegebenen Kongruenzstrahle von C_v^u ein zweiter Strahl dieser Kongruenz als reziproke Polare. Auf jeder der beiden linearen Strahlenkongruenzen C_t^s und C_v^u bedingt also die je einscharig in C_t^s und C_v^u enthaltene Fläche F^2_λ zweiter Ordnung eine involutorische Paarung der Kongruenzstrahlen. Diese geometrisch evidente Tatsache läßt sich auch analytisch leicht verifizieren, wenn man nach Nr. 1 bedenkt, durch welche Substitutionen die Linienkoordinaten p_{ik} eines gegebenen Strahles g in die Linienkoordinaten p'_{ik} seiner reziproken Polare g' im polaren Raume einer Fläche zweiter Ordnung übergehen. Im Falle der Fläche $F^2_\lambda = x_1 x_2 - \lambda \cdot x_3 x_4 = 0$ zeigt eine leichte Rechnung, daß die Linienkoordinaten zweier solcher reziproker Polaren durch die Substitutionen:

$$\text{(IV)}\quad \left\{\begin{array}{lll} -\frac{\lambda}{4}\,p_{12} = p'_{34} & +\frac{\lambda}{4}\,p_{13} = p'_{13} & -\frac{\lambda}{4}\,p_{14} = p'_{14} \\ -\frac{\lambda^2}{4}\,p_{34} = p'_{12} & +\frac{\lambda}{4}\,p_{24} = p'_{24} & -\frac{\lambda}{4}\,p_{23} = p'_{23} \end{array}\right\}$$

zusammenhängen, deren involutorischer Charakter ersichtlich ist.

Entsprechendes gilt von den beiden übrigen F^2-Büscheln F^2_{qruv} und F^2_{qrst}. Jede Fläche eines dieser beiden Büschel liegt je einscharig in den beiden linearen Kongruenzen, deren Leitgeradenpaare das Basisvierseit ($q\,r\,u\,v$ oder $q\,r\,s\,t$) des F^2-Büschels bilden. Sie bestimmt also auf diesen beiden Kongruenzen eine involutorische Paarung der Kongruenzstrahlen, bei der jedes Strahlenpaar aus zwei reziproken Polaren besteht.

Zusammenfassend läßt sich nunmehr feststellen:

Die ∞^1 Flächen zweiter Ordnung der drei F^2-Büschel:

$$\begin{array}{c|c|c} F^2_{stuv} & F^2_{qruv} & F^2_{qrst} \\ x_1\,x_2 - \lambda\cdot x_3\,x_4 = 0 & x_1\,x_3 - \lambda\cdot x_2\,x_4 = 0 & x_1\,x_4 - \lambda\cdot x_2\,x_3 = 0 \end{array}$$

liegen je einscharig in den linearen Strahlenkongruenzen:

$$\begin{array}{cc|cc|cc} C^s_t & C^u_v & C^q_r & C^u_v & C^s_t & C^q_r \\ p_{13} = 0 & p_{14} = 0 & p_{12} = 0 & p_{14} = 0 & p_{13} = 0 & p_{12} = 0 \\ p_{24} = 0 & p_{23} = 0 & p_{34} = 0 & p_{23} = 0 & p_{24} = 0 & p_{34} = 0. \end{array}$$

Sie bestimmen auf diesen Kongruenzen je eine (primäre) Involution der Kongruenzstrahlen, und die Koordinaten konjugierter Strahlen g, g' dieser Involution sind verknüpft durch die Substitution:

$$\text{(V)}\quad \left\{\begin{array}{cc|cc|cc} -\frac{1}{4}\,p_{12} = p'_{34} & -\frac{1}{4}\,p_{12} = p'_{34} & -\frac{1}{4}\,p_{13} = p'_{24} & -\frac{\lambda}{4}\,p_{12} = p'_{12} & +\frac{\lambda}{4}\,p_{12} = p'_{12} & -\frac{\lambda}{4}\,p_{13} = p'_{13} \\ -\frac{\lambda}{4}\,p_{14} = p'_{14} & +\frac{\lambda}{4}\,p_{13} = p'_{13} & +\frac{\lambda}{4}\,p_{14} = p'_{14} & -\frac{1}{4}\,p_{13} = p'_{24} & -\frac{1}{4}\,p_{14} = p'_{23} & -\frac{1}{4}\,p_{14} = p'_{23} \\ -\frac{\lambda}{4}\,p_{23} = p'_{23} & +\frac{\lambda}{4}\,p_{24} = p'_{24} & +\frac{\lambda}{4}\,p_{23} = p'_{23} & -\frac{\lambda^2}{4}\,p_{24} = p'_{13} & -\frac{\lambda^2}{4}\,p_{23} = p'_{14} & -\frac{\lambda^2}{4}\,p_{23} = p'_{14} \\ -\frac{\lambda^2}{4}\,p_{34} = p'_{12} & -\frac{\lambda^2}{4}\,p_{34} = p'_{12} & -\frac{\lambda^2}{4}\,p_{24} = p'_{13} & -\frac{\lambda}{4}\,p_{34} = p'_{34} & +\frac{\lambda}{4}\,p_{34} = p'_{34} & -\frac{\lambda}{4}\,p_{24} = p'_{24} \end{array}\right\}.$$

Ein polarer Raum, dessen (reelle oder imaginäre) Inzidenzfläche einscharig in einer linearen Kongruenz enthalten ist, heißt ein primärer polarer Raum [1]) der Kongruenz und die durch ihn hervorgerufene Paarung der Kongruenzstrahlen eine primäre Involution auf der Kongruenz. Die obigen Substitutionen sind also explizite Ausdrücke der primären Involution.

3. Die drei linearen Strahlenkongruenzen C^q_r, C^s_t und C^u_v bestimmen bzw. die drei geschart involutorischen Räume Σ_{qr}, Σ_{st} und Σ_{uv} als deren Deckstrahlenkongruenzen. Die zugehörigen geschart involutorischen Kollineationen führen bei der hier getroffenen Wahl des Koordinatentetraeders (2) auf die Substitutionen:

$$\text{(VI)}\quad \left\{\begin{array}{ccc} \Sigma_{qr} & \Sigma_{st} & \Sigma_{uv} \\ \varrho x_1 = x'_1 & \varrho x_1 = x'_1 & \varrho x_1 = x'_1 \\ \varrho x_2 = x'_2 & \varrho x_2 = -x'_2 & \varrho x_2 = -x'_2 \\ \varrho x_3 = -x'_3 & \varrho x_3 = x'_3 & \varrho x_3 = -x'_3 \\ \varrho x_4 = -x'_4 & \varrho x_4 = -x'_4 & \varrho x_4 = x'_4 \end{array}\right\}.$$

Wir erinnern daran, daß diese drei geschart involutorischen Kollineationen vertauschbar sind, daß also aus je zwei von ihnen die dritte resultiert und aus allen dreien die Identität.

Jede Fläche des F^2-Büschels F^2_{stuv} trägt zwei involutorische Regelscharen im geschart involutorischen Raume Σ_{qr} der linearen Strahlenkongruenz C^q_r. Das hat zur Folge, daß umgekehrt die ∞^2 Kongruenzstrahlen von C^q_r paarweise reziproke Polaren für die ∞^1 Flächen des F^2-Büschels F^2_{stuv} sind. Auch der Analytiker wird sich davon leicht überzeugen, wenn er an Hand der Gleichungen (IV) zu einem gegebenen Kongruenzstrahle von C^q_r die reziproke Polare bez. der Flächen $x_1x_2 - \lambda \cdot x_3x_4 = 0$ aufsucht. Werden diese Überlegungen auf die beiden andern F^2-Büschel ausgedehnt, so ergibt sich folgendes Resultat:

Die ∞^1 Flächen des F^2-Büschels:

$$F^2_{stuv} \quad | \quad F^2_{qruv} \quad | \quad F^2_{qrst}$$

tragen je zwei involutorische Regelscharen im geschart involutorischen Raume der linearen Strahlenkongruenz:

$$C^q_r \quad | \quad C^s_t \quad | \quad C^u_v .$$

Der F^2-Büschel bestimmt auf der linearen Strahlenkongruenz eine (sekundäre) Involution. Konjugierte Strahlen g, g' dieser Involution sind reziproke Polaren für alle Flächen des F^2-Büschels, und ihre Koordinaten sind verknüpft durch die Substitutionen:

$$\text{(VII)} \quad \left\{ \begin{array}{lll} +\frac{\lambda}{4} p_{13} = p'_{13} & -\frac{\lambda}{4} p_{12} = p'_{12} & +\frac{\lambda}{4} p_{12} = p'_{12} \\ -\frac{\lambda}{4} p_{14} = p'_{14} & +\frac{\lambda}{4} p_{14} = p'_{14} & -\frac{\lambda}{4} p_{13} = p'_{13} \\ -\frac{\lambda}{4} p_{23} = p'_{23} & +\frac{\lambda}{4} p_{23} = p'_{23} & -\frac{\lambda}{4} p_{24} = p'_{24} \\ +\frac{\lambda}{4} p_{24} = p'_{24} & -\frac{\lambda}{4} p_{34} = p'_{34} & +\frac{\lambda}{4} p_{34} = p'_{34} \end{array} \right\}.$$

Ein reeller polarer Raum, dessen (reelle oder imaginäre) Inzidenzfläche zwei involutorische Regelscharen im geschart involutorischen Raume einer linearen Strahlenkongruenz trägt, heißt ein sekundärer polarer Raum [1]) der Kongruenz, die durch ihn bestimmte Involution der Kongruenzstrahlen eine sekundäre Involution auf der linearen Strahlenkongruenz. Die Substitutionen (VII) sind also explizite Ausdrücke der sekundären Involutionen.

4. Eine primäre Involution hat die ∞^1 Strahlen einer (reellen oder imaginären) Regelschar zweiter Ordnung zu Doppelstrahlen, deren Trägerfläche die Involution bedingt. Eine sekundäre Involution hat vier (reelle oder konjugiert imaginäre) Doppelstrahlen [1]). Sie bilden das Basisvierseit des die Involution bedingenden F^2-Büschels. Die analytische Darstellung der primären und der sekundären Involutionen in Nr. 2 und Nr. 3 ging von der Gleichung der Fläche zweiter Ordnung in der Form $x_1x_3 - \lambda \cdot x_2x_4 = 0$ aus, benutzte ein Tangentialtetraeder als Koordinatentetraeder, und dieses enthielt auch die drei Basisvierseite der drei bedingenden F^2-Büschel. Diese Gleichungsform der Fläche zweiter Ordnung gibt aber keine Auskunft darüber, ob ihre Regelstrahlen — und damit die Doppelstrahlen der dargestellten Involutionen — reelle Strahlen, oder konjugiert imaginäre Strahlen erster oder zweiter Art sind. Aus dem F^2-Büschel F^2_{qruv} greifen wir eine Fläche heraus. Ihre Gleichung:

$$x_1x_3 - x_2x_4 = 0$$

geht durch die Substitutionen:

$$\begin{array}{llll}
\text{(a)}\ x_1 = \varrho(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_3) & x_2 = -\varrho(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_4) & x_3 = \varrho(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_3) & x_4 = \varrho(\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_4) \\
\text{(b)}\ x_1 = \varrho(\mathfrak{x}_1 + i\mathfrak{x}_3) & x_2 = -\varrho(\mathfrak{x}_2 + i\mathfrak{x}_4) & x_3 = \varrho(\mathfrak{x}_1 - i\mathfrak{x}_3) & x_4 = \varrho(\mathfrak{x}_2 - i\mathfrak{x}_4) \\
\text{(c)}\ x_1 = \varrho(\mathfrak{x}_1 + i\mathfrak{x}_3) & x_2 = -\varrho(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_4) & x_3 = \varrho(\mathfrak{x}_1 - i\mathfrak{x}_3) & x_4 = \varrho(\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_4)
\end{array}$$

über in die Formen:

$$\text{a)}\ \mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2 - \mathfrak{x}_3^2 - \mathfrak{x}_4^2 = 0 \quad \text{b)}\ \mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_3^2 + \mathfrak{x}_4^2 = 0 \quad \text{c)}\ \mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_3^2 - \mathfrak{x}_4^2 = 0.$$

a) Im ersten Falle liegt eine reelle Strahlenfläche zweiter Ordnung vor. Die drei linearen Kongruenzen C_r^q, C_t^s und C_v^u, deren Leitgeradenpaare nach wie vor die Gegenkantenpaare eines Tangentialtetraeders bilden, werden dargestellt durch:

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{array}{ccc} C_r^q & C_t^s & C_v^u \\ \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{p}_{14} + \mathfrak{p}_{23} = 0 \\ \mathfrak{p}_{12} - \mathfrak{p}_{34} = 0 \end{array}\right. & \begin{array}{l} \mathfrak{p}_{13} = 0 \\ \mathfrak{p}_{24} = 0 \end{array} & \left.\begin{array}{l} \mathfrak{p}_{14} - \mathfrak{p}_{23} = 0 \\ \mathfrak{p}_{12} + \mathfrak{p}_{34} = 0 \end{array}\right\}. \end{array}$$

Auf den beiden hyperbolischen linearen Strahlenkongruenzen C_r^q und C_v^u bedingt die Strahlenfläche zweiter Ordnung zwei primäre Involutionen, die vorhin durch die mittlere Kolonne der Gleichungen (V) angegeben wurden. Auf der hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz C_t^s ruft die Fläche eine sekundäre Involution hervor, vorhin die mittelste Spalte der Gleichungen (VII). Jetzt ist ein Polartetraeder zum Koordinatentetraeder geworden, die beiden primären Involutionen auf C_r^q und C_v^u und die sekundäre Involution auf C_t^s legitimieren sich analytisch bzw. durch die Substitutionen:

$$\text{(IX)} \qquad \begin{array}{ccc} C_r^q & C_t^s & C_v^u \\ \left\{\begin{array}{l} \varrho\mathfrak{p}_{12} = +\mathfrak{p}'_{34} \\ \varrho\mathfrak{p}_{34} = +\mathfrak{p}'_{12} \\ \varrho\mathfrak{p}_{13} = -\mathfrak{p}'_{24} \\ \varrho\mathfrak{p}_{24} = -\mathfrak{p}'_{13} \\ \varrho\mathfrak{p}_{14} = -\mathfrak{p}'_{23} \\ \varrho\mathfrak{p}_{23} = -\mathfrak{p}'_{14} \end{array}\right. & \begin{array}{l} \varrho\mathfrak{p}_{12} = +\mathfrak{p}'_{34} \\ \varrho\mathfrak{p}_{14} = -\mathfrak{p}'_{23} \\ \varrho\mathfrak{p}_{23} = -\mathfrak{p}'_{14} \\ \varrho\mathfrak{p}_{34} = +\mathfrak{p}'_{12} \\ \mathfrak{p}_{13} \equiv 0 \\ \mathfrak{p}_{24} \equiv 0 \end{array} & \left.\begin{array}{l} \varrho\mathfrak{p}_{12} = +\mathfrak{p}'_{34} \\ \varrho\mathfrak{p}_{34} = +\mathfrak{p}'_{12} \\ \varrho\mathfrak{p}_{13} = -\mathfrak{p}'_{24} \\ \varrho\mathfrak{p}_{24} = -\mathfrak{p}'_{13} \\ \varrho\mathfrak{p}_{14} = -\mathfrak{p}'_{23} \\ \varrho\mathfrak{p}_{23} = -\mathfrak{p}'_{14} \end{array}\right\}. \end{array}$$

Jede der beiden primären Involutionen hat die Strahlen einer reellen Regelschar zweiter Ordnung zu Doppelstrahlen, die sekundäre Involution hat vier reelle paarweise windschiefe Doppelstrahlen.

b) Die Gleichung stellt eine imaginäre Fläche zweiter Ordnung mit reellem polarem Raume dar. Die drei linearen Kongruenzen C_r^q, C_t^s und C_v^u sind gegeben durch die Gleichungspaare:

$$\text{(X)} \qquad \begin{array}{ccc} C_r^q & C_t^s & C_v^u \\ \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{p}_{12} - \mathfrak{p}_{34} = 0 \\ \mathfrak{p}_{14} - \mathfrak{p}_{23} = 0 \end{array}\right. & \begin{array}{l} \mathfrak{p}_{13} = 0 \\ \mathfrak{p}_{24} = 0 \end{array} & \left.\begin{array}{l} \mathfrak{p}_{12} + \mathfrak{p}_{34} = 0 \\ \mathfrak{p}_{14} + \mathfrak{p}_{23} = 0 \end{array}\right\}. \end{array}$$

Auf den beiden elliptischen linearen Kongruenzen C_r^q und C_v^u bestimmt die Fläche je eine primäre Involution, deren Doppelstrahlen je eine imaginäre Regelschar zweiter Ordnung erfüllen. Auf der hyperbolischen linearen Kongruenz C_t^s bedingt sie eine sekundäre Involution, deren vier Doppelstrahlen aus zwei Paaren konjugiert imaginärer Geraden zweiter Art bestehen. Diese drei Involutionen führen auf dieselben Substitutionen der Linienkoordinaten wie im Falle a.

c) Die Fläche ist eine reelle strahlenlose Fläche zweiter Ordnung. Die hyperbolische lineare Strahlenkongruenz, C_t^s, deren Leitgeraden, wie immer, zwei reziproke Polaren der Fläche bilden, ist wiederum dargestellt durch $\mathfrak{p}_{13} = 0$, $\mathfrak{p}_{24} = 0$, und die auf ihr durch die Fläche bedingte sekundäre Involution liefert dieselben Substitutionen

wie im Falle a. Statt der Darstellung der linearen Strahlenkongruenzen C_r^q und C_v^u ergeben sich jedoch zweimal die Doppelgleichungen $\mathfrak{p}_{12} = \mathfrak{p}_{14} = 0$ und $\mathfrak{p}_{23} = \mathfrak{p}_{34} = 0$. Das war auch zu erwarten, da der durch einen gegebenen (reellen) Punkt der (strahlenlosen) Fläche gehende Regelstrahl und der durch denselben Punkt gehende Leitstrahl zwei konjugiert imaginäre Geraden erster Art sind, und q, r, u, v daher niemals die Leitgeraden zweier (reeller) linearer Strahlenkongruenzen abgeben. Die auf C_t^s bedingte sekundäre Involution hat zwei Paare konjugiert imaginärer Geraden erster Art zu Doppelstrahlen.

Die durch die Flächen des F^2-Büschels F^2_{qruv} hervorgerufenen Involutionen auf den drei linearen Strahlenkongruenzen C_r^q, C_t^s, C_v^u sind damit erschöpft. Es bliebe übrig, die durch die Flächen der beiden übrigen F^2-Büschel bedingten Involutionen zu ermitteln und in gleicher Weise zu untersuchen, danach die F^2-Büschel zu spezialisieren, um alle Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz zu bestimmen. Jedoch kann dieses Ziel auf folgendem bequemeren Wege erreicht werden:

II. Die Beziehungen der sekundären Involutionen zur Theorie der Elementarteiler.

5. Da eine primäre Involution auf einer linearen Strahlenkongruenz die Strahlen einer Regelschar zweiter Ordnung zu Doppelstrahlen hat, so liegen auf einer hyperbolischen linearen Kongruenz zwei Arten von primären Involutionen:

1. Primäre Involutionen, deren ∞^1 Doppelstrahlen eine reelle Regelschar zweiter Ordnung erfüllen,

2. primäre Involutionen, deren ∞^1 Doppelstrahlen eine in zwei reelle Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallene Regelschar zweiter Ordnung bilden,

Die elliptische lineare Strahlenkongruenz trägt:

1. primäre Involutionen, deren ∞^1 Doppelstrahlen eine reelle Regelschar zweiter Ordnung erfüllen,

2. primäre Involutionen, deren ∞^1 Doppelstrahlen eine imaginäre Regelschar zweiter Ordnung bilden,

3. primäre Involutionen, deren ∞^1 Doppelstrahlen zwei konjugiert imaginäre Strahlenbüschel erster Ordnung erfüllen.

Anders die sekundären Involutionen. Die Doppelstrahlen einer sekundären Involution bilden zusammen mit den Leitgeraden der Trägerkongruenz die Deckstrahlen kollinearer Räume (Gleichung I). Deshalb zieht eine Klassifikation der Kollineationen eine Einteilung der sekundären Involutionen nach sich.

Zum analytischen Ausdruck einer gegebenen Kollineation:

$$\varrho x_i = \sum_{k=0}^{r} a_{ik} x'_k \quad \text{mit } |a_{ik}| \neq 0, \quad a_{ik} \text{ reell}, \; i = 0, 1, 2, \ldots, r$$

gehört die Determinantengleichung:

$$\Delta(\varrho) \equiv |a_{ik} - \varrho| = 0 .$$

Diese Gleichung habe m verschiedene Wurzeln:

$$\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m .$$

Es werden bezeichnet mit

$$\mu_1^{(i)}, \mu_2^{(i)}, \ldots, \mu_k^{(i)}$$

der Reihe nach die Multiplizitäten der Wurzel ϱ_i für die Determinante $\Delta(\varrho)$ und für ihre r-, $(r-1)$-, ..., $(r - h^i + 2)$-reihigen Minoren. Dabei bedeutet $r - h^i + 1$ den Rang der Determinante $\Delta(\varrho_i)$, der sich aus $\Delta(\varrho)$ ergibt, wenn $\varrho = \varrho_i$ gesetzt wird,

so daß für $\varrho = \varrho_i$ alle $(r - h^i + 2)$-reihigen Minoren und alle Minoren von noch höherer Ordnung verschwinden. Nunmehr setzt man:

$$e_1^{(i)} = \mu_1^{(i)} - \mu_2^{(i)}, \quad e_2^{(i)} = \mu_2^{(i)} - \mu_3^{(i)}, \quad e_3^{(i)} = \cdots, e_{h-1}^{(i)} = \mu_{h-1}^{(i)} - \mu_h^{(i)}, \quad e_h^{(i)} = \mu_h^{(i)}.$$

Die Ausdrücke:

$$(\varrho - \varrho_i)^{e_1^{(i)}}, \quad (\varrho - \varrho_i)^{e_2^{(i)}}, \ldots, (\varrho - \varrho_i)^{e_h^{(i)}}$$

heißen nach Weierstraß die der Wurzel ϱ_i entsprechenden **Elementarteiler**. Es sind:

$$\begin{matrix} e_1^{(1)} & e_2^{(1)} & \ldots & e_h^{(1)} \\ e_1^{(2)} & e_2^{(2)} & \ldots & e_h^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_1^{(m)} & e_2^{(m)} & \ldots & e_h^{(m)} \end{matrix}$$

die Exponenten der zu den Wurzeln von $\Delta(\varrho) = 0$ gehörenden Elementarteiler, und der Inbegriff aller Exponenten in der Anordnung:

$$[(e_1^{(1)}\, e_2^{(1)} \ldots e_h^{(1)})\,(e_1^{(2)}\, e_2^{(2)} \ldots e_h^{(2)}) \ldots (e_1^{(m)} \ldots e_h^{(m)})]$$

heißt die Charakteristik der vorgelegten Kollineation.

6. Unterliegt die gegebene Kollineation der Charakteristik [1111], so hat sie vier Doppelpunkte und vier Doppelebenen. Von den drei durch Gleichungen (VII) charakterisierten sekundär involutorischen Kongruenzen C_r^q, C_t^s, C_v^u hat jede ein anderes Paar Gegenkanten des Decktetraeders zu Leitgeraden und die beiden übrigen Paar Gegenkanten zu Doppelstrahlen. Jede reelle Kante trägt eine Punkt- und eine Ebeneninvolution, deren (reelle oder konjugiert imaginäre) Doppelelemente die beiden mit der Kante inzidenten Ecken und Ebenen des Tetraeders sind. Die Ebeneninvolution der einen Kante ist zur Punktinvolution der gegenüberliegenden Kante perspektiv. Die Kollineation führt diese Ebenen- und Punktinvolutionen in sich über. Konjugierte Strahlen der sekundären Involution schneiden beide Leitgeraden der Trägerkongruenz in zwei Paaren konjugierter Punkte der beiden Punktinvolutionen und liegen in zwei Paaren konjugierter Ebenen der beiden Ebeneninvolutionen. Für die Charakteristik [1111] ist das eine Paar Gegenkanten ein reelles windschiefes Strahlenpaar u, v, die vier übrigen Kanten q, r, s, t bestehen aus zwei Paaren reeller windschiefer oder aus zwei Paaren konjugiert imaginärer windschiefer Strahlen oder aus zwei Paaren konjugiert imaginärer inzidenter Strahlen. Die von u und v getragenen Punktinvolutionen und Ebeneninvolutionen sind im ersten Falle beide hyperbolisch, im zweiten beide elliptisch, im dritten ist die eine hyperbolisch, die andere elliptisch. Im ersten Falle trägt nach (VII) jede der drei hyperbolischen Kongruenzen C_r^q, C_t^s, C_v^u eine sekundäre Involution mit vier reellen Doppelstrahlen. Die Doppelstrahlen sind die beiden Leitgeradenpaare der beiden anderen Kongruenzen. Im zweiten Falle ist die eine Kongruenz C_v^u hyperbolisch und hat zwei Paar konjugiert imaginärer windschiefer Doppelstrahlen q, r und s, t. Die beiden anderen Kongruenzen C_r^q, C_t^s sind elliptisch, und jede von ihnen hat ein Paar reeller Doppelstrahlen (u, v) und ein Paar konjugiert imaginärer windschiefer Doppelstrahlen $(s, t$ oder $q, r)$. Im dritten Falle ist nur eine reelle, und zwar hyperbolische lineare Kongruenz C_v^u vorhanden, und ihre sekundäre Involution besitzt zwei Paar konjugiert imaginärer inzidenter Doppelstrahlen $(r, s$ und $q, t)$.

Für die Charakteristik [211] trägt die eine Kante u eine hyperbolische oder elliptische, die andere v eine parabolische Punktinvolution. Diese Charakteristik führt demnach auf zwei Arten sekundärer Involutionen auf der hyperbolischen linearen Kongruenz C_v^u, nämlich auf die sekundären Involutionen mit zwei reellen oder mit zwei kon-

jugiert imaginären inzidenten Doppelstrahlen, von denen jeder zwei vereinigte Doppelstrahlen darstellt. Die Doppelstrahlen projizieren aus dem Doppelpunkte der parabolischen Involution auf v die beiden Doppelpunkte auf u.

Für die Charakteristik [22] sind die windschiefen Doppelstrahlen u, v zusammengefallen und bilden die vereinigten Leitgeraden einer parabolischen Kongruenz. Die vereinigten Leitgeraden tragen eine hyperbolische oder eine elliptische Punktinvolution. Konjugierte Strahlen der sekundären Involution treffen die vereinigten Leitgeraden in konjugierten Punkten dieser Punktinvolution. Zwei ihrer Doppelstrahlen fallen mit den vereinigten Leitgeraden zusammen, die beiden anderen (reellen oder konjugiert imaginären) windschiefen Doppelstrahlen gehen durch die Doppelpunkte der von den vereinigten Leitgeraden getragenen Punktinvolution. Die letzteren beiden Doppelstrahlen sind die Leitgeraden einer hyperbolischen oder elliptischen linearen Kongruenz, und die von dieser getragene sekundäre Involution hat die vereinigten Leitgeraden $u = v$ zum vierfachen Doppelstrahl.

Die Charakteristik [4] führt zu einer sekundären Involution auf einer parabolischen linearen Kongruenz, deren vier vereinigte Doppelstrahlen mit den vereinigten Leitgeraden zusammenfallen.

Die Charakteristik [(11) 11] kommt den axialen[6]) Kollineationen zu, welche die ∞^1 Punkte eines Doppelstrahles u und die ∞^1 Ebenen des zu u windschiefen Doppelstrahles v zu Doppelelementen haben; außerdem liegen zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Doppelpunkte auf v und gehen zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Doppelebenen durch u. Zwei gegebene konjugierte Strahlen der sekundären Involution auf der linearen Kongruenz C_v^u schneiden einander in einem Punkte von u und treffen v in zwei konjugierten Punkten einer hyperbolischen oder elliptischen Punktinvolution. Die sekundäre Involution heißt unter diesen Umständen inzidentpaarig [1]). Sie besitzt zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Strahlenbüschel erster Ordnung von Doppelstrahlen, deren Strahlen aus den beiden Doppelpunkten M, N der Punktinvolution auf v die Punkte von u projizieren. Andererseits tragen M und N je einen perspektiv involutorischen zentrischen Bündel im geschart involutorischen Raume von C_v^u. Die perspektiv involutorischen Bündel haben bzw. die Ebenen Mu, Nu zu Involutionsebenen und beide die Leitgerade $MN = v$ zur Involutionsachse. Ebenso tragen die beiden Doppelebenen $\nu = Mu$, $\mu = Nu$ je ein perspektiv involutorisches Feld im geschart involutorischen Raume von C_v^u. Die perspektiv involutorischen Felder μ, ν haben bzw. die Punkte N, M zu Involutionszentren, und sie haben beide die Leitgerade $u = \mu\nu$ zur Involutionsachse. Die perspektiv involutorischen Felder μ, ν sind bzw. die Schnitte der perspektiv involutorischen zentrischen Bündel M, N und bilden je mit diesen die beiden zerfallenen involutorischen linearen Kongruenzen $M\mu$, $N\nu$. Die Charakteristik [(11) 11] führt also auf zwei Arten sekundärer inzidentpaariger Involutionen auf der hyperbolischen linearen Kongruenz, die eine mit zwei reellen, die andere mit zwei konjugiert imaginären Strahlenbüscheln erster Ordnung von Doppelstrahlen und auf eine Art von Involutionen auf der zerfallenen linearen Strahlenkongruenz, bestehend aus den Strahlen eines zentrischen Bündels und eines ebenen Feldes.

Die Charakteristik [2(11)] liefert — wie sich auf gleichem Wege ergibt — eine dritte Art sekundärer inzidentpaariger Involutionen auf der hyperbolischen linearen Kongruenz. Zwei gegebene konjugierte Strahlen schneiden einander in einem Punkte der einen Leitgeraden und schneiden die andere Leitgerade in zwei konjugierten Punkten einer para-

[6]) F. Schur, Mathem. Annalen **19** (1881/82), S. 431.

bolischen Involution. Diese sekundäre inzidentpaarige Involution besitzt daher einen Büschel erster Ordnung von Doppelstrahlen, deren jeder zwei vereinigte Doppelstrahlen darstellt.

Die Kollineationen mit der Charakteristik [(11) (11)] oder [(22)] sind die geschart involutorischen. Die erste Charakteristik führt daher auf die identische Involution auf der hyperbolischen oder elliptischen Kongruenz, die zweite auf die identische Involution auf der parabolischen Kongruenz.

Die Charakteristiken [(111)1] und [(211)] bedingen die perspektiven Kollineationen, sie liefern die identische Involution auf der zerfallenen Kongruenz, wobei im zweiten Falle der Mittelpunkt des zentrischen Bündels in der Trägerebene des ebenen Feldes liegt. Die Charakteristiken [31], [(21)1], [(31)] und [(1111)] liefern keine neuen Beiträge, da ihre Deckelemente keine linearen Kongruenzen bestimmen. Die erhaltenen Resultate lassen sich folgendermaßen zusammenstellen:

Nr.	Charakteristik	Lineare Kongruenz	Doppelstrahlen der Involution			Punktinvolutionen auf den beiden Leitgeraden			
			reelle	konjugiert imaginäre 1. Art	konjugiert imaginäre 2. Art	hyperbolische	parabolische	elliptische	identische
1	[1111]	hyperbolisch	4	4		2			
2		hyperbolisch				1		1	
3		hyperbolisch			4			2	
4		elliptisch	2		2				
5	[211]	hyperbolisch	2 doppelte	2 doppelte		1	1		
6		hyperbolisch					1	1	
7	[22]	parabolisch	2+1 doppelter			1 doppelt zu zählen			
8		parabolisch	1 doppelter		2			1 doppelt zu zählen	
9		hyperbolisch	1 vierfacher				2		
10		elliptisch	1 vierfacher						
11	[4]	parabolisch	1 vierfacher				1 doppelt zu zählen		
12	[(11) 11]	hyperbolisch	$2 \times \infty^1$	$2 \times \infty^1$		1			1
13		hyperbolisch						1	1
14		zerfallen	$2 \times \infty^1$			1			1
15	[2(11)]	hyperbolisch	$1 \times \infty^1$, jeder doppelt zu zählen				1		1
16	[(11)(11)]	hyperbolisch	Identische Involutionen auf linearen Kongruenzen						2
17		elliptisch							
18	[(22)]	parabolisch							1 doppelt zählende
19	[(111)1]	zerfallen							
20	[(211)]	zerfallen							

7. Die (reellen oder konjugiert imaginären) Doppelstrahlen einer sekundären Involution auf einer linearen Kongruenz und die Leitgeraden dieser linearen Kongruenz sind nach Nr. 6 stets auch die Doppelstrahlen zweier kollinearer Räume Σ, Σ'. Diese Doppelelemente der beiden kollinearen Räume sind durch die sekundäre Involution bestimmt. Es können dann aber noch einem gegebenen Punkte P von Σ die ∞^3 Punkte von Σ' als homologe Punkte oder einer gegebenen Ebene π von Σ die ∞^3 Ebenen von Σ' als homologe Ebenen zugeordnet werden. Demnach führen ∞^3 Kollineationen eine gegebene sekundäre Involution in sich über, indem sie ihre Doppelstrahlen in Ruhe lassen und je zwei konjugierte Strahlen der Involution wieder in zwei konjugierte verwandeln. Die sekundäre Involution heißt dann die charakteristische Involution [3]) der kollinearen Räume. Die zugehörige lineare Mannigfaltigkeit von ∞^3 kollinearen Räumen ist zu sich selbst dual und heißt ein Gebüschverband kollinearer

Räume [7]). Die Kollineation zweier gegebener Räume des Gebüschverbandes ist bestimmt durch die charakteristische Involution und durch irgendein Paar homologer Punkte oder Ebenen [3]). Kurzum:

Eine sekundäre Involution auf einer linearen Strahlenkongruenz bestimmt einen Gebüschverband kollinearer Räume als deren charakteristische Involution. Die ∞^3 Kollineationen des Gebüschverbandes haben die Leitgeraden der Kongruenz und die Doppelstrahlen der charakteristischen Involution zu Deckstrahlen und führen die charakteristische Involution in sich über.

Das Verhältnis zweier verschiedener Wurzeln der Determinantengleichung $\Delta(\varrho) \equiv |a_{ik} - \varrho| = 0$ ist eine absolute Invariante der Kollineation (5) und stellt sich dual in zweifacher Weise dar, als Doppelverhältnis von zwei homologen Punkten und den Schnittpunkten ihrer Verbindungsgerade mit zwei Seiten des Decktetraeders oder als Doppelverhältnis von zwei homologen Ebenen und den Verbindungsebenen ihrer Schnittgerade mit zwei Ecken des Decktetraeders. Die allgemeine Kollineation mit der Charakteristik [1111] hat drei voneinander unabhängige absolute Invarianten. Durch die charakteristische Involution eines Gebüschverbandes kollinearer Räume ist das Decktetraeder der kollinearen Räume gegeben, und man erhält die ∞^3 Räume des Gebüschverbandes dadurch, daß die drei absoluten Invarianten nacheinander alle möglichen reellen Werte annehmen.

Die drei Gruppen der Zeilen 1—4, 7—10 und 12—14 in der Tabelle der sekundären Involutionen und die Ausführungen dieser und der vorhergehenden Nummer ergeben nunmehr die drei Sätze:

Hat die Kollineation zweier Räume eine charakteristische Involution mit vier paarweise windschiefen Doppelstrahlen (Charakteristik [1111]), so führt sie noch zwei weitere sekundäre Involutionen auf zwei linearen Kongruenzen in sich über. Von den drei linearen Kongruenzen hat jede ein Paar Gegenkanten des Decktetraeders zu Leitgeraden, die auf der Kongruenz liegende sekundäre Involution hat die beiden übrigen Gegenkantenpaare zu Doppelstrahlen. Jede der drei sekundären Involutionen kann als charakteristische Involution der Kollineation gelten und bestimmt in derselben Weise die beiden übrigen Involutionen. Hat die Kollineation aber eine charakteristische Involution mit zwei Paar konjugiert imaginären Doppelstrahlen erster Art (Zeile 2), so existiert keine weitere charakteristische Involution.

Hat die Kollineation zweier Räume eine charakteristische Involution mit zwei windschiefen (reellen oder konjugiert imaginären) Doppelstrahlen auf einer parabolischen linearen Kongruenz, so führt sie noch eine zweite sekundäre Involution auf einer hyperbolischen oder elliptischen linearen Kongruenz in sich über. Diese sekundäre Involution hat die vereinigten Leitgeraden der parabolischen Kongruenz zum vierfachen Doppelstrahl, und ihre Trägerkongruenz hat die Doppelstrahlen jener charakteristischen Involution zu Leitgeraden. Jede der beiden sekundären Involutionen kann als charakteristische Involution der Kollineation gelten.

Hat eine Kollineation zweier Räume eine sekundäre inzidentpaarige Involution auf einer hyperbolischen linearen Kongruenz zur charakteristischen Involution, so führt sie noch zwei Involutionen auf zwei zerfallenen linearen Kongruenzen in sich über. Jede der drei Involutionen kann als charakteristische Involution gelten.

III. Die sekundären Involutionen und die nichteuklidischen Maßbestimmungen.

8. Auf die Form $x_1 x_4 - \lambda_0 x_2 x_3 = 0$ kann die Gleichung jeder imaginären Fläche zweiter Ordnung mit reellem polarem Raume, jedes Strahlenhyperboloides, strahlenlosen

[7]) Jolles, Invarianz und Umkehrung, Crelle **149** (1919), S. 43.

Hyperboloides und jedes Ellipsoides gebracht werden. Liegt eine solche Fläche als Fundamentalfläche der Maßbestimmung im nichteuklidischen Raume zugrunde, so führt jede Bewegung in diesem Raume die Fläche beidscharig in sich über und hat deren zwei Leitstrahlen q, r und zwei Regelstrahlen s, t zu Doppelstrahlen. Die Diagonalen u, v des Raumvierseites $q\,r\,s\,t$ sind gleichfalls Doppelstrahlen der Bewegung und die Leitgeraden einer linearen Kongruenz C_v^u. Die sekundäre Involution auf C_v^u:

$$p_{14} = p_{23} = 0, \quad + \frac{\lambda}{4} p_{12} = p'_{12}, \quad - \frac{\lambda}{4} p_{13} = p'_{13}, \quad - \frac{\lambda}{4} p_{24} = p'_{24}, \quad + \frac{\lambda}{4} p_{34} = p'_{34}$$

ist die charakteristische Involution der nichteuklidischen Bewegung. Auch die beiden mitbestimmten sekundären Involutionen auf C_r^q und C_t^s (Nr. 3, Gleichungen VII, und Nr. 7) gehen durch die Bewegung in sich über. Konjugierte Strahlen der charakteristischen Involution auf C_v^u sind reziproke Polaren für die ∞^1 Flächen des F^2-Büschels:

$$F^2_{qrst} \qquad x_1 x_4 - \lambda \cdot x_2 x_3 = 0, \qquad - \infty \cdots \lambda \cdots + \infty.$$

Jede Fläche des F^2-Büschels wird durch die Bewegung beidscharig in sich übergeführt.

9. Geht die Koordinatenbestimmung im elliptischen Raume von einem Polartetraeder seiner imaginären Fundamentalfläche aus, so ist deren Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$. Eine Bewegung im elliptischen Raume hat ein Paar reziproke Polaren u, v der Fundamentalfläche zu reellen Doppelstrahlen, die Leitstrahlen q, r und die Regelstrahlen s, t der Fundamentalfläche sind konjugiert imaginäre windschiefe Doppelstrahlen. Mit anderen Worten:

Die allgemeine Bewegung im elliptischen Raume hat drei charakteristische Involutionen, die eine liegt auf einer hyperbolischen linearen Kongruenz C_v^u, die beiden anderen auf zwei elliptischen linearen Kongruenzen C_r^q und C_t^s.

Die Bewegung läßt sich in zwei elliptisch gescharte Kollineationen zerlegen, von denen die eine C_r^q, die andere C_t^s zur Deckstrahlenkongruenz hat. Die beiden gescharten Kollineationen werden als (elliptische) Parallelverschiebungen erster und zweiter Art bezeichnet. Die Kongruenzstrahlen von C_r^q und C_t^s sind bzw. die Cliffordschen Parallelen erster und zweiter Art. Nunmehr ergeben sich alle Eigenschaften der Cliffordschen Flächen von selbst:

Liegt auf der hyperbolischen linearen Kongruenz C_v^u die charakteristische Involution einer elliptischen Bewegung, so werden die beiden mitbestimmten elliptischen linearen Kongruenzen von den Cliffordschen Parallelen erster und zweiter Art erfüllt. Die ∞^1 je einscharig in C_r^q und C_t^s liegenden Flächen des F^2-Büschels F^2_{qrst} sind Cliffordsche Flächen, gescharte (und insbesondere geschart involutorische) Kollineationen mit den Deckstrahlenkongruenzen C_r^q und C_t^s sind Parallelverschiebungen erster und zweiter Art. Da zwei solche untereinander vertauschbar sind (Gleichungen VI), *so haben die Cliffordschen Flächen die Krümmung Null.*

Die Gleichungen der reellen Cliffordschen Flächen können mit Hife eines Parameters $\varkappa$ auf die Form gebracht werden: $(x_1^2 + x_2^2)(1 - \varkappa) - (x_3^2 + x_4^2)(1 + \varkappa) = 0$.

Der hyperbolische Raum hat eine reelle strahlenlose Fundamentalfläche. Die hyperbolische Bewegung besitzt nur eine charakteristische Involution mit zwei Paar konjugiert imaginären inzidenten Doppelstrahlen (4, c), und es entfällt daher die Möglichkeit, die Bewegung in zwei reelle Parallelverschiebungen zu zerlegen.

10. Eine gegebene sekundäre Involution auf einer hyperbolischen linearen Kongruenz C_v^u läßt sich in zwei sekundäre inzidentpaarige Involutionen auf C_v^u zerlegen. Diese beiden inzidentpaarigen Involutionen sollen die „Komponenten" jener „resul-

tierenden" sekundären Involution heißen. Die konjugierten Strahlen der einen Komponente treffen einander auf der Leitgeraden u und schneiden die Leitgerade v in konjugierten Punkten derselben Punktinvolution wie die konjugierten Strahlen der resultierenden Involution. Für die konjugierten Strahlen der zweiten Komponente vertauschen die beiden Leitgeraden diese Rollen untereinander. Demnach kann eine gegebene Bewegung im nichteuklidischen Raume mit der charakteristischen Involution auf C_v^u in zwei Bewegungen mit inzidentpaarigen charakteristischen Involutionen auf C_v^u zerlegt werden. Diese beiden Bewegungen sind zwei nichteuklidische Drehungen um die Achsen u und v. Demnach zeigt sich von selbst:

Eine nichteuklidische Bewegung läßt sich in zwei Drehungen um die beiden Leitgeraden ihrer charakteristischen sekundär involutorischen linearen Kongruenz C_v^u zerlegen. Jede der beiden Drehungen hat eine charakteristische inzidentpaarige Involution auf C_v^u, und aus den beiden inzidentpaarigen Involutionen resultiert die charakteristische Involution der resultierenden Bewegung.

Im hyperbolischen Raume mit der reellen strahlenlosen Inzidenzfläche $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$ lassen sich die ∞^1 Flächen des F^2-Büschels F_{qrst}^2, welche die charakteristische sekundäre Involution auf C_v^u bedingen (I, 3), mit Hilfe eines Parameters $\varkappa$ auf die Form bringen: $(x_1^2 + x_2^2)(1 - \varkappa) - (x_3^2 - x_4^2)(1 + \varkappa) = 0$. Diese Flächen sind nach obigem Satze Rotationsflächen mit den beiden einander (hyperbolisch-) rechtwinklig kreuzenden Rotationsachsen u, v; gehen sie doch durch jede der beiden Drehungen einzeln in sich über. Sie gestatten ∞^2 Bewegungen in sich, sind also Flächen konstanter Krümmung.

IV. Die sekundären Involutionen und die Theorie der Kollineationen im vierdimensionalen Raume.

11. Im Raume W von vier Dimensionen [8]) wird ein dreidimensionaler Raum Σ aus einem gegebenen, nicht in Σ liegenden Punkte S von W durch einen „zentrischen Bündel zweiter Art" projiziert. Nämlich es werden die Punkte, Strahlen und Ebenen von Σ durch die Strahlen, Ebenen und dreidimensionalen Räume des Punktes S angeschnitten. Der zentrische Bündel zweiter Art ist dreidimensional, wenn die Strahlen oder die dreidimensionalen Räume durch S als Elemente zugrunde liegen. Dabei sind zwei gegebene konjugiert imaginäre Ebenen erster Art des zentrischen Bündels S mit zwei konjugiert imaginären Strahlen erster Art des dreidimensionalen Raumes Σ inzident, zwei konjugiert imaginäre Ebenen zweiter Art schneiden den Raum Σ in zwei konjugiert imaginären Strahlen zweiter Art.

Eine allgemeine Kollineation im vierdimensionalen Raume, analytisch gegeben durch die Substitution $\varrho x_i' = \sum_{k=1}^{5} a_{ik} x_k$, $i = 1, \ldots, 5$, a_{ik} reell, bestimmt fünf Doppelpunkte und fünf dreidimensionale Doppelräume. Die Koordinaten der Doppelpunkte gehen aus den Gleichungssystemen hervor, die den voneinander verschiedenen Lösungen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_5$ der Determinantengleichung:

$$\Delta(\varrho) \equiv |a_{ik} - \varrho| = 0$$

[8]) Als erster hat wohl Veronese es unternommen, die Geometrie der vier- und mehrdimensionalen Räume streng synthetisch und in voller Allgemeinheit unter Einschluß der euklidischen und nichteuklidischen Metrik aufzubauen (Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten, Deutsch von Schepp, Leipzig 1894). Doch dürfen wir uns im folgenden zunächst noch die Freiheit nehmen, den im vierdimensionalen Raume gebrauchten geometrischen Definitionen und Operationen gegebenenfalls nur analytische Bedeutung beizumessen.

entsprechen. Unter der Voraussetzung, daß niemals in dieser Determinante für irgendeinen der fünf ϱ-Werte die sämtlichen zu den Elementen einer Zeile gehörigen Adjunkten verschwinden, bilden die fünf Deckpunkte die Scheitel eines (vierdimensionalen) „Deckpentaeders". Jedem Scheitel liegt ein von den vier übrigen Deckpunkten bestimmtes Tetraeder „gegenüber". Der durch dieses Tetraeder bestimmte dreidimensionale Deckraum heißt „Seitenraum" oder „Flanke" des Pentaeders. Die zehn Verbindungsgeraden der fünf Scheitel sind die Kanten des Pentaeders, die Ebenen durch je drei Scheitel seine „Schneiden". Von den fünf Flanken des Pentaeders sind vier paarweise reelle oder paarweise konjugiert imaginäre Räume, die fünfte Flanke ist stets ein reeller Deckraum.

Der reelle Deckraum Δ wird durch die Kollineation des vierdimensionalen Raumes W kollinear auf sich bezogen. Sein Decktetraeder enthält ein Paar reeller windschiefer Gegenkanten, während die beiden übrigen Gegenkantenpaare aus reellen oder aus konjugiert imaginären Strahlen bestehen. In der Tat, die vier übrigen dreidimensionalen Doppelräume $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ sind als paarweise reelle oder konjugiert imaginäre Räume die Doppelelemente zweier hyperbolisch- oder elliptisch-involutorischer Raumbüschel erster Ordnung mit den reellen Trägerebenen δ_u und δ_v. Diese beiden Ebenen sind Doppelebenen der Kollineation und schneiden den Deckraum Δ in zwei reellen windschiefen Gegenkanten u, v seines Decktetraeders. Die von δ_u, δ_v getragenen involutorischen Raumbüschel erster Ordnung sind bzw. perspektiv zu zwei involutorischen Ebenenbüscheln erster Ordnung mit den Achsen u, v im Deckraum Δ und daher gleichzeitig mit ihnen hyperbolisch oder elliptisch. Die Strahlen u, v bilden die Leitgeraden einer linearen Kongruenz C_v^u. Die Strahlen von C_v^u sind sekundär involutorisch gepaart: Konjugierte Strahlen der sekundären Involution liegen in konjugierten Ebenen der beiden involutorischen Ebenenbüschel u und v, und durch sie gehen je zwei konjugierte Räume von jedem der beiden involutorischen Raumbüschel δ_u und δ_v. Die Kollineation führt die sekundäre Involution auf C_v^u in sich über und hat ihre Doppelstrahlen sowie die Leitgeraden u, v zu Deckstrahlen. Im (reellen) Deckraume Δ ist die sekundäre Involution auf C_v^u die charakteristische Involution der Kollineation.

Zwei homologe dreidimensionale Räume Σ, Σ' des vierdimensionalen Raumes W schneiden den reellen Deckraum Δ in den homologen Ebenen σ, σ'. Durch die charakteristische sekundäre Involution auf C_v^u und durch die homologen Ebenen σ, σ' ist die Kollineation des Deckraumes Δ bestimmt (7).

Eine gegebene Ebene ξ des Deckraumes Δ ist im vierdimensionalen Raume W die Trägerebene eines Büschels erster Ordnung von dreidimensionalen Räumen. Die ∞^4 dreidimensionalen Räume von W lassen sich auf ∞^3 Raumbüschel erster Ordnung verteilen, deren ∞^3 Trägerebenen die (reellen) Ebenen von Δ sind. Wird durch die kollineare Beziehung im vierdimensionalen Raume W dem gegebenen Raumbüschel erster Ordnung $\xi(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \ldots)$ der Raumbüschel $\xi'(\mathsf{A}', \mathsf{B}', \Gamma', \ldots)$ zugeordnet, so liegen diese beiden Raumbüschel perspektiv, denn sie haben den Deckraum Δ entsprechend gemein. Zwei gegebene Paare homologer Punkte M, N und M', N', die nicht in Δ liegen, werden bzw. mit ξ und ξ' durch die Paare homologer Räume M, N und M', N' der beiden perspektiven Raumbüschel $\xi(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \ldots)$ und $\xi'(\mathsf{A}', \mathsf{B}', \Gamma', \ldots)$ verbunden. Zu jedem Raume des ersten Büschels ist der homologe Raum des zweiten Büschels damit bestimmt. Aus alledem folgt:

Die Kollineation des vierdimensionalen Raumes W ist bestimmt durch die charakteristische sekundäre Involution des (reellen) Deckraumes Δ, durch zwei homologe dreidimensionale Räume Σ, Σ' und durch zwei Paare von homologen Punkten M, N und M', N',

die nicht im Deckraume Δ liegen. Die vier von Δ verschiedenen (reellen oder konjugiert imaginären) Deckräume der Kollineation gehen bzw. durch die vier (reellen oder konjugiert imaginären) Doppelstrahlen der charakteristischen Involution in Δ und gehen je paarweise durch die beiden Leitgeraden ihrer Trägerkongruenz.

12. In der Flanke Δ des vierdimensionalen Deckpentaeders (11) zeigt sich die Existenz der vier übrigen Flanken durch die vier Ebenen des in Δ liegenden Decktetraeders an. Diese vier Ebenen sind die vier in Δ liegenden Schneiden. Jede von ihnen geht durch eine der beiden Leitgeraden und durch einen der vier Doppelstrahlen der sekundär involutorischen Kongruenz C_v^u. Die übrigen sechs Schneiden des Deckpentaeders gehen je entweder durch eine der beiden Leitgeraden u, v oder durch einen der vier Doppelstrahlen.

Konjugierte Strahlen der charakteristischen Involution auf C_v^u schneiden die Leitgeraden u, v in konjugierten Punkten zweier Punktinvolutionen und werden aus ihnen durch konjugierte Ebenen zweier Ebeneninvolutionen projiziert. Die je von der einen Leitgerade getragene Punktinvolution ist perspektiv zu der je von der anderen Leitgerade getragenen Ebeneninvolution und daher gleichzeitig mit ihr eine hyperbolische, parabolische, elliptische oder identische Involution. Von den zehn Kanten des vierdimensionalen Deckpentaeders fallen sechs mit den beiden Leitgeraden u, v und den vier Doppelstrahlen der sekundär involutorischen Kongruenz C_v^u zusammen. Die vier übrigen Kanten sind bzw. mit den vier Doppelpunkten der von u und v getragenen Punktinvolutionen inzident.

Unter diesen Umständen ist das vierdimensionale Deckpentaeder der Kollineation hinsichtlich seiner reellen und seiner konjugiert imaginären Flanken, Schneiden, Kanten und Ecken bestimmt durch die sekundäre charakteristische Involution auf der linearen Kongruenz C_v^u.

Es sei h die Anzahl der von den Leitgeraden u und v getragenen hyperbolischen Punktinvolutionen ($h = 0, 1, 2$), e die Anzahl der von ihnen getragenen elliptischen Punktinvolutionen ($e = 0, 1, 2$). Die charakteristische Involution besitze r reelle Doppelstrahlen, i konjugiert imaginäre Doppelstrahlen erster Art oder j konjugiert imaginäre Doppelstrahlen zweiter Art. Aus diesen Zahlen ergeben sich die Elemente des Deckpentaeders; es sind nämlich vorhanden:

reelle Flanken und reelle Ecken je ..... $1 + 2h$,
konjugiert imaginäre Flanken und Ecken je ..... $2e$,
reelle Schneiden und Kanten je..... $2(1 + h) + r$,
konjugiert imaginäre Schneiden und Kanten erster Art je ..... $i + 2e$,
konjugiert imaginäre Schneiden und Kanten zweiter Art je ..... j.

Durch diese Formeln sollen jedoch nur allgemeine vierdimensionale Pentaeder gekennzeichnet werden, deren Ecken und Flanken linear voneinander unabhängig bleiben, so daß nie mehr als vier Ecken in einer Flanke liegen usf. — Parabolische Punkt- und Ebeneninvolutionen auf den Leitgeraden u, v ziehen im Pentaeder doppelt zu rechnende Ecken und Flanken nach sich. Desgleichen gehen zweifache oder vierfache Doppelstrahlen der charakteristischen Involution mit den entsprechenden Multiplizitäten in die obigen Formeln ein. Auch die dadurch entstehenden Möglichkeiten sollen hier nicht weiter verfolgt werden.

Eingegangen 22. Dezember 1930.