Natürlich habe ich auch viele Existenzfragen und Probleme vom Dirichletschen Typus studiert. Es ist z. B. möglich, c so zu wählen, daß alle Integrale von der Form (7) mit *beschränktem* φ selbst beschränkt sind; es gibt also dann keine unbeschränkten Integrale mit beschränktem φ, und dieser Fall ist *identisch* mit dem, wo alle beschränkten Integrale in 0 verschwinden.

Nach diesen Studien war es angezeigt, den Fall zu betrachten, wo *c auf einer Punktmenge singulär ist.* Was die Punktmengen von der Kapazität 0 betrifft, werde ich kurz sagen, daß die beschränkten Integrale in jedem Punkt der Menge sich so betragen, als ob er isoliert wäre [33]).

Eine allgemeinere Frage würde die sein, das Verhalten der Integrale am Rande eines Gebietes zu studieren, wo c definiert ist. Dies schließt sich an das Dirichletsche Problem an, das ich im allgemeinen Wienerschen Sinne ebenfalls studiert habe [34]).

Alles dies ist noch wenig bekannt, sogar gewisse wichtige Sätze über die Potentialfunktionen und ganz besonders die Geschichte der Frage. So möchte ich hoffen, daß dieser kurze Überblick auf diese Resultate und die Möglichkeit weiterer Untersuchungen [35]) über die Differentialgleichungen vom elliptischen Typus einiges Interesse gelenkt hat.

33) Vergl. Bulletin Sciences math., sept. 1931.

34) Vergl. meinen Vortrag (loc. cit.) „Moderne Untersuchungen ... (Jahresbericht), R. Ist. Lombardo, 1930, LXIII, Fasc. XI—XV; 1932, LXV, Fasc. I—V. Bull. Sc. math., sept. 1931, Avril 1932 und eine weitere demnächst erscheinende Notiz.

35) Ich habe auch die Integrale von $\Delta u = f(M)$ in der Umgebung eines singulären Punktes von f studiert. Vergl. thèse (loc. cit.), chap. II § II und den demnächst erscheinenden Artikel „Sur les singularités ponctuelles des fonctions sous harmoniques“ (loc. cit.) Bull. Sc. Math.

Euklidische Geometrie, nichteuklidische Geometrie und Raum — Zeitstruktur im Systeme Spinozas [1]).

Von Gerhard Haenzel in Berlin.

INHALT.

Gleich nach der Entdeckung der Nichteuklidischen Geometrien entwickelte sich ein langer und heftiger Streit um die Gültigkeit und Priorität der Euklidischen Geometrie. Eine umfangreiche Literatur entstand über die Frage, welche Geometrie die richtige oder wenigstens die wahrscheinlichste sei. Mit dem Hervortreten der Relativitätstheorie hat die Frage nach der Struktur von Raum und Zeit — gestützt auf die Untersuchungen Riemanns — von Neuem das Interesse beansprucht.

Alle auf dieses Problem seitens der Physiker und Mathematiker gerichteten Untersuchungen tragen zwei charakteristische Merkmale: Einmal sollen die Begriffe Raum und Zeit, jeder für sich betrachtet, „zu bloßen Schatten herabsinken“ und nur die Verkoppelung beider zu einer Raum-Zeit-Struktur, einer Welt, soll das Weltgeschehen in Wahrheit tragen und verkörpern. Zum anderen wird kein geometrischer Raum, kein mathematisches Kontinuum, der Untersuchung unterworfen. Sondern die Materie, die das betrachtete Raumstück erfüllt, soll den tragenden Untergrund für die jeweils gültige Metrik abgeben. Die Geometrie wird zur Feldtheorie abgewandelt. Da lösen sich dann neue und neuste Strukturen einander ab gleichsam als ob sie physikalische Versuchshypothesen wären. Diese Theorien treten mit dem Anspruch auf, ein neues philosophisches Weltbild geschaffen zu haben, vornehmlich gestützt auf den Satz, daß durch die Entwicklung der

1) Vorgelegt in der 285. Sitzung am 29. Juni 1932.

Nichteuklidischen Geometrie und ihrer modernen Fortbildungen die einschlägigen Auffassungen Kants widerlegt seien.

Unter diesen Umständen drängt sich die Frage auf, ob ein solcher Anspruch berechtigt ist, oder ob der Nichteuklidischen Geometrie ein anderer Platz zugewiesen werden muß.

I.

Tempus — Aeternitas.
Existentia — Essentia.

Die Erkenntnistheorie des Benedictus de Spinoza, im unvollendeten „Tractatus de intellectus emendatione" vorbereitet und in der „Ethik" vollendet, baut auf dem Fundament einer Anzahl von Grundbegriffen, zu denen als wichtigste die folgenden zählen[2]):

1. Die *Substanz*. Für sie gilt: „Ethices I, definitio III. Per substantiam intelligo id, quod in se est et per se concipitur: hoc est id, cujus conceptus non indiget conceptu alterius rei, a quo formari debeat. — Definitio VI. Per Deum intelligo ens absolute infinitum, hoc est, substantiam constantem infinitis attributis, quorum unumquodque aeternam et infinitam essentiam exprimit.

2. Die *Kausalität*. Ihre Gültigkeit und Charakteristik zeigt sich vornehmlich durch: „Ethices I, Axiom III. Ex data causa determinata necessario sequitur effectus et contra; si nulla detur determinata causa, impossibile est, ut effectus sequatur. — Axiom IV. Effectus cognitio a cognitione causae dependet et eandem involvit.

3. Der Satz des *ausgeschlossenem Dritten* ist in den Schlußweisen der Ethik verwendet.

4. Das *immanente Denken*, von Spinoza als „cogitatio" bezeichnet, wird in Form des Lehrsatzes eingeführt: „Ethices II, propos. I. Cogitatio attributum Dei est, sive Deus est res cogitans".

5. Die *räumliche Ausdehnung*, extensio genannt, postuliert der Satz: „Ethices II, propos. II. Extensio attributum Dei est, sive Deus est res extensa".

Die *Zeit* gehört *nicht* zu den Fundamentalbegriffen dieser Erkenntnistheorie. Die der Zeit zugewiesene Rolle ist für Spinozas gesamtes System von ganz außerordentlicher Bedeutung und zwar

2) Das more geometrico modifizierte Latein der Ethik ist ohne Schädigung seiner großen begrifflichen Schärfe schwer zu übersetzen. Die Zitate sind der Ausgabe „Opera posthuma", 1677 entnommen. Einige dabei gesperrt gedruckte Worte sind es im Original nicht.

wird ihre Stellung durch folgende Sätze der Ethik deutlich charakterisiert:

„Ethices I, definitio VIII. Per aeternitatem intelligo ipsam existentiam, quatenus ex sola rei aeternae definitione necessario sequi concipitur. — Explic. Talis enim existentia, ut aeterna veritas, sicut rei essentia, concipitur, proptereaque per durationem, aut tempus explicari non potest, tametsi duratio principio et fine carere concipiatur. — Eth. I, Propos. XXIV, Coroll. ... nam sive res existant, sive non existant, quotiescunque ad earum essentiam attendimus, eandem nec existentiam, nec durationem involvere comperimus. — Eth. II, Propos. XLIV, Coroll. II. De natura Rationis est, res sub quadam aeternitatis specie percipere. — Propos. XLV, Schol. Hic per existentiam non intelligo durationem, ... — Eth. V, Propos. XXIII, Schol. Est, uti diximus, haec idea, quae Corporis essentiam sub specie aeternitatis exprimit, certus cogitandi modus, quid ad Mentis essentiam pertinet, ... Mens igitur nostra eatenus tantum potest dici durare, eiusque existentia certo tempore definiri potest, quatenus actualem Corporis existentiam involvit, et eatenus tantum potentiam habet rerum existentiam tempore determinandi, easque sub duratione concipiendi. — Eth. V, Propos. XXIX. Quicquid Mens sub specie aeternitatis intelligit, id ex eo non intelligit, quod Corporis praesentem actualem existentiam concipit; sed ex eo, quod Corporis essentiam concipit sub specie aeternitatis. — Demonstr. Quatenus Mens praesentem sui Corporis existentiam concipit, eatenus durationem concipit, quae tempore determinari potest, et eatenus tantum potentiam habet concipiendi res cum relatione ad tempus. ... — Schol. Res duobus modis a nobis ut actuales concipiuntur, vel quatenus easdem cum relatione ad certum tempus et locum existere, vel quatenus ipsas in Deo contineri, et ex naturae divinae necesseritate consequi concipimus. Quae autem hoc secundo modo ut verae seul reales concipiuntur, eas sub aeternitatis specie concipimus, ..."

Nach diesen Ausführungen sind zwei Formen des Erkennens und Denkens zu unterscheiden, die wir im folgenden als „Form A" und „Form B" bezeichnen:

Form A. In der Form A des Erkennens spielt die Zeit als modus cogitandi und als Ordnungsskala für die dem Menschen zugänglichen Erfahrungen eine wichtige Rolle. Die Erfahrungstatsachen werden „cum relatione ad tempus et locum" zur Kenntnis genommen. Die Zeit ist eine durch die menschliche Natur bedingte Hilfsvorstellung.

Form B. Für das auf die Gesetze des Weltgeschehens gerichtete immanente Denken (cogitatio) sind alle Dinge zeitlos, und es gibt in Wirklichkeit für deren Gesetze keine Zeit[3]).

Die Gegenüberstellung der Formen A und B läßt weite Gebiete dieser Erkenntnistheorie systematisch übersehen; Ursache und Wirkung, deren Trennung die Zeit voraussetzt, fallen in der Form B zusammen. Parallel zu den Formen A und B läuft die Unterscheidung der „modi infiniti" von den „modi finiti":

α) Die modi finiti sind die räumlich und zeitlich beschränkten Erscheinungen. Sie werden „cum relatione ad tempus et locum" durch Erfahrung wahrgenommen. Zu ihnen gehören die Einzelerscheinungen körperlicher und geistiger Art.

β) Die modi infiniti werden aus den Grundbegriffen abgeleitet; insbesondere folgt aus der cogitatio das zeitlose aktive Denken (intellectus infinitus), aus der extensio die zeitlosen Gesetze der allgemeinen Weltordnung (facies totius universi).

Die modi infiniti sind denknotwendig, die modi finiti sind es nicht.

Die Hegemonie der modi infiniti bringt eine Annäherung der Erkenntnistheorie Spinozas an die Ideenlehre Platos zum Ausdruck.

Die Anwendung der Formen A und B auf die Dinge führt schließlich organisch auf die Unterscheidung der sinnlich-zeitlichen „existentia" der Dinge von der begrifflich-zeitlosen „essentia":

α) Die existentia jedes Dinges — seine wahrnehmbare Erscheinungsform — ist nicht eindeutig, ist zeitlich bedingt und keineswegs denknotwendig.

β) Die essentia ist die zeitlos denknotwendige Wahrheit, die das innerste Wesen des Dinges ausmacht.

Der so aufgebaute Teil der Erkenntnistheorie Spinozas läßt sich durch folgendes Schema charakterisieren:

	Tempus	Aeternitas	
Form A	modus finitus	modus infinitus	Form B
	existentia	essentia	

3) Hierzu G. Cantor: „... Die Zeit ist meines Erachtens eine Vorstellung, die zu ihrer deutlichen Erklärung den von ihr unabhängigen Kontinuitätsbegriff zur Voraussetzung hat und sogar mit Zuhilfenahme desselben weder objektiv als eine Substanz, noch subjektiv als eine notwendige apriorische Anschauungsform aufgefaßt werden kann, sondern nichts anderes als ein Hilfs- und Beziehungsbegriff ist, durch welchen die Relation zwischen verschiedenen in der Natur vorkommenden und von uns wahrgenommenen Bewegungen festgestellt wird". (Cantor, Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, Nr. 5. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Math. Annalen, Bd. 21, 1883.)

Die Formen A und B sollen auf die Frage nach der Struktur des Raumes angewendet werden. Das gibt zugleich die Gelegenheit diese Formen durch geometrische Untersuchungen zu charakterisieren und anschaulich zu unterscheiden.

II.

Zeitlich veränderliche Metrik.

Die in der Nichteuklidischen Geometrie entwickelten allgemeinen Gesetze der Raummessung gegründet auf eine Fläche zweiter Ordnung als Fundamentalfläche der Metrik, sowie die Fortbildung und Vollendung dieser Gesetze durch Riemann seien als bekannt vorausgesetzt. Die Verknüpfung der Raummetrik mit der Zeitmetrik gewinnt die größte Bedeutung. Sie wird meist dadurch vollzogen, daß die Zeit als „vierte Dimension" in die mathematische Betrachtung eingeht. Dadurch wird das Problem aus der Anschauung in das Gebiet der Formalistik verschoben. Dieses Verfahren, das nicht von Riemann selbst herrührt, hat nichts mit Geometrie zutun.

Eine zeitlich veränderliche nichteuklidische Raumstruktur läßt sich aber in anschaulicher und organischer Weise dadurch begründen, daß die Fundamentalfläche der nichteuklidischen Maßbestimmung im Verlaufe der Zeit einen Büschel von Flächen zweiter Ordnung, d. h. einen F^2-Büschel — oder einen Teil eines solchen Büschels — durchläuft. Zwei gegebene Flächen zweiter Ordnung $F_1^2 = 0$, $F_2^2 = 0$ bestimmen einen sie verbindenden F^2-Büschel mit Hilfe eines Parameters λ:

$$F_1^2 + \lambda . F_2^2 = 0, \qquad -\infty \cdots \lambda \cdots +\infty.$$

Wird hier der Parameter λ zu einer eindeutigen, reellen und stetigen Funktion $f(t)$ der Zeit t, so gehört zu jedem Augenblicke je *eine* Fläche zweiter Ordnung des F^2-Büschels, und diese Fläche bestimmt als Fundamentalfläche die in jenem Augenblick gültige Metrik. Dieser Ansatz einer zeitlich veränderlichen Metrik läßt eine größere Anzahl verschiedener Wege offen, die sich schon durch die verschiedenen Arten des zugrunde gelegten F^2-Büschels unterscheiden. Die Klassifikation der F^2-Büschel gibt eine Übersicht über alle hier möglichen Fälle, und dabei spielt die Raumkurve vierter Ordnung erster Art als Basiskurve des F^2-Büschels, d. h. als gemeinsame Schnittkurve seiner Flächen, eine ausschlaggebende Rolle.

Unter allen im Rahmen dieses Ansatzes zulässigen Strukturen sind die den Hypothesen von Riemann und Lobatschefsky

entsprechenden Systeme die wichtigsten. Sie können dadurch erhalten werden, daß als Basiskurve ein aus vier Geraden gebildetes windschiefes Vierseit zugrunde gelegt wird. Für die Riemannmetrik besteht dieses aus zwei Paaren konjugiert imaginären Geraden zweiter Art, für die Lobatschefskymetrik aus zwei Paaren konjugiert imaginären Geraden erster Art. Die beiden auf diese Weise entstehenden zeitlich veränderlichen Metriken werden im folgenden auf geometrischer Basis untersucht. Eine solche Basis bot die Strahlengeometrie in der von Herrn Jolles synthetisch entwickelten Theorie der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz. Dieser Ausgangspunkt bietet nicht zu unterschätzende methodische Vorteile: Bei ihr übernimmt die lineare Strahlenkongruenz für die zeitlich veränderlichen Metriken die Rolle, die sonst in der zeitlich invarianten nichteuklidischen Geometrie die Fläche zweiter Ordnung als Fundamentalfläche der Metrik innehat. Dadurch ist es möglich, eine Raum-Zeit-Verknüpfung im Gebiete der nichteuklidischen Geometrie vorzunehmen, ohne den dreidimensionalen Raum zu verlassen. Die geometrische Konstruktion und ihre analytische Formulierung bleiben dabei äußerlich getrennt.

III.

Sekundäre Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz.

1. Die drei Gegenkantenpaare q, r; s, t; u, v des Koordinatentetraeders seien dargestellt durch:

$$\begin{array}{llll} q: & x_1 = 0,\ x_2 = 0. & r: & x_3 = 0,\ x_4 = 0. \\ s: & x_1 = 0,\ x_3 = 0. & t: & x_2 = 0,\ x_4 = 0. \\ u: & x_1 = 0,\ x_4 = 0. & v: & x_2 = 0,\ x_3 = 0. \end{array}$$

Die Gegenkanten s und t bestimmen eine lineare Strahlenkongruenz C_t^s als deren Leitgeraden. Sie ist bei Benutzung homogener Linienkoordinaten p_{ik} durch die Gleichungen gekennzeichnet:

$$C_t^s: \quad p_{13} = 0,\ p_{42} = 0.$$

Die übrigen Gegenkanten q, r, u, v des Tetraeders bilden ein einfaches Raumvierseit. Es ist Basisvierseit des F^2-Büschels F^2_{qruv} mittels eines Parameters λ dargestellt durch:

$$F^2_{qruv}: \quad x_1 x_3 - \lambda . x_2 x_4 = 0 \qquad -\infty \cdots \lambda \cdots +\infty.$$

Die ∞^2 Kongruenzstrahlen von C_t^s sind paarweise reziproke Polaren für die ∞^1 Flächen des F^2-Büschels F^2_{qruv}. Eine derartige involutorische Paarung der ∞^2 Kongruenzstrahlen heißt nach Herrn

Jolles[4]) eine *sekundäre Involution* auf der linearen Kongruenz C_t^s, die polaren Räume der ∞^1 Flächen des F^2-Büschels F^2_{qruv} heißen *sekundäre* polare Räume der Kongruenz. Die Koordinaten p_{ik}, p'_{ik} konjugierter Strahlen g, g' der sekundären Involution sind durch die Substitutionen[5]) verknüpft:

$$-\frac{\lambda}{4} p_{12} = p'_{12}, \quad +\frac{\lambda}{4} p_{14} = p'_{14}, \quad +\frac{\lambda}{4} p_{23} = p'_{23}, \quad -\frac{\lambda}{4} p_{34} = p'_{34}.$$

Die Doppelstrahlen der sekundären Involution sind die Seiten q, r, u, v des Basisvierseites.

2. Die vorliegende Gleichungsform der Fläche zweiter Ordnung:

$$x_1 x_3 - \lambda . x_2 x_4 = 0$$

gibt von sich aus keine Auskunft darüber, ob die Regelstrahlen der Fläche — und damit die Doppelstrahlen der dargestellten sekundären Involution — reelle Strahlen oder konjugiert imaginäre Strahlen erster oder zweiter Art sind. Durch die Substitutionen:

$$\begin{array}{llll|llll} x_1 = \varrho(\mathfrak{x}_1 + i\mathfrak{x}_3) & & x_2 = -\varrho(\mathfrak{x}_2 + i\mathfrak{x}_4) & & x_1 = \varrho(\mathfrak{x}_1 + i\mathfrak{x}_3) & & x_2 = -\varrho(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_4) \\ x_3 = \varrho(\mathfrak{x}_1 - i\mathfrak{x}_3) & & x_4 = \varrho(\mathfrak{x}_2 - i\mathfrak{x}_4) & & x_3 = \varrho(\mathfrak{x}_1 - i\mathfrak{x}_3) & & x_4 = \varrho(\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_4) \end{array}$$

geht die Gleichung des F^2-Büschels F^2_{qruv} in die Formen über:

$$\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_3^2 + \lambda(\mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_4^2) = 0 \qquad \Big| \qquad \mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_3^2 + \lambda(\mathfrak{x}_2^2 - \mathfrak{x}_4^2) = 0$$

oder mit $\lambda = \dfrac{1+\varkappa}{1-\varkappa}$ in:

$$(\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_3^2)(1-\varkappa) + (\mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_4^2)(1+\varkappa) = 0.$$

Sein Basisvierseit besteht nunmehr aus zwei Paaren von konjugiert imaginären windschiefen Strahlen q, r und u, v. Der F^2-Büschel enthält:

a) ∞^1 imaginäre Flächen zweiter Ordnung mit reellen polaren Räumen, für die:

$+\infty > \lambda > 0$ und $+1 > \varkappa > -1$.

$$(\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_3^2)(1-\varkappa) + (\mathfrak{x}_2^2 - \mathfrak{x}_4^2)(1+\varkappa) = 0.$$

Sein Basisvierseit besteht nunmehr aus zwei Paaren von konjugiert imaginären inzidenten Strahlen q, u und r, v. Der F^2-Büschel enthält:

a) ∞^1 reelle, strahlenlose Flächen zweiter Ordnung, für die:

$+\infty > \lambda > 0$ und $+1 > \varkappa > -1$.

4) Herr Jolles, Die Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz. Math. Ztschrft., **27**, S. 428.

5) Haenzel, Eine analytische Theorie der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz und deren Anwendung. Journal für die reine und angewandte Mathematik, **166** (1932), S. 167—181.

b) zwei je in zwei konjugiert imaginäre Ebenen zerfallene Flächen, für die:

$$\lambda = 0, \infty \text{ und } \varkappa = \mp 1$$

c) ∞^1 reelle Strahlenflächen zweiter Ordnung, für die:

$$0 > \lambda > -\infty \text{ und } +\infty > \varkappa > +1$$
$$\text{bzw. } -1 > \varkappa > -\infty.$$

b) eine in zwei konjugiert imaginäre Ebenen und eine in zwei reelle Ebenen zerfallene Fläche, für die:

$$\lambda = 0, \infty \text{ und } \varkappa = \mp 1$$

c) ∞^1 reelle strahlenlose Flächen zweiter Ordnung, für die:

$$0 > \lambda > -\infty \text{ und } +\infty > \varkappa > +1$$
$$\text{bzw. } -1 > \varkappa > -\infty.$$

Die lineare Kongruenz C_t^s ist jetzt dargestellt durch:

$$\mathfrak{p}_{13} = 0, \quad \mathfrak{p}_{42} = 0.$$

Die auf ihr durch die Flächen des F^2-Büschels F^2_{qruv} hervorgerufene sekundäre Involution bedingt die Substitution:

$$\varrho\,\mathfrak{p}_{12} = +\mathfrak{p}'_{34}, \quad \varrho\,\mathfrak{p}_{14} = +\mathfrak{p}'_{23}, \quad \varrho\,\mathfrak{p}_{23} = +\mathfrak{p}'_{14}, \quad \varrho\,\mathfrak{p}_{34} = +\mathfrak{p}'_{12}.$$

$$\varrho\,\mathfrak{p}_{12} = -\mathfrak{p}'_{34}, \quad \varrho\,\mathfrak{p}_{14} = +\mathfrak{p}'_{23}, \quad \varrho\,\mathfrak{p}_{23} = -\mathfrak{p}'_{14}, \quad \varrho\,\mathfrak{p}_{34} = +\mathfrak{p}'_{12}.$$

IV.

Zeitlich veränderliche Riemannmetrik.

3. Die imaginäre Fläche zweiter Ordnung F^2 mit reellem polaren Raume und der Gleichung:

$$\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_3^2 + 4c_e^2\mathfrak{x}_4^2 = 0$$

bedingt als Fundamentalfläche mit reellem c_e eine elliptische Maßbestimmung des dreidimensionalen Riemannraumes. Es sei $\lambda = f(t)$ eine eindeutige, reelle, stetige und positive Funktion der Zeit t, die zu gegebener Zeit $t = 0$ den Wert $+1$ besitzt, und es beschreibe die Fläche F^2 im Verlaufe der Zeit den F^2-Büschel:

$$F^2_{qruv} = \mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_3^2 + f.(\mathfrak{x}_2^2 + 4c_e^2\mathfrak{x}_4^2) = 0.$$

Das Basisvierseit (1 u. 2) $qruv$ des Büschels besteht aus zwei Paaren konjugiert imaginärer windschiefen Gegenseiten. Die Gleichung des Büschels wird auf die Form gebracht:

$$(\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_3^2)(1-\varkappa) + (\mathfrak{x}_2^2 + 4c_e^2\mathfrak{x}_4^2)(1+\varkappa) = 0.$$

Jedoch durchläuft die Fläche F^2 wegen:

$$+1 > \varkappa = \frac{f-1}{f+1} > -1$$

nur die imaginären Flächen, niemals die reellen Strahlenflächen

dieses Büschels (2). Der F^2-Büschel F^2_{qruv} bedingt auf der hyperbolischen Kongruenz C_t^s die sekundäre Involution:

$$\varrho\,\mathfrak{p}_{12} = 4c_e^2\mathfrak{p}'_{34}, \quad \varrho\,\mathfrak{p}_{14} = \mathfrak{p}'_{23}, \quad \varrho\,\mathfrak{p}_{23} = 4c_e^2\mathfrak{p}'_{14}, \quad \varrho\,\mathfrak{p}_{34} = \mathfrak{p}'_{12}.$$

Hieraus folgt:

„Eine sekundäre Involution mit zwei Paaren konjugiert imaginärer windschiefen Doppelstrahlen q, r, u, v auf einer hyperbolischen linearen Kongruenz C_t^s bedingt eine zeitlich veränderliche elliptische Maßbestimmung dadurch, daß die Fundamentalfläche der Metrik die ∞^1 die sekundäre Involution bestimmenden imaginären Flächen zweiter Ordnung beschreibt“.

Unter diesen Umständen ist die Entfernung zweier Punkte $X(x_1 .. x_4)$ und $Y(y_1 .. y_4)$ in homogenen Koordinaten $x_1 .. x_4$ zur Zeit t gegeben durch den Ausdruck:

$$2c_e \arccos \frac{x_1y_1 + x_3y_3 + f(t)(x_2y_2 + 4c_e^2x_4y_4)}{\sqrt{[x_1^2 + x_3^2 + f(t)(x_2^2 + 4c_e^2x_4^2)][y_1^2 + y_3^2 + f(t)(y_2^2 + 4c_e^2x_4^2)]}}.$$

Werden inhomogene Koordinaten eingeführt durch:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4} \quad \text{und} \quad x' = \frac{y_1}{y_4}, \quad y' = \frac{y_2}{y_4}, \quad z' = \frac{y_3}{y_4},$$

so ergibt sich *das Bogenelement der zeitlich veränderlichen Riemannmetrik* aus der Gleichung:

$$ds_t^2 = \frac{f\left[dx^2 + f.dy^2 + dz^2 + \frac{(x\,dy - y\,dx)^2 + (y\,dz - z\,dy)}{4c_e^2}\right] + \frac{(x\,dz - z\,dx)^2}{4c_e^2}}{\left(f + \frac{x^2 + f.y^2 + z^2}{4c_e^2}\right)^2}.$$

V.

Zeitlich veränderliche Lobatschewsky-Metrik.

4. Die gegebene reelle strahlenlose Fläche zweiter Ordnung F^2 mit der Gleichung:

$$\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_3^2 - 4c_h^2\mathfrak{x}_4^2 = 0$$

bedingt als Fundamentalfläche mit der Konstanten c_h eine hyperbolische Maßbestimmung des dreidimensionalen Raumes. Es sei $\lambda = f(t)$ wie im vorigen Abschnitt eine eindeutige, reelle, stetige und positive Funktion der Zeit t, die zur gegebenen Zeit $t = 0$ den Wert $+1$ besitzt. Die Fläche F^2 beschreibe im Verlaufe der Zeit den F^2-Büschel:

$$F^2_{qruv} = \mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_3^2 + f(t)(\mathfrak{x}_2^2 - 4c_h^2\mathfrak{x}_4^2) = 0.$$

Das Basisvierseit (1 u. 2) $qruv$ des F^2-Büschels besteht aus zwei Paaren konjugiert imaginärer inzidenten Strahlen. Die Gleichung des Büschels wird auf die Form gebracht:

$$(\mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{x}_3^2)(1-\varkappa)+(\mathfrak{x}_2^2-4c_h^2\mathfrak{x}_4^2)(1+\varkappa) = 0.$$

Jedoch durchläuft die Fläche F^2 wegen:

$$+1>\varkappa = \frac{f-1}{f+1}>-1$$

nur die eine der beiden im Büschel enthaltenen Folgen von reellen strahlenlosen Flächen, für die $+\infty>\varkappa>+1$ oder $-1>\varkappa>-\infty$ und ebensowenig die beiden je aus zwei reellen oder konjugiert imaginären Ebenen bestehenden zerfallenen Flächen zweiter Ordnung (2). Der F^2-Büschel F^2_{qruv} bedingt auf der hyperbolischen linearen Kongruenz C_t^s eine sekundäre Involution dargestellt durch:

$$\varrho\,\mathfrak{p}_{12} = -4c_h^2\,\mathfrak{p}'_{34},\quad \varrho\,\mathfrak{p}_{14} = +\mathfrak{p}'_{23},\quad \varrho\,\mathfrak{p}_{23} = -4c_h^2\,\mathfrak{p}'_{14},\quad +\varrho\,\mathfrak{p}_{34} = +\mathfrak{p}'_{12}.$$

Hieraus folgt:

„Eine sekundäre Involution mit zwei Paaren konjugiert imaginärer inzidenten Doppelstrahlen q, u und r, v auf einer hyperbolischen linearen Kongruenz C_t^s bedingt eine zeitlich veränderliche hyperbolische Maßbestimmung. Bei der Maßbestimmung beschreibt die Fundamentalfläche der Metrik die eine der beiden die sekundäre Involution bedingenden Folgen reeller strahlenloser Flächen zweiter Ordnung“.

Ähnliche Betrachtungen wie die des vorhergehenden Abschnittes liefern für *das Bogenelement der zeitlich veränderlichen Lobatschewsky-Metrik* die Gleichung:

$$ds_t^2 = \frac{f\left[dx^2+f.dy^2+dz^2-\dfrac{(x\,dy-y\,dx)^2+(y\,dz-z\,dy)^2}{4c_h^2}\right]-\dfrac{(x\,dz-z\,dx)^2}{4c_h^2}}{\left(f-\dfrac{x^2+f.y^2+z^2}{4c_h^2}\right)^2}.$$

VI.

Der Raum mit zeitlich veränderlichem Krümmugsmaß.

Die in den Abschnitten II—V entwickelte zeitlich veränderliche Metrik soll in ihrer allgemeinen Form nicht den Anspruch erheben, zur Beschreibung der physikalischen Außenwelt zu dienen. Das Resultat dieser Untersuchungen besteht in der Schaffung einer rein geometrischen Basis für solche Metriken. Nunmehr soll gezeigt werden, daß gewisse Strukturen der Relativitätstheorie im Rahmen des im Abschnitt II dargelegten Ansatzes enthalten sind.

In der Abhandlung: „Zum kosmologischen Problem der allgemeinen Relativitätstheorie“ gibt Herr Einstein[6]) die Struktur der Welt im Großen durch einen sphärischen Raum wieder, dessen Radius P zeitlich veränderlich ist. Zur Entwicklung dieser Struktur muß auf einen sehr speziellen Büschel von Flächen zweiter Ordnung zurückgegangen werden.

Die ∞^1 Flächen zweiter Ordnung des F^2-Büschels

$$\text{(I)}\qquad x_1^2+x_2^2+x_3^2+\lambda x_4^2 = 0 \qquad -\infty\cdots\lambda\cdots+\infty$$

weisen alle dem Punkte $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ die Ebene $x_4 = 0$ als Polarebene zu und berühren einander in ein und demselben imaginären Kegelschnitte dieser Ebene. Der F^2-Büschel enthält:

∞^1 reelle strahlenlose Flächen zweiter Ordnung,	$-\infty<\lambda<0$,
einen imaginären Kegel zweiter Ordnung,	$\lambda = 0$,
∞^1 imaginäre Flächen zweiter Ordnung,	$0<\lambda<+\infty$,
die Doppelebene $x_4^2 = 0$,	$\lambda = \infty$.

Ist nun $\lambda = f(t)$ eine positive Funktion der Zeit t, so bestimmt die zu einem gegebenen Zeitpunkte t gehörige Fläche zweiter Ordnung unseres F^2-Büschels in diesem Augenblick eine elliptische Maßbestimmung. Das Bogenelement der so bedingten zeitlich veränderlichen Maßbestimmung kann in kartesischen Koordinaten auf die Form gebracht werden:

$$\text{(II)}\qquad d\sigma^2 = (dx^2+dy^2+dz^2)\left(1+\frac{x^2+y^2+z^2}{4[f(t)]^2}\right)^{-2}.$$

Durch die Substitutionen:

$$\begin{aligned} x &= r.\sin\mathfrak{x}_2.\cos\mathfrak{x}_3\\ y &= r.\sin\mathfrak{x}_2.\sin\mathfrak{x}_5\\ z &= r.\cos\mathfrak{x}_2\\ r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2f(t).\operatorname{tg}\frac{\mathfrak{x}_1}{2}\end{aligned}$$

ergibt sich:

$$\text{(III)}\qquad d\sigma^2 = [f(t)]^2(d\mathfrak{x}_1^2+\sin^2\mathfrak{x}_1\,d\mathfrak{x}_2^2+\sin^2\mathfrak{x}_1\sin^2\mathfrak{x}_2\,d\mathfrak{x}_3^2).$$

Die Gleichung (II) stellt ebenso wie (III) das Bogenelement der zeitlich veränderlichen Metrik bei beliebig gewähltem, aber *festem* Zeitpunkte t dar.

Nach Einführung der Zeit t mit Hilfe von $ds^2 = -d\sigma^2+c^2dt^2$ erhält man das allgemeine Bogenelement aus:

6) Herr Einstein, Sitz.-Ber. d. Preuß. Akad., 1931, XII. —

$$\text{(IV)} \qquad ds^2 = -f^2(d\mathfrak{x}_1^2 + \sin^2\mathfrak{x}_1\, d\mathfrak{x}_2^2 + \sin^2\mathfrak{x}_1 \cdot \sin^2\mathfrak{x}_2\, d\mathfrak{x}_3^2) + c^2\, dt^2$$

und dieses Bogenelement liegt der oben angeführten Untersuchung Einsteins zugrunde. Auf diese für die Betrachtung der kosmologischen Verhältnisse neuerdings maßgebende Weltstruktur kann also bei geeigneter Betrachtungsweise mit den Mitteln der projektiven Geometrie vollständig gekennzeichnet werden. Sie ordnet sich dem Begriff der zeitlich veränderlichen Metrik unter. Wird das Charakteristikum der letzteren darin gesehen, daß die Fundamentalfläche des dreidimensionalen Raumes im Verlaufe der Zeit Teile eines F^2-Büschels beschreibt, so besteht in diesem Falle der F^2-Büschel aus den ∞^1 Flächen zweiter Ordnung, die einander längs eines imaginären Kegelschnittes berühren. Dabei darf die Fundamentalfläche nur imaginäre Flächen des Büschels durchlaufen und die zu erreichenden Grenzflächen entsprechen den Zeitpunkten stärkster und schwächster Raumkrümmung. — Ist f eine Konstante, so charakterisiert Gleichung (IV) die Struktur einer früheren Einstein-Welt, der sogenannten Zylinderwelt. Dieselbe habe ich[7]) mittels einer helikoidischen Strahlenkongruenz gekennzeichnet. Man sieht aber leicht, daß eine solche Charakterisierung auch für die jetzige zeitlich veränderliche Metrik der Einstein-Welt in Kraft bleibt, da es für die liniengeometrische Betrachtungsweise unwesentlich ist, welche Fläche des F^2-Büschels die Rolle der Fundamentalfläche übernimmt.

VII.

Nichteuklidische Geometrie — Existentia. Euklidische Geometrie — Essentia.

Die vorliegenden Untersuchungen über die zeitlich veränderliche Metrik führen im Zusammenhang mit den Darlegungen des Abschnittes I zu folgenden Ergebnissen:

α) Die nichteuklidischen Raumstrukturen oder Raum-Zeitstrukturen sind vieldeutig, müssen „cum relatione ad tempus" betrachtet werden und ihre Metrik wird — sollen sie zur Beschreibung der Außenwelt dienen — wesentlich durch die Materie und deren Verteilung beeinflußt. Diese Strukturen sind Instrumente der Form A des Erkennens (Abschnitt I). Durch sie läßt sich die existentia eines Raumstückes, seine sinnlich wahrnehmbare Erscheinungsform, beschreiben. Mit anderen Worten:

„Die nichteuklidische Raum-Zeitstruktur macht nicht die essentia des Raumes aus und gehört überhaupt nicht zu ihr. Sie ist vielmehr der mathematische Niederschlag der existentia des Raumes, seiner Erscheinungsform, und weder eindeutig, noch denknotwendig, noch zeitlos".

7) Ztschrft. f. Physik, 72, S. 798—802, 1931.

β) Die nichteuklidische Metrik ruht auf quadratischen Formen. Ebenso läßt sich nunmehr zeitlich veränderliche nichteuklidische Metrik auf entsprechenden Formen der Strahlengeometrie aufbauen (III—V). Alle diese Formen können nur im *Euklidischen Raume* — oder garnicht — vorgestellt werden. Nur dort kommt ihnen eine über das Formalistische hinausgehende Bedeutung zu. Diese Vorstellung der Formen ist von der Zeit vollständig unabhängig, obgleich die Formen selbst die zeitlich veränderliche Metrik gewährleisten. Der Raum, in dem die Grundformen jeder Geometrie liegen, bleibt in seiner essentia *vollständig* unberührt davon, mit welcher nichteuklidischen oder zeitlich veränderlichen Metrik seine existentia gemessen wird. Infolgedessen gilt:

„Die essentia des Raumes ist euklidische Geometrie; die existentia materieller Raumstücke — mögen sie wahrgenommen oder gedacht werden — kann mit Hilfe einer passenden nichteuklidischen Metrik beschrieben werden. Die euklidische Geometrie ist als essentia des Raumes denknotwendig".

Gewiß kannte Spinoza nur euklidische Metrik. Dennoch — das ist das Bewundernswerte — läßt er divinatorisch in seiner Philosophie für jede moderne Raum-Zeitstruktur Platz, ohne an der zentralen Position der allein denknotwendigen euklidischen Geometrie zu rütteln.