Zeitlich veränderliche Metrik.

Von **Gerhard Haenzel** in Berlin.

Die Theorie der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz[1]) bietet mannigfache Hilfsmittel zur geometrischen Behandlung der nichteuklidischen Maßbestimmungen. Ein gegebener Strahl und seine reziproke Polare für die Fundamentalfläche der Metrik sind — als reelle windschiefe Strahlen — die Leitgeraden einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz. Die ∞^2 Kongruenzstrahlen werden einander paarweise zugeordnet als reziproke Polaren für die Fundamentfläche, d. h. die Korrelation des polaren Raumes dieser Fläche bedingt auf der Kongruenz eine sekundäre Involution[1]). Ist die Fundamentalfläche eine reelle, strahlenlose Fläche zweiter Ordnung, liegt also eine hyperbolische Maßbestimmung vor, so hat die sekundäre Involution auf der linearen Kongruenz zwei Paare konjugiert imaginärer Strahlen erster Art zu Doppelstrahlen. Sie projizieren je aus einem der beiden reellen Schnittpunkte der einen Leitgerade mit der Fundamentalfläche die beiden konjugiert imaginären Schnittpunkte der anderen mit der Fundamentalfläche. Ist die Fundamentalfläche eine imaginäre Fläche zweiter Ordnung mit reellem polaren Raume, befinden wir uns demnach im elliptischen Raume, so sind in ihm konjugierte Strahlen der sekundären Involution Clifford-Parallelen[2]). Die sekundäre Involution hat hier zwei Paare konjugiert imaginäre Strahlen zweiter Art zu Doppelstrahlen. Jedes Paar bedingt eine elliptische lineare Kongruenz als deren Leitgeraden, und beide Kongruenzen werden von Clifford-

[1]) Herr Jolles, Die Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz, Math. Ztschrft. 27, S. 427. — Je zwei konjugierte Strahlen einer Involution auf einer linearen Kongruenz sind einander zugeordnet als reziproke Polaren der ∞^1 Flächen zweiter Ordnung eines F^2-Büschels. Die Involution heißt nach Herrn Jolles eine primäre, wenn die Flächen des F^2-Büschels je einscharig in der linearen Kongruenz enthalten sind, sie heißt eine sekundäre, wenn diese Flächen beidscharig involutorisch im geschart involutorischen Raume der Kongruenz liegen.

[2]) Haenzel, Über die charakteristischen Involutionen der nichteuklidischen Bewegungen, Monatshefte f. Mathem. u. Physik XXXVII, S. 209—214.

Parallelen erster und zweiter Art erfüllt. Die durch die vier (paarweise konjugiert imaginären windschiefen) Doppelstrahlen hindurchgehenden ∞^1 reellen Strahlenflächen zweiter Ordnung sind die bekannten Clifford-Flächen. Ihre flächentheoretische Eigenart zeigt sich nunmehr von selbst. Ähnliches gilt von der Struktur der mit der Maßbestimmung verknüpften Gruppe starrer Bewegungen und manchem andern Theoreme der nichteuklidischen Geometrie[3]).

Mit Hilfe der von Herrn Jolles synthetisch entwickelten Theorie der Involutionen auf der linearen Kongruenz wird im folgenden eine zeitlich veränderliche Metrik begründet, wie sie bisher noch nicht behandelt wurde. Eine zeitlich veränderliche Metrik wird jedesmal dadurch erhalten, daß im Verlauf der Zeit die Fundamentalfläche der Maßbestimmung Teile eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung beschreibt. Die Flächen dieses Büschels liegen hier beidscharig involutorisch im geschart involutorischen Raume einer linearen Kongruenz und die Korrelationen ihrer polaren Räume paaren die Strahlen der Kongruenz sekundär involutorisch, indem sie je zwei Kongruenzstrahlen als reziproke Polaren einander zuweisen. Es zeigt sich, daß eine sekundäre Involution auf einer (hyperbolischen) linearen Kongruenz eine zeitlich veränderliche Metrik bedingt, die von sehr verschiedener Natur sein kann, je nach der Art der sekundären Involution und des zugehörigen F^2-Büschels. Jedoch werden im folgenden nur diejenigen beiden Fälle solcher zeitlich veränderlichen Metrik eingehend behandelt, die bzw. den Hypothesen von Riemann und Lobatschewsky entsprechen.

I. Sekundäre Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz.

1. Die drei Gegenkantenpaare qr, st, uv des Koordinatentetraeders seien dargestellt durch:

$$q\colon x_1=0,\ x_2=0;\quad r\colon x_3=0,\ x_4=0;\quad s\colon x_1=0,\ x_3=0;$$
$$t\colon x_2=0,\ x_4=0;\quad u\colon x_1=0,\ x_4=0;\quad v\colon x_2=0,\ x_3=0.$$

Die drei Gegenkantenpaare geben die Leitgeradenpaare dreier linearen Strahlenkongruenzen C_r^q, C_t^s, C_v^u ab, in homogenen Linienkoordinaten p_{ik} gekennzeichnet durch die drei Gleichungspaare:

[3]) Haenzel, Eine analytische Theorie der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz und deren Anwendung, Journal f. die reine u. angew. Mathem. 166 (1932), S. 167—181.

$$C_r^q\colon p_{12}=0,\ p_{34}=0.\quad C_t^s\colon p_{13}=0,\ p_{24}=0.\quad C_v^u\colon p_{14}=0,\ p_{23}=0.$$

Die drei Gegenkantenpaare des Tetraeders bestimmen außerdem die drei einfachen Raumvierseite:

$$stuv \qquad\qquad qruv \qquad\qquad qrst$$

Sie sind die Basisvierseite der drei F^2-Büschel F^2_{stuv}, F^2_{qruv}, F^2_{qrst}, die mittels eines Parameters λ Anlaß zu den Gleichungen geben:

$$\begin{array}{ll} F^2_{stuv} & x_1x_2-\lambda\cdot x_3x_4=0\\ F^2_{qruv} & x_1x_3-\lambda\cdot x_2x_4=0\\ F^2_{qrst} & x_1x_4-\lambda\cdot x_2x_3=0. \end{array}$$

Jede gegebene Fläche F^2_λ des F^2-Büschels F^2_{qruv} liegt mit ihrer einen Regelschar in der linearen Kongruenz C_r^q, mit der anderen in der linearen Kongruenz C_v^u. Entsprechendes gilt von den beiden übrigen F^2-Büscheln F^2_{qrst} und F^2_{stuv}. Jede Fläche eines dieser beiden Büschel liegt einscharig in den beiden linearen Kongruenzen, deren Leitgeradenpaare das Basisvierseit des F^2-Büschels bilden.

Die linearen Kongruenzen C_r^q, C_t^s und C_v^u bestimmen als Deckstrahlenkongruenzen drei geschart involutorische Räume Σ_{qr}, Σ_{st} und Σ_{uv}. Die zugehörigen geschart involutorischen Kollineationen führen auf die Substitutionen:

$$\begin{array}{llll} \Sigma_{qr} & \rho x_1=x_1' & \rho x_2=x_2' & \rho x_3=-x_3' & \rho x_4=-x_4'\\ \Sigma_{st} & \rho x_1=x_1' & \rho x_2=-x_2' & \rho x_3=x_3' & \rho x_4=-x_4'\\ \Sigma_{uv} & \rho x_1=x_1' & \rho x_2=-x_2' & \rho x_3=-x_3' & \rho x_4=x_4' \end{array}$$

Die drei geschart involutorischen Kollineationen sind untereinander vertauschbar, aus je zweien von ihnen resultiert die dritte und aus allen dreien die Identität. Nun trägt jede gegebene Fläche des F^2-Büschels F^2_{qruv} zwei involutorische Regelscharen im geschart involutorischen Raume Σ_{st} der linearen Kongruenz C_t^s. Das hat zur Folge, daß umgekehrt die ∞^2 Kongruenzstrahlen von C_t^s paarweise reziproke Polaren für die ∞^1 Flächen des F^2-Büschels F^2_{qruv} sind, wovon man sich rechnerisch leicht überzeugen kann. Ein reeller polarer Raum, dessen (reelle oder imaginäre) Inzidenzfläche zwei involutorische Regelscharen im geschart involutorischen Raume einer

linearen Kongruenz trägt, heißt ein sekundärer[4]) polarer Raum der Kongruenz, die durch ihn auf der Kongruenz bestimmte Involution eine sekundäre[4]) Involution. Mit anderen Worten:

„Die ∞^1 Flächen des F^2-Büschels F^2_{qruv} sind beidscharig involutorische Flächen im geschart involutorischen Raume der linearen Kongruenz C^s_t. Sie bestimmen auf der Kongruenz C^s_t eine sekundäre Involution. Konjugierte Strahlen dieser Involution sind reziproke Polaren für alle Flächen des F^2-Büschels."

Die Koordinaten p_{ik}, p'_{ik}, konjugierter Strahlen g, g' der sekundären Involution auf C^s_t sind verknüpft durch die Substitutionen[5]):

$$-\frac{\lambda}{4}p_{12}=p'_{12},\quad +\frac{\lambda}{4}p_{14}=p'_{14},\quad +\frac{\lambda}{4}p_{23}=p'_{23},\quad -\frac{\lambda}{4}p_{34}=p'_{34}.$$

Die Doppelstrahlen der sekundären Involution sind die Seiten q, r, u, v des Basisvierseits.

2. Die vorliegende Gleichungsform der Fläche zweiter Ordnung:

$$x_1 x_3 - \lambda \cdot x_2 x_4 = 0$$

gibt von sich aus keine Auskunft darüber, ob die Regelstrahlen der Fläche — und damit die Doppelstrahlen der dargestellten sekundären Involution — reelle Strahlen oder konjugiert imaginäre Strahlen erster oder zweiter Art sind. Durch die Substitutionen:

$$\begin{array}{l|l} x_1=\rho(\mathfrak{x}_1+i\mathfrak{x}_3),\ x_2=-\rho(\mathfrak{x}_2+i\mathfrak{x}_4), & x_1=\rho(\mathfrak{x}_1+i\mathfrak{x}_3),\ x_2=-\rho(\mathfrak{x}_2-\mathfrak{x}_4), \\ x_3=\rho(\mathfrak{x}_1-i\mathfrak{x}_3),\ x_4=\ \rho(\mathfrak{x}_2-i\mathfrak{x}_4) & x_3=\rho(\mathfrak{x}_1-i\mathfrak{x}_3),\ x_4=\ \rho(\mathfrak{x}_2+\mathfrak{x}_4) \end{array}$$

geht die Gleichung des F^2-Büschels F^2_{qruv} in die Formen über:

$$\mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{x}_3^2+\lambda(\mathfrak{x}_2^2+\mathfrak{x}_4^2)=0 \qquad \mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{x}_3^2+\lambda(\mathfrak{x}_2^2-\mathfrak{x}_4^2)=0$$

oder mit $\lambda=\dfrac{1+k}{1-k}$ in:

$$(\mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{x}_3^2)(1-k)+ \qquad (\mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{x}_3^2)(1-k)+$$
$$+(\mathfrak{x}_2^2+\mathfrak{x}_4^2)(1+k)=0. \qquad +(\mathfrak{x}_2^2-\mathfrak{x}_4^2)(1+k)=0.$$

[4]) Herr Jolles, a. a. O. S. 428.

[5]) Haenzel, Die in Anmerkung 3 genannte Abhandlung.

Sein Basisvierseit besteht nunmehr aus zwei Paaren von konjugiert imaginären windschiefen Strahlen q, r und u, v. Der F^2-Büschel enthält:

a) ∞^1 imaginäre Flächen zweiter Ordnung mit reellen polaren Räumen, für die:

$$+\infty>\lambda>0 \text{ und } +1>k>-1$$

b) zwei je in zwei konjugiert imaginäre Ebenen zerfallene Flächen, für die:

$$\lambda=0,\ \infty \text{ und } k=\mp 1$$

c) ∞^1 reelle Strahlenflächen zweiter Ordnung, für die:

$$0>\lambda>-\infty \text{ und } +\infty>k>+1$$
$$\text{bzw. } -1>k>-\infty.$$

Sein Basisvierseit besteht nunmehr aus zwei Paaren von konjugiert imaginären inzidenten Strahlen q, u und r, v. Der F^2-Büschel enthält:

a) ∞^1 reelle strahlenlose Flächen zweiter Ordnung, für die:

$$+\infty>\lambda>0 \text{ und } +1>k>-1$$

b) eine in zwei konjugiert imaginäre und eine in zwei reelle Ebenen zerfallene Fläche, für die:

$$\lambda=0,\ \infty \text{ und } k=\mp 1$$

c) ∞^1 reelle strahlenlose Flächen zweiter Ordnung, für die:

$$0>\lambda>-\infty \text{ und } +\infty>k>+1$$
$$\text{bzw. } -1>k>-\infty.$$

Für den links behandelten Fall werden die drei linearen Kongruenzen C^q_r, C^s_t, C^u_v jetzt dargestell durch:

$$C^q_r\ \begin{array}{l}\mathfrak{p}_{14}+\mathfrak{p}_{23}=0\\ \mathfrak{p}_{12}-\mathfrak{p}_{34}=0\end{array} \qquad C^s_t\ \begin{array}{l}\mathfrak{p}_{13}=0\\ \mathfrak{p}_{24}=0\end{array} \qquad C^u_v\ \begin{array}{l}\mathfrak{p}_{14}-\mathfrak{p}_{23}=0\\ \mathfrak{p}_{12}+\mathfrak{p}_{34}=0\end{array}$$

Die Flächen des F^2-Büschels F^2_{qruv} liegen beidscharig involutorisch in den beiden elliptischen linearen Kongruenzen C^q_r und C^u_v. Die von ihnen auf der hyperbolischen linearen Kongruenz C^s_t bedingte sekundäre Involution (1) ist jetzt gegeben durch:

$$\rho\,\mathfrak{p}_{12}=+\mathfrak{p}'_{34},\quad \rho\,\mathfrak{p}_{14}=+\mathfrak{p}'_{23},\quad \rho\,\mathfrak{p}_{23}=\mathfrak{p}'_{14},\quad \rho\,\mathfrak{p}_{34}=+\mathfrak{p}'_{12}.$$

In dem rechts behandelten Falle ist die hyperbolische lineare Kongruenz C^s_t gleichfalls dargestellt durch $\mathfrak{p}_{13}=0$, $\mathfrak{p}_{24}=0$ und die auf ihr durch die Flächen des F^2-Büschels F^2_{qruv} bedingte sekundäre Involution liefert ähnliche Substitutionen wie links. Statt der Darstellung der linearen Kongruenz C^q_r und C^u_v ergeben sich jedoch

zweimal die Doppelgleichungen $\mathfrak{p}_{12} = \mathfrak{p}_{14} = 0$ und $\mathfrak{p}_{23} = \mathfrak{p}_{34} = 0$. Das war zu erwarten, da die konjugiert imaginären Strahlen erster Art q, u und r, v niemals die Leitgeradenpaare reeller nicht zerfallenen linearen Kongruenzen abgeben können.

II. Zeitlich veränderliche Riemann-Metrik.

3. Die imaginäre Fläche zweiter Ordnung F^2 mit reellem polaren Raume und der Gleichung:

$$\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_3^2 + 4\,c_e^2\,\mathfrak{x}_4^2 = 0$$

bedingt als Fundamentalfläche mit rellem c_e eine elliptische Maßbestimmung des dreidimensionalen Riemann-Raumes. Es sei $\lambda = f(t)$ eine eindeutige, reelle, stetige und positive Funktion der Zeit t, die zu gegebener Zeit $t = 0$ den Wert $+1$ besitzt, und es beschreibe die Fläche F_λ^2 im Verlaufe der Zeit den F^2-Büschel:

$$F_{qruv}^2 = \mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_3^2 + f(t)\,(\mathfrak{x}_2^2 + 4\,c_e^2\,\mathfrak{x}_4^2) = 0.$$

Das Basisvierseit (1 und 2) $qruv$ des Büschels besteht aus zwei Paaren konjugiert imaginärer windschiefen Gegenseiten. Die Gleichung des Büschels wird auf die Form gebracht:

$$(\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_3^2)\,(1 - k) + (\mathfrak{x}_2^2 + 4\,c_e^2\,\mathfrak{x}_4^2)\,(1 + k) = 0.$$

Jedoch durchläuft die Fläche F_λ^2 wegen:

$$+1 > k = \frac{f(t) - 1}{1 + f(t)} > -1$$

nur die imaginären Flächen, niemals die reellen Strahlenflächen dieses Büschels (2). Der F^2-Büschel F_{qruv}^2 bedingt auf der hyperbolischen linearen Kongruenz C_t^s eine sekundäre Involution (1 und 2), nämlich:

$$\rho\,\mathfrak{p}_{12} = +4\,c_e^2\,\mathfrak{p}_{34}', \quad \rho\,\mathfrak{p}_{14} = +\mathfrak{p}_{23}', \quad \rho\,\mathfrak{p}_{23} = +4\,c_e^2\,\mathfrak{p}_{14}', \quad \rho\,\mathfrak{p}_{34} = +\mathfrak{p}_{12}'.$$

Irgend zwei konjugierte Strahlen dieser sekundären Involution sind reziproke Polaren für alle Flächen des F^2-Büschels. Sind nun zwei Strahlen für die Fundamentalfläche reziprok polar, so sind sie Clifford-Parallelen des elliptischen Raumes. Hieraus folgt:

„Eine sekundäre Involution mit zwei Paaren von konjugiert imaginären windschiefen Doppelstrahlen auf einer hyperbolischen linearen Kongruenz C_t^s bedingt eine zeitlich veränderliche elliptische Maßbestimmung dadurch, daß die Fundamentalfläche der Metrik die ∞^1 imaginären Flächen zweiter Ordnung beschreibt, welche die sekundäre Involution bestimmen. Je zwei konjugierte Strahlen der sekundären Involution sind zwei Clifford-Parallelen und geben diese Rolle im Laufe der Zeit nicht auf."

Eigenschaften der Metrik, die der zeitlichen Veränderung nicht unterliegen, werden „zeitlich invariant" genannt.

4. Gründet sich hiernach die durch die sekundäre Involution bedingte Metrik auf die Folge der Flächen:

$$\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_3^2 + f(t)\,(\mathfrak{x}_2^2 + 4\,c_e^2\,\mathfrak{x}_4^2) = 0,$$

so ist die Entfernung zweier gegebenen Punkte $X(x_1 \ldots x_4)$ und $Y(y_1 \ldots y_4)$ zur Zeit t gemessen durch:

$$\mathrm{I} \ldots E_t(xy) = 2\,c_e \text{ arc cos } e, \text{ wo } e = \frac{x_1 y_1 + x_3 y_3 + f(t)\,(x_2 y_2 + 4\,c_e^2\,x_4 y_4)}{\sqrt{\left[x_1^2 + x_3^2 + f(t)\,(x_2^2 + 4\,c_e^2\,x_4^2)\right]\left[y_1^2 + y_3^2 + f(t)\,(y_2^2 + 4\,c_e^2\,y_4^2)\right]}}$$

Unter Benutzung homogener Ebenenkoordinaten u_i wird (3) die Folge imaginärer Flächen zweiter Ordnung (mit reellen polaren Räumen) als Folge von Flächen zweiter Klasse durch die Gleichung dargestellt:

$$f(t) \cdot 4\,c_e^2\,(u_1^2 + u_3^2) + (4\,c_e^2\,u_2^2 + u_4^2) = 0.$$

Infolgedessen ist der Winkel zweier gegebenen Ebenen $\xi(v_1 \ldots v_4)$ und $\eta(w_1 \ldots w_4)$ zur Zeit t gemessen durch:

$$\mathrm{II} \ldots \Phi_t(\xi\eta) = 2\,c_e \text{ arc cos } w, \text{ wo } w = \frac{f(t)\,4\,c_e^2\,(v_1 w_1 + v_3 w_3) + 4\,c_e^2\,w_2 v_2 + w_4 v_4}{\sqrt{\left[f(t)\,4\,c_e^2\,(v_1^2 + v_3^2) + (4\,c_e^2\,v_2^2 + v_4^2)\right]\left[f(t)\,4\,c_e^2\,(w_1^2 + w_3^2) + (4\,c_e^2\,w_2^2 + w_4^2)\right]}}$$

Die sekundäre Involution auf C_t^s hat zwei Paare konjugiert imaginärer windschiefen Doppelstrahlen q, r und u, v. Sie sind die Leitgeraden (1) der beiden mitbestimmten elliptischen linearen Kongruenzen C_r^q und C_v^u. Die Kongruenzstrahlen von C_r^q und C_v^u sind aber Clifford-Parallelen erster und zweiter Art[6]), solange die

[6]) Haenzel, Abhandlung in Anmerkung 2, S. 214.

Fundamentalfläche der Metrik durch das Raumvierseit $qruv$ hindurchgeht. Mit Rücksicht hierauf gilt:

„In der durch die sekundäre Involution auf der linearen Kongruenz C_t^s bedingten zeitlich veränderlichen Riemann-Metrik werden die beiden mitbestimmten linearen Kongruenzen C_r^q und C_v^u von Clifford-Parallelen erster und zweiter Art erfüllt. Die Strahlen dieser beiden Kongruenzen sind in ihrer Eigenschaft als Clifford-Parallelen zeitlich invariant."

Jede der beiden linearen Kongruenzen C_r^q und C_v^u sendet durch einen gegebenen Punkt des Raumes je einen Kongruenzstrahl. Daraus ergibt sich:

„Durch einen gegebenen Punkt gehen zwei (reelle) Strahlen, mit zeitlich invarianter Längenmessung. Der eine Strahl liegt in der linearen Kongruenz C_r^q, der andere in der linearen Kongruenz C_v^u. Weitere Strahlen dieser Art gibt es nicht."

Die beiden elliptischen linearen Kongruenzen C_r^q, C_v^u stellen somit den Ort aller Strahlen dar, auf denen die Maßbestimmungen der von uns behandelten ∞^1 Riemann-Räume konstanter Krümmung übereinstimmen. — Der F^2-Büschel F_{qruv} enthält neben den ∞^1 imaginären Flächen (2) auch ∞^1 reelle Strahlenflächen zweiter Ordnung. Jede dieser Flächen liegt einscharig in den linearen Kongruenzen C_r^q und C_v^u, ist also eine Clifford-Fläche[7]) (mit der Krümmung Null). Hieraus ist zu folgern:

„Der die sekundäre Involution auf der linearen Kongruenz C_t^s bestimmende F^2-Büschel enthält ∞^1 zeitlich invariante (reelle) Clifford-Flächen."

Die Gleichungen dieser Clifford-Flächen sind:

$$(\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_3^2)(1-k) + (\mathfrak{x}_2^2 + 4c_e^2\mathfrak{x}_4^2)(1+k) = 0$$
$$+\infty > k > +1, \quad -\infty > k > -1.$$

Jede Fläche des F^2-Büschels F_{stuv}^2 liegt (1) einscharig in der linearen Kongruenz C_v^u, trägt also eine Schar von zeitlich invarianten Clifford-Parallelen zweiter Art. Jede Fläche des F^2-Büschels F_{qrst} liegt (1) einscharig in der linearen Kongruenz C_r^q, trägt also eine Schar von zeitlich invarianten Clifford-Parallelen erster Art. — Die Gruppe

[7]) Haenzel, Abhandlung in Anmerkung 3, S. 178.

der starren Transformationen der zeitlich veränderlichen Riemann-Metrik ist in jedem Augenblicke eine andere. Sie enthält jedoch ständig eine zeitlich invariante Untergruppe aller Kollineationen, welche die bedingende sekundäre Involution (3) in sich überführen. Die Eigenschaften dieser Untergruppen können leicht angegeben werden.

5. An die Stelle der Gleichung I, die in Nr. 4 die zeitlich veränderliche Streckenmessung bestimmt, kann eine arc sin-Formel treten. Werden gleichzeitig inhomogene Koordinaten eingeführt durch:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4} \quad \text{und} \quad x' = \frac{y_1}{y_4}, \quad y' = \frac{y_2}{y_4}, \quad z' = \frac{y_3}{y_4},$$

so ist die Entfernung der gegebenen Punkte P und P' zur Zeit t gemessen durch:

$$\text{III} \ldots \; E_t(PP') = 2c_e \arcsin e, \text{ wo } e =$$
$$\sqrt{\frac{4c_e^2 f(t)[(x-x')^2 + f(t)(y-y')^2 + (z-z')^2] + f(t)[(xy'-yx')^2 + (yz'-zy')^2] + (xz'-zx')^2}{[x^2+z^2+f(t)(y^2+4c_e^2)][x'^2+z'^2+f(t)(y'^2+4c_e^2)]}}$$

Rückt P' in die Nachbarschaft von P, so wird $x' = x + dx$, $y' = y + dy$, $z' = z + dz$, auch kann der arc sin durch sein Argument ersetzt werden, und es ergibt sich das Bogenelement der zeitlich veränderlichen Riemann-Metrik:

$$\text{IV} \ldots \; ds_t =$$
$$\frac{\sqrt{f(t)\left[dx^2 + f(t)dy^2 + dz^2 + \frac{(xdy-ydx)^2 + (ydz-zdy)^2}{4c_e^2}\right] + \frac{(xdz-zdx)^2}{4c_e^2}}}{f(t) + \frac{x^2 + f(t)y^2 + z^2}{4c_e^2}}.$$

Nach der Form des Bogenelementes läßt die auf die sekundär involutorische lineare Kongruenz gegründete Maßbestimmung des dreidimensionalen Raumes folgende Strukturen zu:

a) Die zeitlich *veränderliche* Riemann-Metrik. Ihr Bogenelement ist durch Gleichung IV gegeben.

b) Die zeitlich *invariante* Riemann-Metrik. Das Krümmungsmaß ist konstant, solange c_e eine Konstante bleibt. Es gilt $t = 0$, $f(t) = +1$, daher:

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2+\frac{(x\,dy-y\,dx)^2+(x\,dz-z\,dx)^2+(y\,dz-z\,dy)^2}{4\,c_e^2}}}{1+\frac{x^2+y^2+z^2}{4\,c_e^2}}$$

c) Die zeitlich *veränderliche* euklidische Metrik. Das Krümmungsmaß verschwindet. Das Bogenelement:

$$ds_t = \sqrt{\frac{dx^2+f(t)\,dy^2+dz^2}{f(t)}}$$

zeigt eine zeitliche Dilation oder Kontraktion der Metrik in einer Achsenrichtung — hier der Richtung der y-Achse — in Verbindung mit zeitlicher Maßstabsänderung in allen drei Achsenrichtungen. Diese Metrik bezeichne ich als „affin-euklidisch."

d) Die zeitlich *invariante* euklidische Metrik. $t=0$, $f(t)=+1$.

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

Die Strukturen b, c und d sind Sonderfälle von a, jedoch ist c kein Sonderfall von b, dagegen d ein Sonderfall der Strukturen b und c.

III. Zeitlich veränderliche Lobatschewsky-Metrik.

6. Die gegebene reelle strahlenlose Fläche zweiter Ordnung F_λ^2 mit der Gleichung:

$$\mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{x}_2^2+\mathfrak{x}_3^2-4\,c_h^2\,\mathfrak{x}_4^2=0$$

bedingt als Fundamentalfläche mit der Konstanten c_h eine hyperbolische Maßbestimmung des dreidimensionalen Raumes. Es sei $\lambda=f(t)$ eine eindeutige, reelle, stetige und positive Funktion der Zeit t, die zur gegebenen Zeit $t=0$ den Wert $+1$ besitzt, und es beschreibe die Fläche F_λ^2 im Verlauf der Zeit den F^2-Büschel:

$$F_{qruv}^2=\mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{x}_3^2+f(t)\,(\mathfrak{x}_2^2-4\,c_h^2\,\mathfrak{x}_4^2)=0.$$

Das Basisvierseit (1 und 2) $qruv$ des F^2-Büschels besteht aus zwei Paaren konjugiert imaginärer inzidenten Strahlen. Die Gleichung des F^2-Büschels wird auf die Form gebracht:

$$(\mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{x}_3^2)(1-k)+(\mathfrak{x}_2^2-4\,c_h^2\,\mathfrak{x}_4^2)(1+k)=0.$$

Jedoch durchläuft die Fläche F_λ^2 wegen:

$$+1>k=\frac{f(t)-1}{1+f(t)}>-1$$

nur die eine der beiden im Büschel enthaltenen Folgen von reellen strahlenlosen Flächen zweiter Ordnung, niemals die andere Folge von reellen strahlenlosen Flächen, für die $+\infty>k>+1$ oder $-1>k>-\infty$ und ebensowenig die beiden je aus zwei reellen oder konjugiert imaginären Ebenen bestehenden zerfallenen Flächen zweiter Ordnung (2). Der F^2-Büschel F_{qruv}^2 bedingt auf der hyperbolischen linearen Kongruenz C_t^s eine sekundäre Involution (1 und 2) dargestellt durch:

$$\rho\,\mathfrak{p}_{12}=-4\,c_h^2\,\mathfrak{p}_{34}',\quad \rho\,\mathfrak{p}_{14}=+\mathfrak{p}_{23}',\quad \rho\,\mathfrak{p}_{23}=-4\,c_h^2\,\mathfrak{p}_{14}',\quad \rho\,\mathfrak{p}_{34}=+\mathfrak{p}_{12}'.$$

Ähnliche Betrachtungen wie die im Abschnitt II durchgeführten liefern das Bogenelement der zeitlich veränderlichen Lobatschewsky-Metrik:

$$\text{V.}\ldots\ ds_t=$$

$$\frac{\sqrt{f(t)\left[dx^2+f(t)\,dy^2+dz^2-\frac{(x\,dy-y\,dx)^2+(y\,dz-z\,dy)^2}{4\,c_h^2}\right]-\frac{(x\,dz-z\,dx)^2}{4\,c_h^2}}}{f(t)-\frac{x^2+f(t)\,y^2+z^2}{4\,c_h^2}}.$$

7. Die ∞^1 Flächen zweiter Ordnung:

$$(\mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{x}_3^2)(1-k)+(\mathfrak{x}_2^2-\mathfrak{x}_4^2)(1+k)=0$$
$$\text{mit } +\infty>k>+1 \text{ bzw. } -1>k>-\infty$$

sind Rotationsflächen für die Folge der in Nr. 6 angegebenen Maßbestimmungen. Die Ebenen von s ebenso wie die Ebenen von t schneiden diese ∞^1 Rotationsflächen in Scharen konzentrischer Kreise, deren Mittelpunkte bzw. auf t und auf s liegen. Diese Rotationsflächen haben konstante Krümmung und ihre Achsen s und t kreuzen einander (hyperbolisch) rechtwinklig. Auf den Achsen s, t ist die Streckenmessung zeitlich invariant. Aus alledem folgt:

„Eine sekundäre Involution mit zwei Paaren konjugiert imaginärer inzidenten Doppelstrahlen auf einer hyperbolischen linearen Kongruenz C_t^s bedingt eine zeitlich veränderliche hyperbolische Maßbestimmung. Bei der Maßbestimmung beschreibt die Fundamentalfläche der Metrik die eine der beiden die sekundäre Involution bedingenden Folgen reeller strahlenloser Flächen zweiter Ordnung, während sich die Flächen der andern Folge als zeitlich invariante Rotationsflächen mit den Achsen s und t erweisen. Längs der Achsen s und t herrscht zeitlich invariante Streckenmessung, um diese Achsen in den bzw. zu ihnen senkrechten Ebenen zeitlich invariante Winkelmessung.“

(Eingegangen: 1. VIII. 1931.)