Article

Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz in ihrer Beziehung zu den quadratischen Cremonatransformationen und den Differentialgleichungen erster Ordnung.
Haenzel, G.
in: Journal für die reine und angewandte Mathematik | Journal für die reine und angewandte Mathematik - 173
23 Page(s) (91 - 113)

Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie sind nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.
Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:
Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.
Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.
Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:
You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.
By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.
Papendiek 14
37073 Goettingen
Email: info@digizeitschriften.de

Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz in ihrer Beziehung zu den quadratischen Cremonatransformationen und den Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von *G. Haenzel* in Karlsruhe.

Inhalt.

Einleitung: Inhalt und Methode 91
I. Die Regelscharen, Kollineationen und Involutionen der linearen Strahlenkongruenz 92
II. Die Polarentheorie der linearen Strahlenkongruenz 101
III. Differentialgeometrische Eigenschaften der mit ihren Regelscharen in der linearen Kongruenz enthaltenen Regelflächen 105
IV. Hüllflächen, deren Regelscharen in der linearen Kongruenz liegen 108
V. Clairaut's Differentialgleichung und die lineare Kongruenz 110
VI. Die Differentialgleichung erster Ordnung und die lineare Kongruenz 111

Betreibt man die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz als Geometrie auf der Fläche zweiter Ordnung, so entsprechen den Kongruenzstrahlen und den einscharig in der Kongruenz enthaltenen Flächen zweiter Ordnung die Punkte und Kegelschnitte der Fläche zweiter Ordnung. Durch Anfügen einer geeigneten stereographischen Projektion gehen die Strahlen der hyperbolischen Kongruenz in die Punkte einer Bildebene mit zwei reellen Fundamentalpunkten über, die Strahlen der elliptischen in die Punkte einer Bildebene mit zwei konjugiert imaginären Fundamentalpunkten. Hierbei zeigt sich zum ersten Male die für das Weitere grundlegende Tatsache, daß die automorphen Kollineationen der linearen Kongruenz in der Bildebene durch die quadratischen Cremonatransformationen wiedergegeben werden. Gleichzeitig tritt die Geometrie der linearen Kongruenz in mannigfache Verbindung mit der pseudoeuklidischen und der euklidischen Geometrie der Ebene. Es ergibt sich eine organische analytische Darstellung der von Herrn Jolles auf synthetischem Wege entdeckten Theorie der Involutionen auf der linearen Kongruenz und ihrer Polarentheorie. Diese Theorien zeigen weitgehende Isomorphieen mit der (euklidischen bzw. pseudoeuklidischen) Kreisgeometrie. Von hier aus führt eine Verbindung zur Gerade-Kugeltransformation.

Vor allem aber läßt sich die Theorie der in der linearen Kongruenz enthaltenen (transzendenten und algebraischen) Regelscharen in erheblichem Umfange auf die Theorie der ebenen Kurven aufbauen, wobei zahlreiche Theoreme gewonnen werden. Die Singularitäten dieser Regelscharen und ihre bisher kaum behandelten Hüllflächen lassen sich einfach ableiten. Heranziehung der Differentialgleichung erster Ordnung und der Differentialgleichung Clairaut's führt auf überaus einfachem Wege zu zahlreichen neuen Ergebnissen.

Die geometrische Abbildung ist ein erfolgreiches Verfahren, um bekannte Eigenschaften abzuleiten und neue Theoreme zu beweisen. Aber auch die beste Abbildung

eines geometrischen Objektes wird nicht alle seine Eigenschaften mit gleicher Deutlichkeit und in ihrem eigentlichen organischen Zusammenhange wiedergeben. Beim Verwenden von Abbildungen besteht deshalb neben großen Vorteilen die Gefahr, die Untersuchung des Objektes durch die Eigentümlichkeit der benutzten Abbildung in eine bestimmte Richtung abzudrängen, wichtige Dinge zu übersehen und andere nicht in ihrem ursprünglichen Zusammenhange zu erkennen.

Wenn im folgenden dennoch zur Darstellung neuer Ergebnisse von einer Abbildung weitgehender Gebrauch gemacht wird, so geschieht das, weil gerade diese Abbildung der ebenen Geometrie und der Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung eine ganz neuartige Bedeutung verleiht und die Ergebnisse selbst die Aufmerksamkeit immer wieder auf das Originalobjekt zurücklenken.

I. Die Regelscharen, Kollineationen und Involutionen der linearen Strahlenkongruenz.

1. Die Koordinaten eines gegebenen Strahles XY:

$$p_{ik} = \mathfrak{x}_i \mathfrak{y}_k - \mathfrak{x}_k \mathfrak{y}_i$$

unterliegen der Plückerschen Grundgleichung:

$$p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} + p_{12}p_{34} = 0.$$

Die gegebene lineare Strahlenkongruenz C_1^1, bestimmt als Schnitt zweier linearen Strahlenkomplexe: $\Sigma a_{ik}p_{ik} = 0$ und $\Sigma b_{ik}p_{ik} = 0$, läßt sich besonders einfach darstellen, wenn ihre (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden l, r mit einem Gegenkantenpaare des Koordinatentetraeders zusammenfallen. Nehmen wir l als Kante $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_2 = 0$ und r als Kante $\mathfrak{x}_3 = \mathfrak{x}_4 = 0$, so ist die lineare Kongruenz als Schnitt der beiden speziellen linearen Komplexe mit den Gleichungen:

$$p_{12} = 0 \text{ und } p_{34} = 0$$

bestimmt. Die Grundgleichung lautet dann für die ∞^2 Kongruenzstrahlen:

$$(1) \qquad p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Ein gegebener, die Kongruenz nicht enthaltender linearer Strahlenkomplex schneidet die Kongruenz in einer (reellen oder imaginären) Regelschar zweiter Ordnung. Diese ist gegeben durch die Gleichung des Komplexes:

$$\Gamma_\lambda = \lambda_1 p_{13} + \lambda_2 p_{14} + \lambda_3 p_{23} + \lambda_4 p_{42} + \lambda_5 p_{12} + \lambda_6 p_{34} = 0$$

und durch die Bedingung:

$$p_{12} = p_{34} = 0.$$

Als Gleichung der Trägerfläche der Regelschar erhält man:

$$(2) \qquad F_\lambda^2 = \lambda_1 \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_3 + \lambda_2 \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_4 + \lambda_3 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3 - \lambda_4 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_4 = 0.$$

Die Fläche F_λ^2 zerfällt in zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Ebenen, ihre in der linearen Kongruenz enthaltene Regelschar zweiter Ordnung also in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung, unter der Bedingung:

$$(2a) \qquad \lambda_1 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_3 = 0.$$

Die vier nicht identisch verschwindenden Linienkoordinaten der Kongruenzstrahlen mögen als homogene Punktkoordinaten aufgefaßt werden und zwar:

$$p_{13} = \xi_1, \; p_{14} = \xi_2, \; p_{23} = \xi_3, \; p_{42} = -\xi_4.$$

Die lineare Kongruenz C_1^1 sei hyperbolisch, ihre Leitgeraden und die Kanten des Koordinatentetraeders seien also reell. Die Bedingungsgleichung (1) stellt dann das Strahlenhyperboloid:

$$(3) \qquad H^2 = \xi_1 \xi_4 - \xi_2 \xi_3 = 0$$

dar, dessen ∞^2 Punkte die ∞^2 Kongruenzstrahlen eineindeutig abbilden. Das Koordinatentetraeder der ξ_i fällt mit dem Tangentialtetraeder $ARLA'$ von H^2 zusammen (Fig. 1). Dabei gelten folgende Bezeichnungen:

Ebene:	ARL	ALA'	ARA'	$A'RL$
	$\xi_1 = 0$	$\xi_2 = 0$	$\xi_3 = 0$	$\xi_4 = 0.$

Durch den Flächenpunkt A geht ein Leitstrahl l_s und ein Regelstrahl r_s des Strahlenhyperboloides H^2. Aus dem Projektionszentrum A wird dieses auf eine mit RL inzidente Bildebene ε stereographisch projiziert. Das von den drei Ebenen $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ des Koordinatentetraeders in die Bildebene eingeschnittene Dreieck $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ gelte als Koordinatendreieck. Durch die stereographische Projektion sind die ∞^2 Kongruenzstrahlen auf die Punkte der Ebene ε abgebildet. Diese Abbildung drückt sich analytisch aus durch:

$$\varrho p_{13} = x_1^2, \quad \varrho p_{14} = x_1 x_2, \quad \varrho p_{23} = x_1 x_3, \quad \varrho p_{42} = -x_2 x_3. \tag{4}$$

Der Kongruenzstrahl a mit den Koordinaten $p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{42} = 0 : 0 : 0 : 1$ entspricht auf dem Hyperboloide H^2 dem Projektionszentrum A und geht daher durch die Abbildung auf die Gerade LR ($x_1 = 0$) über. Andererseits sind L ($x_1 = x_2 = 0$) und R ($x_1 = x_3 = 0$) singuläre Punkte der Abbildung, was man folgendermaßen erkennt:

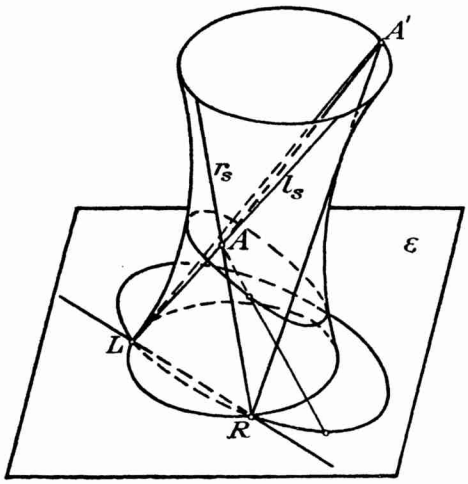

Fig. 1.

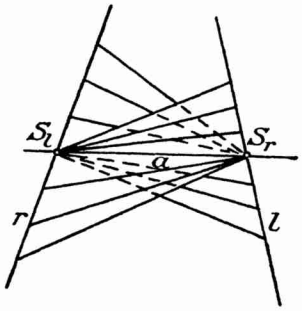

Fig. 2.

Der Kongruenzstrahl a schneidet die Leitgeraden r und l von C_1^1 bzw. in den Punkten S_l und S_r, durch ihn gehen die Ebenen $(ar) = (S_r r)$ und $(al) = (S_l l)$ (Fig. 2). Er ist der gemeinsame Strahl der beiden Kongruenzstrahlenbüschel:

$$S_l l \text{ oder: } p_{13} = p_{14} = 0 \text{ und } S_r r \text{ oder: } p_{13} = p_{23} = 0.$$

Die ∞^1 Kongruenzstrahlen des ersten Strahlenbüschels werden auf den Punkt L ($x_1 = x_2 = 0$) abgebildet, die ∞^1 Kongruenzstrahlen des zweiten auf den Punkt R ($x_1 = x_3 = 0$).

Eine nicht den Strahl a enthaltende Regelschar zweiter Ordnung der Kongruenz, dargestellt durch die Gleichung:

$$\lambda_1 p_{13} + \lambda_2 p_{14} + \lambda_3 p_{23} + \lambda_4 p_{42} = 0, \tag{5}$$

entspricht dem mit R und L inzidenten Kegelschnitte mit der Gleichung:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_3 x_1 x_3 - \lambda_4 x_2 x_3 = 0. \tag{6}$$

Eine in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallene Regelschar zweiter Ordnung (Gleichung 2 a), gegeben durch die Gleichung:

$$\lambda_1^2 p_{13} + \lambda_1 \lambda_2 p_{14} + \lambda_1 \lambda_3 p_{23} - \lambda_2 \lambda_3 p_{42} = 0,$$

hat das durch

$$(\lambda_1 \mathfrak{x}_1 + \lambda_3 \mathfrak{x}_2)(\lambda_1 \mathfrak{x}_3 + \lambda_2 \mathfrak{x}_4) = 0$$

bestimmte Ebenenpaar zur Trägerfläche. Die beiden Strahlenbüschel gehen in das mit L und R inzidente, durch die Gleichung:

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(\lambda_1 x_1 + \lambda_3 x_3) = 0$$

dargestellte Geradenpaar über.

Enthält die Regelschar zweiter Ordnung den Kongruenzstrahl a, so entspricht ihr ein Geradenpaar, dessen eine Gerade mit LR ($x_1 = 0$) zusammenfällt. Für eine solche Regelschar ist nämlich $\lambda_4 = 0$, und die Gleichung (6) ergibt:

$$x_1(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) = 0.$$

Jede Kurve der Ebene ε stellt umkehrbar eindeutig eine in der linearen Kongruenz C_1^1 enthaltene Regelschar und also auch deren Trägerfläche dar. Insbesondere gilt:

Eine nicht durch den Kongruenzstrahl a gehende Regelschar n-ter Ordnung der linearen Kongruenz entspricht umkehrbar eindeutig einer ebenen Kurve n-ter Ordnung. Die Kurve geht α-mal durch L, β-mal durch R, wobei $\alpha + \beta = n$ ist. Die Kurve enthält also keine weiteren Punkte der Geraden LR.

Da a ein herausgegriffener Kongruenzstrahl ist, folgt:

Die lineare Kongruenz enthält, je nachdem n gerade oder ungerade ist, die Regelscharen von $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ verschiedenen Arten von Regelflächen n-ten Grades.

Äußerlich unterscheiden sich diese verschiedenen Arten durch die ganzzahlig möglichen Kombinationen von α und β.

Geht eine Regelschar der linearen Kongruenz $\varkappa$-mal durch den Kongruenzstrahl a, so besteht ihr Bild aus einer Kurve $(n - \varkappa)$-ter Ordnung und der $\varkappa$-fachen Geraden LR ($x_1 = 0$). Die Kurve geht α-mal durch L und β-mal durch R und schneidet $x_1 = 0$ in $\varkappa$ weiteren Punkten, die auch paarweise konjugiert imaginär sein können.

2. Die bisher behandelten Eigenschaften der Abbildung kommen in der folgenden Übersicht zum Ausdruck:

A. Die Regelschar enthält den Kongruenzstrahl a nicht. Für $\alpha = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ ist die Leitgerade l der Kongruenz bzw. ein einfacher, ein zweifacher, ein dreifacher Leitstrahl der Regelschar usf. Dieselbe Bedeutung hat die Zahl β für die Leitgerade r.

Regelschar	Bildkurve	α	β
Strahlenbüschel 1. Ordnung	Punktreihe 1. Ordnung	0	1
		1	0
Regelschar 2. Ordnung	Kurve 2. Ordnung	1	1
Regelschar 3. Ordnung	Kurve 3. Ordnung	1	2
		2	1
Regelschar 4. Ord., 1. Art	Kurve 4. Ordnung	2	2
Regelschar 4. Ord., 2. Art	Kurve 4. Ordnung	1	3
		3	1
Regelschar 5. Ord., 1. Art	Kurve 5. Ordnung	2	3
		3	2

u. s. f.

B. Die Regelschar n-ter Ordnung geht $\varkappa$-mal durch den Kongruenzstrahl a. Die Bildkurve besteht aus einer Kurve $(n - \varkappa)$-ter Ordnung und der $\varkappa$-fachen Geraden RL. Der Strahl l ist $(\alpha + \varkappa)$-facher Leitstrahl, r ist $(\beta + \varkappa)$-facher Leitstrahl der Regelschar.

Regelschar	$\varkappa$	Bildkurve ohne Gerade RL	α	β
Regelschar 2. Ordnung	1	Punktreihe 1. Ordnung	0	0
Regelschar 3. Ordnung	1	Kurve 2. Ordnung	0	1
			1	0
Regelschar 4. Ord., 1. Art	1	Kurve 3. Ordnung	1	1
Regelschar 4. Ord., 1. Art	2	Kurve 2. Ordnung	0	0
Regelschar 4. Ord., 2. Art	1	Kurve 3. Ordnung	0	2
			2	0
Regelschar 5. Ord., 1. Art	1	Kurve 4. Ordnung	1	2
			2	1

u. s. f.

Jede gegebene in der linearen Kongruenz enthaltene Regelschar n-ten Grades, für die $\alpha = \beta$ ist, läßt sich als vollständiger Schnitt der Kongruenz mit einem Strahlenkomplexe vom Grade $\frac{n}{2}$ darstellen. Für $\alpha \neq \beta$ kann die Regelfläche durch Hinzufügung von $|\alpha - \beta|$ Kongruenzstrahlenbüscheln erster Ordnung zum vollständigen Schnitt von C_1^1 mit einem Strahlenkomplexe ergänzt werden, dessen Grad die größere der Zahlen α, β ist.

Die Regelschar vierter Ordnung mit der Bedingung $\alpha = \beta = 2$ heiße Regelschar vierter Ordnung „erster Art". Sie heiße Regelschar vierter Ordnung „zweiter Art" für $\alpha \neq \beta$. Die Bildkurve der ersteren ist eine Kurve vierter Ordnung mit Doppelpunkten in R und L. Die Gleichung der Bildkurve kann daher als Glieder niedrigster Dimension in x_1, x_2 und in x_1, x_3 nur solche von der zweiten Ordnung enthalten. Sie lautet:

$$a_1 x_1^4 + a_2 x_1^3 x_2 + a_3 x_1^3 x_3 + a_4 x_1^2 x_2^2 + a_5 x_1^2 x_2 x_3 + a_6 x_1^2 x_3^2 \\ + a_7 x_1 x_2^2 x_3 + a_8 x_1 x_2 x_3^2 + a_9 x_2^2 x_3^2 = 0.$$

Die durch diese Bildkurve dargestellte Regelschar vierter Ordnung erster Art schneidet der durch die Gleichung:

$$a_1 p_{13}^2 + a_2 p_{13} p_{14} + a_3 p_{13} p_{23} + a_4 p_{14}^2 + a_5 p_{14} p_{23} + a_6 p_{23}^2 \\ - a_7 p_{14} p_{42} - a_8 p_{23} p_{42} + a_9 p_{42}^2 = 0$$

dargestellte quadratische Strahlenkomplex aus der linearen Kongruenz. Nach den Abbildungsgleichungen (4) kann das Glied $a_5 x_1^2 x_2 x_3$ aber nicht nur durch $a_5 p_{14} p_{23}$, sondern ebenso auch durch $-a_5 p_{13} p_{42}$ ersetzt werden, so daß es unendlich viele quadratische Gleichungen der p_{ik} gibt, die zu jener gegebenen Bildkurve führen. Mit anderen Worten:

Durch die Regelschar vierter Ordnung erster Art einer linearen Kongruenz gehen unendlich viele quadratische Strahlenkomplexe.

3. Die Gerade RL $(x_1 = 0)$ werde die „Fundamentalgerade" und die Punkte R, L werden die „Fundamentalpunkte" der Abbildung genannt. Es ist leicht zu erkennen, daß sich die bisherigen (und auch die weiteren) Untersuchungen auf die elliptische lineare Kongruenz übertragen lassen unter Berücksichtigung der andersgearteten

Realitätsverhältnisse. Bei konjugiert imaginären Leitgeraden der linearen Kongruenz führt die Plückersche Grundgleichung auf die reelle strahlenlose Fläche zweiter Ordnung. Bei Verwandlung dieser Fläche in eine Kugel und bei der stereographischen Projektion von einem Kugelpunkte auf die ihm gegenüberliegende Berührungsebene wird die Fundamentalgerade in die unendlichferne Gerade und die Fundamentalpunkte werden in die unendlichfernen Kreispunkte der Ebene verlegt. Die Eigenschaften der elliptischen und der hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz stimmen überein, wenn man sie in der Ebene ε das eine Mal als Theoreme der euklidischen, das andere Mal als Theoreme der pseudoeuklidischen Geometrie ableitet. In diesem Sinne erscheint die Geometrie der einscharig in der elliptischen oder hyperbolischen linearen Kongruenz enthaltenen Regelfläche zweiten Grades als euklidische oder als pseudoeuklidische Kreisgeometrie. Der Beweis jedes hierher gehörigen Theorems kann dabei ebensowohl in der euklidischen wie in der pseudoeuklidischen Ebene geführt werden.

4. Ein gegebener Punkt X der Ebene ε bestimmt umkehrbar eindeutig einen Kongruenzstrahl von C_1^1. Die homogenen Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3$ oder die kartesischen Koordinaten x, y des Punktes sollen daher auch als die Koordinaten des Kongruenzstrahles gelten. Eine gegebene (algebraische oder transzendente) ebene Kurve bedingt umkehrbar eindeutig eine in der Kongruenz enthaltene (algebraische oder transzendente) Regelschar. Die Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ oder $f(x, y) = 0$ der Kurve soll daher zugleich als Gleichung der Regelschar und ihrer Trägerfläche gelten.

Die ∞^1 Kongruenzstrahlenbüschel erster Ordnung in den Ebenen $\alpha_l, \beta_l, \ldots$ der Leitgeraden l von C_1^1 entsprechen den Punktreihen erster Ordnung, deren Trägergeraden $a_l, b_l, \ldots$ durch den Punkt L $(x_1 = x_2 = 0)$ gehen, so daß eine Parameterdarstellung jenes Ebenenbüschels mit einem Parameter λ:

$$\alpha_l + \lambda \beta_l = 0 \qquad\qquad -\infty \cdots \lambda \cdots +\infty$$

eine ebensolche Darstellung dieses Strahlenbüschels nach sich zieht:

$$a_l + \lambda b_l = 0.$$

Dasselbe gilt von den ∞^1 Kongruenzstrahlenbüscheln in den Ebenen $\alpha_r, \beta_r, \ldots$ der andern Leitgeraden r:

$$\alpha_r + \varrho \beta_r = 0 \qquad\qquad -\infty \cdots \varrho \cdots +\infty$$

und ihren Bildern, den Punktreihen, deren Trägergeraden $a_r, b_r, \ldots$ mit R inzident sind:

$$a_r + \varrho b_r = 0.$$

Ein gegebener Kongruenzstrahl p ist der Schnitt einer Ebene durch l mit einer Ebene durch r. Der Strahl ist daher ebenso wie sein Bildpunkt P durch Angabe des zugehörigen Parameterpaares λ, ϱ bestimmt, so daß auch λ, ϱ als Koordinaten in der linearen Kongruenz gelten können.

5. Eine gegebene lineare Strahlenkongruenz kann auf zweierlei Arten kollinear in sich transformiert werden. Bei den Transformationen der ersten Art bleibt jede der beiden Leitgeraden r, l in Ruhe; durch die Transformationen der zweiten Art werden die beiden Leitgeraden r, l miteinander vertauscht. Durch eine Kollineation der ersten Art werden die Ebenen von r und von l mit den von ihnen getragenen Kongruenzstrahlenbüscheln je projektiv auf sich bezogen. Der Kongruenzstrahl a mit den Linienkoordinaten $0:0:0:1$ und die beiden durch ihn gehenden Kongruenzstrahlenbüschel entsprechen einem Kongruenzstrahle a' und seinen beiden mit ihm inzidenten Kongruenzstrahlenbüscheln. In der Ebene ε werden daher aus R und L zwei neue Fundamental-

punkte R', L', und die Strahlenbüschel mit den Mittelpunkten L, R und den Gleichungen:

$$x_2 + \lambda x_1 = 0, \qquad x_3 + \varrho x_1 = 0 \qquad -\infty \cdots \lambda, \varrho \cdots +\infty$$

entsprechen projektiv den Strahlenbüscheln mit den Mittelpunkten L',R' und den Gleichungen:

$$x_2' + \lambda' x_1' = 0, \qquad x_3' + \varrho' x_1' = 0,$$

so daß die Beziehungen gelten:

$$\lambda = \frac{\alpha\lambda' + \beta}{\gamma\lambda' + \delta}, \qquad \varrho = \frac{a\varrho' + b}{c\varrho' + d}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,\ ad - bc \neq 0.$$

In der Fig. 3 entspricht dem Strahle LR ($x_1 = 0$) als Element von L die Gerade $L'M'$ ($x_2' = 0$) als Element von L', dagegen dem Strahle LM ($x_2 = 0$) als Element von L die Gerade $L'R'$ ($x_1' = 0$) als Element von L', so daß die Wertepaare:

$$\lambda = \infty,\ \lambda' = 0 \quad \text{und} \quad \lambda = 0,\ \lambda' = \infty$$

der λ-Substitution genügen. Diese lautet somit:

$$\lambda\lambda' = \frac{\beta}{\gamma}.$$

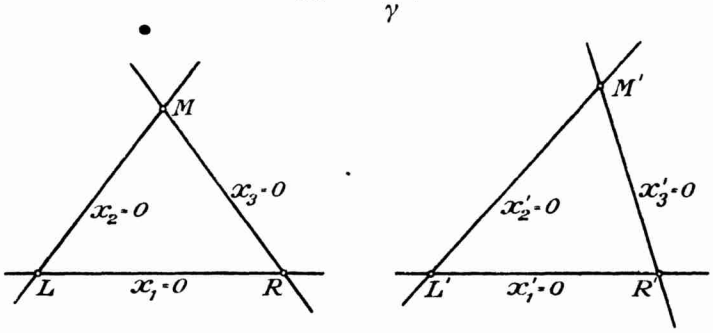

Fig. 3.

Andererseits geht RL ($x_1 = 0$) als Element von R in $R'M'$ ($x_3' = 0$) als Element von R' über und RM ($x_3 = 0$) in $R'L'$ ($x_1' = 0$). Deshalb hat die ϱ-Substitution die Form:

$$\varrho\varrho' = \frac{b}{c}.$$

Die Gleichungen der projektiven Strahlenbüschel lauten:

$$x_2 + \lambda x_1 = 0, \qquad x_2' + \frac{\beta}{\gamma}\frac{1}{\lambda} x_1' = 0$$

$$x_3 + \varrho x_1 = 0, \qquad x_3' + \frac{b}{c}\frac{1}{\varrho} x_1' = 0.$$

Wird $\gamma c = c_1$, $\beta c = c_2$, $b\gamma = c_3$ gesetzt, so ergeben sich nach Elimination von λ, ϱ die Substitutionen:

$$x_1 : x_2 : x_3 : = \frac{c_1}{x_1'} : \frac{c_2}{x_2'} : \frac{c_3}{x_3'}$$

$$x_1 = c_1 x_2' x_3' \qquad x_2 = c_2 x_1' x_3' \qquad x_3 = c_3 x_1' x_2'$$
$$x_1' = c_1 x_2 x_3 \qquad x_2' = c_2 x_1 x_3 \qquad x_3' = c_3 x_1 x_2.$$

In Worten:

Die Kollineationen der linearen Strahlenkongruenz in sich selbst werden durch die quadratischen Cremonatransformationen der Bildkurve wiedergegeben.

In Nr. 1 wurden die Kongruenzstrahlen in die Punkte einer Fläche zweiter Ordnung abgebildet (Gleichung 3). Wird eine solche Fläche kollinear in sich transformiert, vor und nach der Kollineation aber stereographisch projiziert, so sind die beiden entstandenen Bildfelder durch eine quadratische Cremonatransformation aufeinander bezogen. Hält man vor und nach der Transformation an demselben Projektionszentrum der stereographischen Projektion fest, so fällt in Fig. 3 der singuläre Fundamentalpunkt L' auf L und R' auf R. Die Eigenschaften der quadratischen Cremonatransformationen und der Kollineationen der linearen Kongruenz in sich bedingen einander, und eine Klassifikation der ersteren zieht eine solche der letzteren nach sich. Die Kollineationen der elliptischen linearen Kongruenz in sich können insbesondere als die Kreisverwandtschaften dargestellt werden.

6. Es gibt zwei verschiedene Arten von Involutionen auf der linearen Kongruenz, da es zwei Arten von involutorischen quadratischen Cremonatransformationen gibt. Konjugierte Strahlen einer solchen Involution sind reziproke Polaren im polaren Raume einer Fläche zweiter Ordnung. Ist die Fläche zweiter Ordnung einscharig in der linearen Kongruenz C_1^1 enthalten, so heißt die Involution eine primäre. Liegt die Fläche zweiter Ordnung dagegen beidscharig involutorisch im geschart involutorischen Raume von C_1^1, so ist die Involution eine sekundäre [1]). Im folgenden gehen wir bei der Behandlung dieser Involutionen von den quadratischen involutorischen Cremonatransformationen aus.

A. Die primären Involutionen auf der linearen Kongruenz.

Die eine Art involutorischer quadratischer Cremonatransformationen in der Bildebene sind die allgemeinen Inversionen. Eine einscharig in der linearen Kongruenz enthaltene Fläche zweiter Ordnung K^2 ist nach Abschnitt 2 durch einen Kegelschnitt k^2 durch die Fundamentalpunkte L, R dargestellt (Fig. 4). Der Pol K der Geraden RL $(x_1 = 0)$

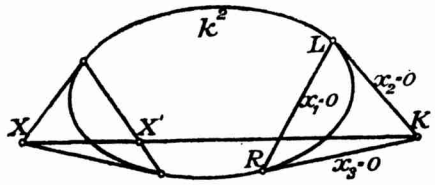

Fig. 4.

für den Kegelschnitt ist das Inversionszentrum. Ein gegebener Punkt X und der Schnittpunkt X' seiner Polaren für den Kegelschnitt mit KX sind konjugierte Punkte der Inversion und stellen zwei reziprok polare Kongruenzstrahlen in Bezug auf die einscharig in der Kongruenz enthaltene Fläche K^2 dar. Unter Benutzung des Koordinatendreiecks KRL:

$$RL\ (x_1 = 0), \qquad KL\ (x_2 = 0), \qquad KR\ (x_3 = 0)$$

sind die Fläche K^2 und der Kegelschnitt k^2 durch die Gleichung gegeben:

$$a_1 x_1^2 + 2\, a_2 x_2 x_3 = 0.$$

Setzt man:

$$RL\colon\ x_1' = 0, \qquad KL\colon x_3' = 0, \qquad KR\colon x_2' = 0, \qquad \frac{2a_2}{a_1} = c,$$

[1]) Jolles, Die Involutionen auf einer linearen Strahlenkongruenz, Math. Ztschr. **27** (1928), S. 427. — Eine analytische Behandlung und Klassifikation dieser Involutionen enthält die Abhandlung: Haenzel, Eine analytische Theorie der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz, Journal f. d. reine u. angew. Mathematik **166** (1932), S. 167.

so bedingt die einscharig in der Kongruenz enthaltene Fläche K^2 die primäre Involution, dargestellt durch:

$$x_1' : x_2' : x_3' = \frac{c}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3}. \tag{8}$$

Die primären Involutionen auf der elliptischen linearen Kongruenz führen, wie leicht einzusehen, auf die Transformationen durch reziproke Radien mit (reellen oder imaginären) Inversionskreisen.

Zu einem gegebenen R, L enthaltenden Kegelschnitte k^2 gibt es ein Bündel von ∞^2 selbstinversen Kegelschnitten durch R, L. Jeder von ihnen geht durch Inversion an k^2 in sich über. Es sind die zu k^2 orthogonalen Kreise in der pseudoeuklidischen oder der euklidischen Metrik mit den bzw. reellen oder konjugiert imaginären Fundamentalpunkten L, R. Jeder durch einen Punkt X gehende zu k^2 orthogonale Kegelschnitt geht auch durch den inversen Punkt X'. Aus alledem folgt:

Eine primäre Involution auf der linearen Kongruenz C_1^1 ist bedingt durch eine einscharig in C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung K^2 [1]. *Konjugierte Strahlen der Involution sind reziproke Polaren für K^2, und die ∞^1 in der linearen Kongruenz enthaltenen Regelstrahlen von K^2 sind die Doppelstrahlen der primären Involution. Die ∞^2 für K^2 polarinvarianten, in der Kongruenz einscharig enthaltenen Flächen zweiter Ordnung bilden einen Bündel. Die Regelscharen dieser Flächen bestehen aus reziproken Polaren für K^2. Jede dieser Flächen ist also für die primäre Involution invariant.*

B. Die sekundären Involutionen auf der linearen Kongruenz.

Neben den Inversionen gibt es eine zweite Art involutorischer, quadratischer Cremonatransformationen, bei denen das System der drei singulären Fundamentalpunkte mit dem System der drei homologen singulären Fundamentalpunkte zusammenfällt. In dem Dreieck LRK (Fig. 5):

$$LR \ (x_1 = x_1' = 0), \qquad LK \ (x_2 = x_2' = 0), \qquad KR \ (x_3 = x_3' = 0)$$

sei jeder der beiden Strahlenbüschel L und R:

$$L: x_2 + \lambda x_1 = 0, \qquad R: x_3 + \varrho x_1 = 0$$

involutorisch auf sich bezogen durch die Bedingungsgleichungen:

$$\alpha\lambda\lambda' + \beta(\lambda + \lambda') + \gamma = 0,$$
$$\alpha\varrho\varrho' + b(\varrho + \varrho') + d = 0.$$

Dann sind durch diese Beziehungen die ∞^2 Kongruenzstrahlen sekundär involutorisch gepaart. Denn einem gegebenen Punkte $X(\lambda, \varrho)$ als Schnitt von LX, RX ist ein entsprechender Punkt $X'(\lambda', \varrho')$ als Schnitt der LX, RX konjugierten Strahlen LX', RX' involutorisch zugeordnet. Die sekundäre Involution hat vier (reelle oder paarweise konjugiert imaginäre) Doppelelemente. Sie ergeben sich aus den vier Schnittpunkten der beiden Doppelstrahlen s_1, s_2 des involutorischen Strahlenbüschels L mit den beiden Doppelstrahlen s_3, s_4 des involutorischen Strahlenbüschels R. In einer linearen Strahlenkongruenz bilden daher die vier (reellen oder paarweise konjugiert imaginären) Doppelstrahlen einer sekundären Involution ein Raumvierseit, das durch die Leitgeraden der Kongruenz zu einem Tetraeder ergänzt wird [1].

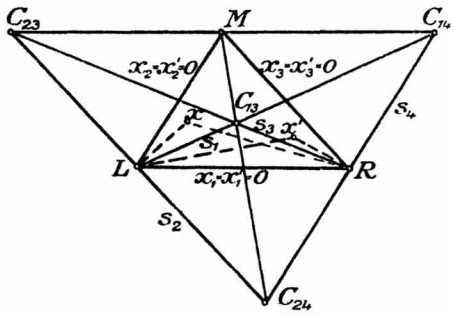

Fig. 5.

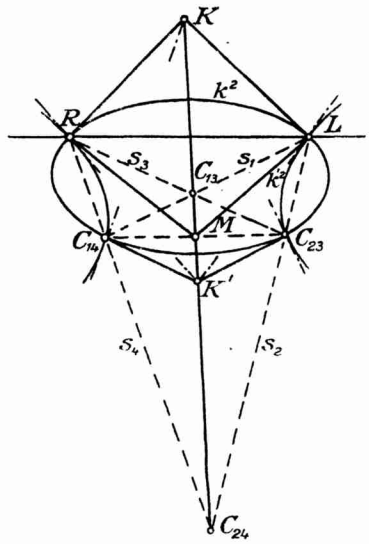

Fig. 6.

Bei der hier getroffenen Wahl des Koordinatendreiecks ist die sekundäre Involution wiedergegeben durch die involutorische Cremonatransformation:

$$x_1' : x_2' : x_3' = \frac{c_1}{x_1} : \frac{c_2}{x_2} : \frac{c_3}{x_3} . \tag{9}$$

Für die Koordinaten der vier Doppelelemente ergeben sich die Verhältnisse aus:

$$\pm \sqrt{c_1} : \pm \sqrt{c_2} : \pm \sqrt{c_3} .$$

In der Fig. 5 sind s_1, s_2 die Doppelstrahlen des involutorischen Büschels L, s_3, s_4 die Doppelstrahlen des involutorischen Büschels R und ihre Schnittpunkte C_{13}, C_{14}, C_{23}, C_{24} die Doppelelemente der involutorischen Cremonatransformation. Für zwei konjugierte Elemente X, X' folgt daher:

$$(s_1, s_2, LX, LX') = (s_3, s_4, RX, RX') = -1. \tag{10}$$

An einen gegebenen Kegelschnitt k^2 durch R, L mit dem Inversionszentrum K (Fig. 6) legt man aus dem gegebenen Punkte K' die Tangenten mit den Berührungspunkten C_{14}, C_{23} und verbindet K' mit R und L.

Es geht ein einziger Kegelschnitt k'^2 durch R, L, C_{14}, C_{23}, der in R, L die Geraden $K'R$, $K'L$ berührt. Von den Kegelschnitten k^2, k'^2 mit den Inversionszentren K, K' geht jeder durch Inversion am anderen in sich über, und aus den Punkten C_{14}, C_{23} gehen die Tangenten jedes Kegelschnittes durch das Inversionszentrum des anderen. Jeder gegebene Punkt K' ist Inversionszentrum eines solchen Kegelschnittes k'^2. Die ∞^2 Kegelschnitte k'^2 erfüllen den Bündel der für k^2 inversionsfesten Kegelschnitte (A).

Das den beiden Kegelschnitten einbeschriebene vollständige Viereck:

$$LR\, C_{14} C_{23}$$

hat die drei Paare von Gegenseiten:

$$LC_{14} = s_1,\ RC_{23} = s_3; \qquad LC_{23} = s_2,\ RC_{14} = s_4; \qquad LR,\ C_{14}C_{23},$$

und daher die Nebenecken:

$$(s_1, s_3) = C_{13}, \qquad (s_2, s_4) = C_{24}, \qquad (LR, C_{14}C_{23}).$$

Die Verbindungsgerade KK' der Inversionszentren schneidet die gemeinsame Bisekante $C_{14}C_{23}$ in M. Die beiden durch k^2 und k'^2 bedingten Inversionen haben als

Resultierende die involutorische quadratische Cremonatransformation der zweiten Art mit dem Fundamentaldreieck LRM und den Deckpunkten $C_{14}, C_{23}, C_{13}, C_{24}$. In der Metrik mit den (reellen oder den konjugiert imaginären) Fundamentalpunkten L, R sind k^2 und k'^2 zwei zueinander orthogonale Kreise. Hieraus folgt für die lineare Kongruenz:

Zwei primäre Involutionen, bedingt durch zwei für einander polarinvariante, einscharig in der Kongruenz enthaltene Regelflächen zweiter Ordnung, haben zur Resultierenden eine sekundäre Involution.

Durchläuft ein gegebener Punkt X einen Kegelschnitt $\varkappa^2$ durch R, L und durch die Fixpunkte C_{13}, C_{24}, so liegt auch der konjugierte Punkt X' der involutorischen Cremonatransformation auf $\varkappa^2$. Denn die Strahlen LX, RX beschreiben zwei projektive, zum Kegelschnitte $\varkappa^2$ perspektive Strahlenbüschel L, R. Dabei entsprechen den Geraden s_1, s_2 von L die Geraden s_3, s_4 von R. Also sind auch LX' und RX' zwei homologe Strahlen (Gleichung 10), und $\varkappa^2$ geht durch X'. Jeder Kegelschnitt durch R, L, C_{13}, C_{24} und ebenso jeder Kegelschnitt durch R, L, C_{14}, C_{23} geht durch die involutorische Cremonatransformation in sich über. Für die lineare Kongruenz gilt also:

Eine sekundäre Involution enthält [1]) *zwei Büschel einscharig involutorischer Regelscharen zweiter Ordnung der linearen Kongruenz. Die Trägerflächen des einen Büschels gehen durch die Leitgeraden und das eine Paar windschiefer (reeller oder konjugiert imaginärer) Doppelstrahlen, die Träger des anderen durch die Leitgeraden und das andere Paar Doppelstrahlen. Die Flächen beider Büschel sind wechselseitig polarinvariant.*

Wie die involutorischen (euklidischen oder pseudoeuklidischen) Kreisverwandtschaften die Involutionen auf den (elliptischen oder hyperbolischen) linearen Kongruenzen darstellen, so führt die Orthogonalitätsbedingung der Kreisgeometrie zur Polarentheorie auf der linearen Kongruenz. Ein gegebener (reeller oder imaginärer) Kreis ist der Orthogonalkreis eines Bündels von ∞^2 Kreisen seiner Ebene; jedem Kreisbüschel ist ein orthogonaler Kreisbüschel zugeordnet. Eine einscharig in der Kongruenz enthaltene Regelfläche zweiter Ordnung ist daher polarinvariant für die polaren Räume von ∞^2 solchen Flächen; diese Flächen zweiter Ordnung bilden ein Bündel. Einem Büschel einscharig in der Kongruenz enthaltener Flächen zweiter Ordnung ist ein anderer Büschel solcher Flächen so zugeordnet, daß jede Fläche des einen Büschels für die ∞^1 Flächen des anderen polarinvariant ist.

II. Die Polarentheorie der linearen Strahlenkongruenz [2]).

7. Die den Linienkoordinaten anhaftende Plückersche Grundgleichung ergibt für die Kongruenzstrahlen die Gleichung (1):

$$p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Deutet man die vier Linienkoordinaten als homogene Punktkoordinaten (Nr. 1, Gleichung 3), — betreibt man die Geometrie der linearen Kongruenz als Geometrie auf der Fläche zweiter Ordnung H^2 —, so entspricht der in der Kongruenz enthaltenen (reellen oder imaginären) Regelschar zweiter Ordnung der Kegelschnitt auf der Fläche zweiter Ordnung. Auf der (reellen oder imaginären) Fläche zweiter Ordnung H^2 mit reellem polaren Raume sind einem gegebenen Kegelschnitt f^2 diejenigen ∞^2 Kegelschnitte zu-

[2]) Die Polarentheorie ist von Herrn Jolles auf synthetischem Wege entwickelt worden in der Abhandlung: St. Jolles, Die Polarität als Grundlage in der Geometrie der linearen Strahlenkongruenz, Math. Ztschr. **33** (1931), S. 733—790. Im folgenden wird auf anderem Wege eine kurze analytische Entwicklung der Polarentheorie gegeben.

geordnet, deren ∞^2 Ebenen durch den Pol der Ebene von f^2 gehen. Diese Kegelschnitte bilden auf der Fläche eine lineare Mannigfaltigkeit zweiter Stufe, einen f^2-Bündel, und es besteht zwischen den ∞^3 Kegelschnitten der Fläche und ihren ∞^3 f^2-Bündeln eine polare Korrelation. Dieselbe zieht eine polare Korrelation zwischen den ∞^3 Regelscharen zweiter Ordnung der linearen Kongruenz C_1^1 und ihren ∞^3 Regelscharbündeln nach sich, und zwar zeigt sich im folgenden leicht, daß die Trägerfläche der in der Kongruenz enthaltenen Regelschar $\mathfrak{R}^2$ für die ∞^2 Trägerflächen des zugeordneten Regelscharbündels autopolar ist.

Durch die lineare Kongruenz C_1^1 gehen die ∞^1 linearen Komplexe eines Komplexbüschels, dargestellt durch: $p_{12} + \lambda p_{34} = 0$ $(-\infty \cdots \lambda \cdots +\infty)$. Die ∞^3 linearen Komplexe, die für diesen Komplexbüschel nullinvariant sind, bilden das Γ-Gebüsch der linearen Kongruenz. Dieses ist perspektiv zum Gebüsch der ∞^3 in der Kongruenz enthaltenen Regelscharen zweiter Ordnung, dem $\mathfrak{R}^2$-Gebüsch der Kongruenz. Wird doch durch einen gegebenen linearen Komplex des Γ-Gebüsches die Kongruenz je in einer Regelschar zweiter Ordnung geschnitten. Demnach kann die Polarität in der linearen Strahlenkongruenz auch als Polarität in ihrem Γ-Gebüsch angesehen werden. Dabei ist einem gegebenen linearen Komplexe Γ des Γ-Gebüsches je ein Bündel von ∞^2 solchen Komplexen zugeordnet, und der lineare Komplex Γ ist für jene ∞^2 linearen Komplexe nullinvariant.

Demnach stellen sich vier polare Korrelationen in den betrachteten geometrischen Trägergebilden folgendermaßen nebeneinander:

Träger der Polarität	Die Fläche zweiter Ordnung	Die lineare Kongruenz als Träger ihres $\mathfrak{R}^2$-Gebüsches	Die lineare Kongruenz als Träger ihres Γ-Gebüsches	Die Ebene mit zwei Fundamentalpunkten
Elemente der Zuordnung	Der Kegelschnitt f^2 und die ∞^2 Kegelschnitte eines f^2-Bündels	Die Regelschar $\mathfrak{R}^2$ und die ∞^2 Regelscharen eines $\mathfrak{R}^2$-Bündels	Der lineare Komplex Γ und die ∞^2 Komplexe eines Γ-Bündels	Der Kreis k^2 und die ∞^2 Kreise eines k^2-Bündels
Art der Zuordnung	Zugeordete Kegelschnitte liegen in konjugierten Ebenen	Die Trägerflächen zugeordneter Regelscharen sind für einander autopolar	Zugeordnete Komplexe sind für einander nullinvariant	Zugeordnete Kreise sind für einander selbstinvers.

8. Ein gegebener linearer Komplex Γ_λ des Γ-Gebüsches der linearen Kongruenz C_1^1 hat eine Gleichung von der Form:

$$\Gamma_\lambda = \lambda_1 p_{13} + \lambda_2 p_{14} + \lambda_3 p_{23} + \lambda_4 p_{42} = 0 \tag{11}$$

je bei festen Parameterverhältnissen $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$. Er schneidet die lineare Kongruenz in einer Regelschar zweiter Ordnung. Die Trägerfläche dieser Regelschar heißt die dem linearen Komplexe Γ „adjungierte", einscharig in C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung, und der lineare Komplex heißt der Fläche zweiter Ordnung adjungiert [3]). Die Gleichung dieser Fläche zweiter Ordnung ergibt sich aus der Gleichung des Komplexes Γ_λ und den allen Kongruenzstrahlen anhaftenden Bedingungen $p_{12} = p_{34} = 0$ als:

$$F_\lambda^2 = \lambda_1 x_1 x_3 + \lambda_2 x_1 x_4 + \lambda_3 x_2 x_3 - \lambda_4 x_2 x_4. \tag{11 a}$$

Dabei sind den speziellen linearen Komplexen des Γ-Gebüsches (11) die je in zwei Paare (reeller oder konjugiert imaginärer) Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenen Flächen zweiter Ordnung (11a) adjungiert, denn in den beiden Gleichungen (11) und (11a)

[3]) Dieser Ausdruck und mehrere weitere Fachausdrücke des Abschnittes II sind den in Anm. 2 genannten Abhandlungen entnommen. Sie sind hier durch „...." gekennzeichnet.

werden ja diese speziellen Gebilde durch die Bedingung gekennzeichnet [4]):

$$\lambda_1 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_3 = 0.$$

9. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ und $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, \bar{\lambda}_4$ zwei Quadrupel von Parametern, so hat die bilineare Beziehung:

$$\lambda_1 \bar{\lambda}_4 + \lambda_2 \bar{\lambda}_3 + \lambda_4 \bar{\lambda}_1 + \lambda_3 \bar{\lambda}_2 = 0 \tag{12}$$

einen zweifachen geometrischen Ursprung: Sie gewährleistet einerseits im F^2-Gebüsch von C_1^1 die gegenseitige Autopolarität zweier Flächen zweiter Ordnung F_λ^2, $\bar{F}_\lambda^2$ mit ihr genügenden Koeffizienten λ_i, $\bar{\lambda}_i$, und sie erweist andererseits die im Γ-Gebüsch der linearen Kongruenz diesen beiden Flächen adjungierten linearen Komplexe Γ_λ, $\bar{\Gamma}_\lambda$ als für einander nullinvariant. Je zweien einscharig in C_1^1 enthaltenen für einander autopolaren Flächen sind zwei nullinvariante lineare Komplexe des Γ-Gebüsches adjungiert. Demnach kennzeichnet die bilineare Beziehung (12) sowohl eine polare Korrelation im F^2-Gebüsch $\Pi(F)$ der linearen Kongruenz C_1^1 wie auch eine polare Korrelation im Γ-Gebüsch $\Pi(\Gamma)$, nämlich:

Für eine gegebene Fläche zweiter Ordnung P_μ^2 im F^2-Gebüsch der linearen Kongruenz C_1^1 sind die ∞^2 einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen eines F^2-Bündels $\pi(F^2)$ autopolar.

Für einen gegebenen linearen Komplex Γ im Γ-Gebüsch der linearen Kongruenz C_1^1 sind die ∞^2 linearen Komplexe eines im Γ-Gebüsch enthaltenen Γ-Bündels $\pi(\Gamma)$ nullinvariant.

Ist bei festen Parameterverhältnissen $\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_4$ die Gleichung

der Fläche P^2:

$$\mu_1 x_1 x_3 + \mu_2 x_1 x_4 + \mu_3 x_2 x_3 - \mu_4 x_2 x_4 = 0,$$

des linearen Komplexes Γ_μ:

$$\mu_1 p_{13} + \mu_2 p_{14} + \mu_3 p_{23} + \mu_4 p_{42} = 0,$$

so sind P_μ^2 und Γ_μ einander adjungiert. Aus der Gleichung

der Fläche P_μ^2 | des Komplexes Γ_μ

folgt die Gleichung

ihres „Polar-F^2-Bündels" $\pi(F^2)$ | seines „Polar-Γ-Bündels" $\pi(\Gamma)$

vermöge der bilinearen Beziehung $\mu_1 \lambda_4 + \mu_2 \lambda_3 + \mu_3 \lambda_2 + \mu_4 \lambda_1 = 0$, und sie lautet:

$$\begin{aligned}\pi(F^2) &= \lambda_1(\mu_1 x_1 x_3 + \mu_4 x_2 x_4)\\ &+ \lambda_2(\mu_1 x_1 x_4 + \mu_3 x_2 x_4)\\ &+ \lambda_3(\mu_1 x_2 x_3 + \mu_2 x_2 x_4) = 0\end{aligned}$$

Wird jeder einscharig in C_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung P_μ^2 der Bündel $\pi(F^2)$ der für sie autopolaren Flächen zweiter Ordnung von C_1^1 zugeordnet, so sind die Flächen P_μ^2 und die Bündel $\pi(F^2)$ als „Polflächen" und „Polar-F^2-Bündel" korrelativ aufeinander bezogen. Sie bilden so das „polare F^2-Gebüsch" der linearen Kongruenz C_1^1.

$$\begin{aligned}\pi(\Gamma) &= \lambda_1(\mu_1 p_{13} - \mu_4 p_{42})\\ &+ \lambda_2(\mu_1 p_{14} - \mu_3 p_{42})\\ &+ \lambda_3(\mu_1 p_{23} - \mu_2 p_{42}) = 0\,.\end{aligned}$$

Wird jedem linearen Komplexe Γ_μ des Γ-Gebüsches von C_1^1 der Bündel $\pi(\Gamma)$ der für ihn nullinvarianten linearen Komplexe von C_1^1 zugeordnet, so sind die Komplexe Γ_μ und die Bündel $\pi(\Gamma)$ als „Polkomplexe' und „Polar-Γ-Bündel" korrelativ aufeinander bezogen. Sie bilden so das „polare Γ-Gebüsch" der linearen Kongruenz C_1^1.

---

[4]) Die symmetrische Determinante jeder einscharig in C_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung hat den Rang zwei, wenn diese Bedingung erfüllt ist.

Sind die Fläche P_μ^2 des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ und der lineare Komplex Γ des polaren Γ-Gebüsches $\Pi(\Gamma)$ einander adjungiert, so sind auch die ∞^2Flächen des Polar-F^2-Bündels $\pi(F^2)$ bzw. den ∞^2 linearen Komplexen des Polar-Γ-Bündels $\pi(\Gamma)$ adjungiert. Das polare F^2-Gebüsch und das polare Γ-Gebüsch der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 sind perspektiv.

10. Nach Nr. 8 sind die ∞^2 je in zwei Paare Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenen Regelflächen zweiter Ordnung des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ den ∞^2 speziellen linearen Komplexen des polaren Γ-Gebüsches $\Pi(\Gamma)$ adjungiert. Jeder Kongruenzstrahl p ist die Doppelpunktsgerade je einer solchen zerfallenen Fläche zweiter Ordnung. Die (reellen oder konjugiert imaginären) Ebenen der beiden Strahlenbüschel verbinden p mit den (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden der Kongruenz. Der Strahl p ist zugleich die Leitgerade des adjungierten speziellen linearen Komplexes. Für diese speziellen Elemente gilt nun:

Im polaren F^2-Gebüsch $\Pi(F^2)$ besteht der Polar-F^2-Bündel $\pi(F^2)$ einer zerfallenen Fläche zweiter Ordnung P^2 aus dieser Fläche und aus allen übrigen durch die Doppelpunktsgerade p von P^2 gehenden Flächen zweiter Ordnung des F^2-Gebüsches. Im polaren F^2-Gebüsch $\Pi(F^2)$ heißt jede solche mit ihrem Polar-F^2-Bündel inzidente Fläche „Inzidenzfläche" und ihr Polar-F^2-Bündel „Inzidenz-F^2-Bündel". Da die Inzidenzflächen die einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Flächen zweiter Ordnung sind und ihre Doppelpunktsgeraden die lineare Kongruenz C_1^1 erfüllen, so heißt letztere die „Inzidenzkongruenz" des polaren F^2-Gebüsches.

Im polaren Γ-Gebüsch $\Pi(\Gamma)$ besteht der Polar-Γ-Bündel $\pi(\Gamma)$ eines speziellen linearen Komplexes Γ aus diesem Komplexe und aus allen übrigen durch die Leitgerade p von Γ gehenden linearen Komplexen des Γ-Gebüsches. Im polaren Γ-Gebüsch $\Pi(\Gamma)$ heißt jeder solcher mit seinem Polar-Γ-Bündel inzidente lineare Komplex „Inzidenzkomplex" und sein Polar-Bündel „Inzidenz-Γ-Bündel". Da die Inzidenzkomplexe die speziellen linearen Komplexe von $\Pi(\Gamma)$ sind und ihre Leitgeraden die lineare Kongruenz C_1^1 erfüllen, so heißt letztere die „Inzidenzkongruenz" des polaren Γ-Gebüsches.

11. Zwei gegebene Flächen zweiter Ordnung P_μ^2, P_ν^2 des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ werden durch einen Büschel solcher Flächen verbunden. Aus ihren Gleichungen folgt die Darstellung des sie verbindenden F^2-Büschels mittels eines Parameterquotienten $\varkappa_1 : \varkappa_2$:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^2 &= (\varkappa_1 \mu_1 + \varkappa_2 \nu_1) x_1 x_3 \\ &+ (\varkappa_1 \mu_2 + \varkappa_2 \nu_2) x_1 x_4 \\ &+ (\varkappa_1 \mu_3 + \varkappa_2 \nu_3) x_2 x_3 \\ &- (\varkappa_1 \mu_4 + \varkappa_2 \nu_4) x_2 x_4 = 0. \end{aligned}$$

Die den Flächen P_μ^2, P_ν^2 zugeordneten Polar-F^2-Bündel $\pi_\mu(F^2)$ $\pi_\nu(F^2)$ schneiden einander in einem F^2-Büschel $\pi_{\mu\nu}^2$, und von den beiden Büscheln $F_{\mu\nu}^2$, $\pi_{\mu\nu}^2$ ist jede Fläche des einen Büschels für alle Flächen des

Zwei gegebene lineare Komplexe Γ_μ, Γ_ν des polaren Γ-Gebüsches $\Pi(\Gamma)$ werden durch einen Büschel solcher Komplexe verbunden. Aus ihren Gleichungen folgt die Darstellung des sie verbindenden Γ-Büschels mittels eines Parameterquotienten $\varkappa_1 : \varkappa_2$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu} &= (\varkappa_1 \mu_1 + \varkappa_2 \nu_1) p_{13} \\ &+ (\varkappa_1 \mu_2 + \varkappa_2 \nu_2) p_{14} \\ &+ (\varkappa_1 \mu_3 + \varkappa_2 \nu_3) p_{23} \\ &+ (\varkappa_1 \mu_4 + \varkappa_2 \nu_4) p_{42} = 0. \end{aligned}$$

Die den Komplexen Γ_μ, Γ_ν zugeordneten Polar-Γ-Bündel $\pi_\mu(\Gamma)$, $\pi_\nu(\Gamma)$ schneiden einander in einem Γ-Büschel $\pi_{\mu\nu}$, und von den beiden Büscheln $\Gamma_{\mu\nu}$, $\pi_{\mu\nu}$ ist jeder Komplex des einen Büschels für alle Komplexe des

anderen autopolar. $F^2_{\mu\nu}, \pi^2_{\mu\nu}$ sind zwei „reziprok polare F^2-Büschel" im polaren F^2-Gebüsch $\Pi(F^2)$.

anderen nullinvariant. $\Gamma_{\mu\nu}, \pi_{\mu\nu}$ sind zwei „reziprok polare Γ-Büschel" im polaren Γ-Gebüsch $\Pi(\Gamma)$.

Aus der Gleichung eines Büschels $F^2_{\mu\nu}$ bzw. $\Gamma_{\mu\nu}$ geht die Gleichung des zu ihm polaren Büschels vermöge der beiden bilinearen Beziehungen:

$$\mu_1\lambda_4 + \mu_2\lambda_3 + \mu_4\lambda_1 + \mu_3\lambda_2 = 0, \quad \Big| \quad \nu_1\lambda_4 + \nu_2\lambda_3 + \nu_4\lambda_1 + \nu_3\lambda_2 = 0$$

hervor und lautet:

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix} \cdot \left[\begin{vmatrix} \mu_1 & -\mu_4 \\ x_2 x_4 & x_1 x_3 \end{vmatrix} \lambda_1 + \begin{vmatrix} \mu_1 & -\mu_3 \\ x_2 x_4 & x_1 x_4 \end{vmatrix} \lambda_2 \right]$$
$$+ \begin{vmatrix} \mu_1 & -\mu_2 \\ x_2 x_4 & x_2 x_3 \end{vmatrix} \cdot \left[\begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \lambda_1 + \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix} \lambda_2 \right] = 0,$$
$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix} \cdot \left[\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_4 \\ p_{42} & p_{13} \end{vmatrix} \lambda_1 + \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_3 \\ p_{42} & p_{14} \end{vmatrix} \lambda_2 \right]$$
$$+ \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ p_{42} & p_{23} \end{vmatrix} \cdot \left[\begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \lambda_1 + \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix} \lambda_2 \right] = 0.$$

III. Differentialgeometrische Eigenschaften der mit ihren Regelscharen in der linearen Kongruenz enthaltenen Regelflächen.

12. Der Hauptstrahl c_d der linearen Kongruenz trägt den kürzesten Abstand ihrer (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden l, r. Er schneidet die Leitgerade l in C_l und die Leitgerade r in C_r (Fig. 7). Die Fluchtebene μ hälftet den kürzesten Abstand $C_l\, C_r$ und steht auf c_d senkrecht. Sie enthält den c_d rechtwinklig kreuzenden unendlich-

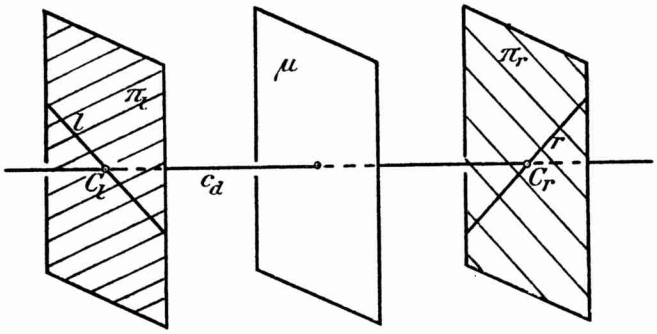

Fig. 7.

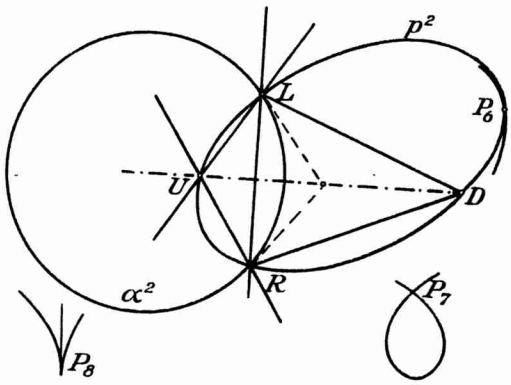

Fig. 8.

fernen Kongruenzstrahl c_r. Die Ebene π_l durch l parallel zu μ trägt den einen Büschel paralleler Kongruenzstrahlen, nämlich den Büschel der zu r parallelen Strahlen. In der Ebene π_e durch r parallel zu μ liegt der zweite Büschel paralleler Kongruenzstrahlen, der Büschel der zu l parallelen Strahlen. Beide Strahlenbüschel haben den unendlichfernen Kongruenzstrahl gemein.

In der Bildebene ε (Abschn. I) sei U das Bild des unendlichfernen Kongruenzstrahls, D das Bild des Hauptstrahles. Durch U, R und L gehen ∞^2 Kegelschnitte. Sie sind die Bilder der ∞^2 einscharig in der Kongruenz enthaltenen Paraboloide. Ein Büschel dieser Kegelschnitte geht durch den Punkt D. Unter den Paraboloiden befinden sich nämlich ∞^1 gleichseitige Paraboloide. Sie bilden einen Büschel. Seine Basiskurve besteht aus den Leitgeraden der Kongruenz, dem Hauptstrahle und dem zum Hauptstrahle rechtwinkligen unendlichfernen Kongruenzstrahle. Die Geraden UL, UR der Ebene ε stellen bzw. die beiden in der Kongruenz enthaltenen Parallelstrahlenbüschel dar. Sie sind in der hyperbolischen Kongruenz reell, in der elliptischen konjugiert imaginär.

13. Eine gegebene mit ihrer Regelschar in der Kongruenz enthaltene Regelfläche habe in der Bildebene die Gleichung $f(x, y) = 0$ oder $\bar{f}(x_1, x_2, x_3) = 0$. Zwei benachbarte Regelstrahlen der Fläche bestimmen einen Elementarstreifen, bedingt durch das Bogenelement ds der ebenen Kurve mit der Gleichung $f(x, y) = 0$. Drei benachbarte Regelstrahlen bestimmen die an dieser Stelle oskulierende Regelfläche zweiter Ordnung. Sie ist einscharig in der Kongruenz enthalten und heißt das oskulierende Hyperboloid. In der Ebene ε erhalten wir als Bild den an dieser Stelle oskulierenden Kegelschnitt durch L, R. Er ist der Krümmungskreis der Kurve $f(x, y) = 0$ in der pseudoeuklidischen oder der euklidischen Metrik der Ebene ε, je nachdem es sich um die hyperbolische oder die elliptische lineare Kongruenz handelt (3). Diese Zusammenhänge ermöglichen eine neuartige, sehr anschauliche Untersuchung differentialgeometrischer Eigenschaften der mit ihren Regelscharen in der Kongruenz enthaltenen Regelflächen, insbesondere ihrer Singularitäten.

14. Die übliche Betrachtung des einzelnen Regelstrahls einer Regelfläche und seiner Umgebung steht in engem Zusammenhange mit den natürlichen Gleichungen der Regelfläche. Ein Regelstrahl geht in den Nachbarregelstrahl über durch infinitesimale Schraubung von der Translationsgeschwindigkeit t_r und der Winkelgeschwindigkeit ω_r um die Zentraltangente als Momentanachse. Die Zentraltangente verschiebt sich ihrerseits längs des Regelstrahles mit der Translationsgeschwindigkeit t_z und dreht sich um sie mit der Winkelgeschwindigkeit ω_z. Die Beschreibung der Fläche hängt allein von den Verhältnissen der vier Größen t_r, t_z, ω_r, ω_z ab. Diese vier Größen als Funktionen ein und desselben Parameters heißen die natürlichen Gleichungen der Fläche. Die Nullstellen der natürlichen Gleichungen und die Kombinationen solcher Nullstellen führen auf singuläre Regelstrahlen der Fläche, wobei aber u. a. die mehrfachen Erzeugenden in diesem Sinne nicht erfaßt werden.

15. Für die in einer linearen Kongruenz mit ihren Regelscharen enthaltenen Regelflächen ergeben sich die durch projektive Betrachtung erfaßbaren Singularitäten hier auf ganz anderem Wege:

a) Die Torsalstrahlen (Fig. 9, Punkt P_1).

Ein Bogenelement ds der Gleichung $f(x, y) = 0$ sende seine Tangente t durch einen der beiden Fundamentalpunkte L, R. Der Berührungspunkt P_1 der Tangente repräsentiert einen Regelstrahl, der den Nachbarstrahl schneidet, d. h. einen Torsalstrahl der

Fläche. Der Torsalpunkt (Schnittpunkt) liegt auf den Leitgeraden r oder l, je nachdem t mit R oder L inzident ist. An dieser Stelle der Regelfläche ist $t_r = 0$. Gründet man in der Ebene eine pseudoeuklidische oder euklidische Metrik auf die Fundamentalpunkte L, R, je nachdem eine hyperbolische oder elliptische Kongruenz in Rede steht, so gilt:

Die Torsalstrahlen einer Regelfläche mit der Gleichung $f(x, y) = 0$ entsprechen den Stellen der Bildebene, in denen die Tangenten der Kurve $f(x, y) = 0$ Minimalgeraden sind.

b) Mehrfache Torsalstrahlen.

Berührt das Bogenelement ds die Minimalgerade n-fach, so liegt ein Torsalstrahl $(n-1)$-ter Ordnung vor. Entweder müssen bei einem mehrfachen Torsalstrahl die n benachbarten Regelstrahlen einander in demselben Punkte treffen — Torsalstrahlen höherer Ordnung erster Art —, oder jeder Regelstrahl schneidet nur den folgenden — Torsalstrahlen höherer Ordnung zweiter Art. Die in der linearen Kongruenz enthaltenen Regelflächen besitzen nur Torsalstrahlen höherer Ordnung erster Art. Eine gewisse Ausnahme enthält der Fall c).

c) Der Knick (Fig. 9, Punkt P_2).

Hat die Kurve mit der Gleichung $f(x,y) = 0$ einen Knick, dessen eine Tangente durch den Fundamentalpunkt L, dessen andere Tangente durch den Fundamentalpunkt R geht, so besitzt die Regelfläche an der entsprechenden Stelle einen doppelten Torsalstrahl mit je einem Torsalpunkte auf jeder der Leitgeraden l, r.

d) Die zylindrische Erzeugende (Fig. 9, Punkt P_3).

Berührt das betrachtete Bogenelement ds die Gerade UL oder die Gerade UR, so sind an der entsprechenden Stelle zwei benachbarte Regelstrahlen der Fläche parallel (Nr. 12). Es liegt ein zylindrischer Regelstrahl vor, und es ist $\omega_r = 0$. Der unendlichferne Torsalpunkt liegt auf der Leitgeraden l oder r, je nachdem die Tangente von ds mit der Geraden UL oder UR zusammenfällt.

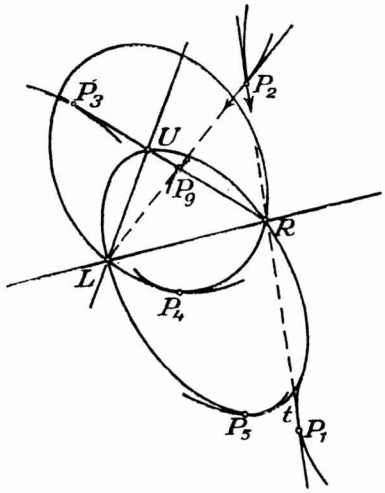

Fig. 9.

e) Der Scheitelregelstrahl (Fig. 9, Punkt P_4).

Das oskulierende Hyperboloid ist bestimmt durch den das Bogenelement oskulierenden, R, L enthaltenden Kegelschnitt. Bei Hyperoskulation heißt der entsprechende Regelstrahl ein Scheitelregelstrahl. Er liegt mit mindestens drei benachbarten Regelstrahlen in einer Regelschar zweiter Ordnung.

f) Der Wenderegelstrahl (Fig. 9, Punkt P_5).

Geht der oskulierende Kegelschnitt durch den Punkt U, so ist die oskulierende Regelfläche ein *Strahlenparaboloid* (12). In diesem Falle liegt ein Wenderegelstrahl vor, und es ist $\omega_z = 0$.

g) Der orthoide Wenderegelstrahl (Fig. 8, Punkt P_6).

Der oskulierende Kegelschnitt durch R, L, U enthält den Punkt D. Die oskulierende Regelfläche geht durch den Hauptstrahl der Kongruenz, ist also ein *gleichseitiges* Strahlenparaboloid. Der zugehörige Regelstrahl ist ein orthoider Wenderegelstrahl. Er wird von der Striktionslinie der Regelfläche senkrecht geschnitten, es ist $t_z = 0$ und $\omega_z = 0$.

h) Mehrfacher Regelstrahl, Rückkehrregelstrahl, isolierter Regelstrahl (Fig. 8, Punkte P_7, P_8).

Eine Punktsingularität der ebenen Kurve $f(x, y) = 0$ liegt dort vor, wo $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ist. Es handelt sich um einen Doppelpunkt, eine Spitze oder einen isolierten Punkt, je nachdem die Involution zweier Parameter λ, λ':

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \lambda\lambda' + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (\lambda + \lambda') + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

eine hyperbolische, parabolische oder elliptische ist. Dabei sind die drei zweiten partiellen Ableitungen an der betreffenden Stelle von $f(x, y) = 0$ zu nehmen. Setzt man voraus, daß die Singularität nicht auf der Geraden LR liegt, so ist auf der linearen Kongruenz durch den ersten Fall (Doppelpunkt) ein Doppelregelstrahl gekennzeichnet. In ihm schneiden einander zwei verschiedene Schalen der Fläche, und für beide sind t_r, ω_r, t_z, ω_z von Null verschieden, falls sich an dieser Stelle nicht noch andere Singularitäten überlagern.

Durch den zweiten Fall (Spitze) wird der Rückkehrregelstrahl repräsentiert. Längs dieses Strahles berührt die Regelfläche sich selbst, und es ist $t_r = 0$, $\omega_r = 0$.

Im dritten Falle liegt ein isolierter Regelstrahl vor.

Durch einen Punkt auf der Geraden UR (Fig. 9, Punkt P_9) gehe ein Bogenelement ds, dessen Tangente mit dem Punkte L inzident ist. Der zugehörige Kongruenzstrahl liegt im Büschel paralleler Kongruenzstrahlen in der Ebene π_r (12). Zugleich ist er ein Torsalstrahl (15 a), weil der Nachbarregelstrahl ihn auf der Leitgeraden l schneidet. Gewöhnlich wird ein solcher Regelstrahl als Wendetorsalstrahl bezeichnet.

Weitere Singularitäten lassen sich aus den hier angeführten durch Überlagerung ableiten.

IV. Hüllflächen, deren Regelscharen in der linearen Kongruenz liegen.

16. Regelflächen, die eine stetige Folge einscharig in der linearen Kongruenz enthaltener Flächen zweiter Ordnung umhüllen, heißen „in der linearen Kongruenz enthaltene Hüllflächen". Im folgenden werden mehrere wichtige Arten solcher Hüllflächen behandelt.

Die für eine einscharig in der linearen Kongruenz enthaltene Fläche zweiter Ordnung polarinvarianten Hüllflächen.

Vorgelegt sei die elliptische lineare Kongruenz. Die hyperbolische denken wir uns durch imaginäre Kollineation in die elliptische Kongruenz verwandelt. Durch Deutung der Plückerschen Grundgleichung als Kugel und durch stereographische Projektion

dieser Kugel erhalten wir das ebene Bildfeld der linearen Kongruenz. Seine Fundamentalpunkte fallen in die unendlichfernen Kreispunkte. Ein gegebener Kreis k^2 ist das Bild einer einscharig in der linearen Kongruenz enthaltenen Fläche zweiter Ordnung K^2. Seine ∞^2 Orthogonalkreise repräsentieren die ∞^2 für K^2 polarinvarianten Flächen zweiter Ordnung der linearen Kongruenz.

Die durch eine Inversion in sich überführbaren Kurven hat Moutard [5]) behandelt und als „anallagmatische" Kurven bezeichnet. Sie werden hier „selbstinverse" Kurven genannt. Eine gegebene selbstinverse Kurve ist Hüllkurve von Orthogonalkreisen

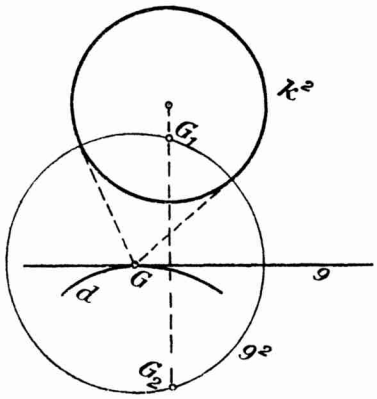

Fig. 10.

des Inversionskreises, und jede Hüllkurve von Orthogonalkreisen des Inversionskreises ist selbstinvers. Jeder Orthogonalkreis, der Hüllkreis ist, berührt die selbstinverse Kurve in zwei inversen Punkten. Die Mittelpunkte der Hüllkreise erfüllen eine Kurve, den Deferenten [6]). Eine selbstinverse Kurve ist durch ihren Deferenten und den Inversionskreis k^2 bestimmt. Sie ist folgendermaßen zu konstruieren (Fig. 10): Um einen gegebenen Punkt G des Deferenten gibt es zu k^2 einen Orthogonalkreis g^2. Es sei g die Tangente des Deferenten in G. Der zu g senkrechte Inversionsdurchmesser schneidet den Hüllkreis g^2 in zwei inversen Punkten G_1, G_2. Sie sind die Berührungspunkte des Hüllkreises g^2 mit der selbstinversen Kurve. Die Punkte des Deferenten werden dem unendlichfernen Elemente der Ebene durch die Hüllkreise invers zugeordnet.

Der Kreis k^2 repräsentiert eine einscharig in der Kongruenz enthaltene Fläche zweiter Ordnung K^2, die Hüllkreise stellen als Orthogonalkreise die für K^2 polarinvarianten einscharig in der Kongruenz enthaltenen Flächen zweiter Ordnung dar. Je zwei Berührungspunkte G_1, G_2 eines solchen Hüllkreises sind Bilder zweier reziprok polaren Strahlen im polaren Raume von K^2.

Aus der Konstruktion einer selbstinversen Kurve folgt für die mit ihren Regelscharen in der linearen Kongruenz C_1^1 enthaltenen Hüllflächen:

Im polaren Raume einer einscharig in der Kongruenz C_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung K^2 geht jede Hüllfläche der für K^2 polarinvarianten, einscharig in C_1^1 liegenden Flächen zweiter Ordnung in sich über. Die Regelstrahlen der Hüllfläche sind als reziproke Polare im polaren Raume von K^2 involutorisch gepaart. Umgekehrt ist jede für K^2 polarinvariante, mit ihrer Regelschar in der Kongruenz enthaltene Fläche die Hüllfläche von ∞^1 Flächen zweiter Ordnung; sie sind für K^2 polarinvariant.

---

[5]) Moutard, Sur la transformation par rayons vecteurs reciproques, Nouv. Ann. (2) **3** (1864), S. 306—309.

[6]) De la Gournerie, Memoire sur les lignes spiriques, Journ. de Math. (2) **14** (1869), S. 9—64, 103—138.

17. Die mit ihren Regelscharen in der Kongruenz enthaltene Regelfläche vierten Grades erster Art als Hüllfläche.

Wird in der Ebene ε als Deferent ein Kegelschnitt d^2 gewählt, so ist die selbstinverse Kurve eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung k^4; sie hat die Kreispunkte (Fundamentalpunkte L, R) zu Doppelpunkten. Nach Abschnitt I, Nr. 2 ist k^4 das Bild einer Regelschar vierter Ordnung erster Art K^4. Ebenso stellt der nicht mit den Fundamentalpunkten inzidente Deferent d^2 eine Regelschar vierter Ordnung erster Art D^4 dar. Sie geht mit zwei (reellen oder konjugiert imaginären) Schalen durch den Kongruenzstrahl a $(0:0:0:1)$. Die Hüllkreise der Kurve k^4 liegen als Orthogonalkreise des Inversionskreises in einem Kreisbündel (16). Jeder Hüllkreis ordnet dem unendlichfernen Elemente der Ebene seinen Mittelpunkt invers zu. Das unendlichferne Element der Ebene ist das Bild des Kongruenzstrahles a. Die Hüllkreise repräsentieren ∞^1 Regelscharen zweiter Ordnung der Kongruenz, umhüllt von der Regelschar vierter Ordnung erster Art K^4. Aus alledem folgt:

Eine mit ihrer Regelschar in der linearen Kongruenz enthaltene Regelfläche vierten Grades erster Art K^4 umhüllt ∞^1 Regelflächen zweiten Grades eines Bündels. Die Strahlen der Regelfläche vierten Grades sind paarweise reziproke Polaren für die Polarregelfläche des Bündels.

Die ∞^1 Hüllflächen zweiten Grades von K^4 ordnen dem herausgegriffenen Kongruenzstrahle a die Regelstrahlen einer Regelfläche vierten Grades erster Art D^4 zu. Hierbei sind die Regelstrahlen von D^4 die Polaren von a für jene ∞^1 Hüllflächen zweiten Grades.

Dies Theorem bleibt auch bestehen bei einer Parabel als Deferenten. Die selbstinverse Kurve ist in diesem Falle eine durch die Fundamentalpunkte je einfach hindurchgehende Kurve dritter Ordnung. Diese stellt wiederum eine Regelfläche vierten Grades erster Art dar.

Eine gegebene mit ihrer Regelschar in der elliptischen linearen Kongruenz enthaltene Regelfläche vierten Grades zweiter Art ist polarinvariant für vier einscharig in der Kongruenz enthaltene Flächen zweiten Grades.

V. Clairaut's Differentialgleichung und die lineare Kongruenz.

18. Die Differentialgleichung Clairaut's:

$$y = xy' + f(y')$$

mit differenzierbar stetiger Funktion $f(y')$ von y' hat bekanntlich

$$y = Cx + f(C)$$

zum allgemeinen Integral. In der dargestellten Geradenschar bedeutet der Scharparameter C den Anstieg der einzelnen Geraden (Fig. 11). Die Hüllkurve der Geradenschar ist durch das singuläre Integral der Differentialgleichung gegeben. Die Geraden der

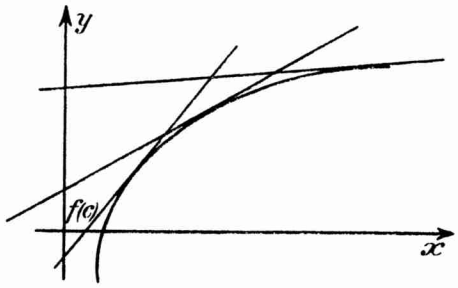

Fig. 11.

Bildebene sind aber die Bilder von ∞^2 durch einen herausgegriffenen Kongruenzstrahl a gehenden Regelscharen zweiter Ordnung der Kongruenz (2). Deshalb folgt für die lineare Kongruenz aus den Lösungen von Clairaut's Differentialgleichung das Theorem:

Die regulären Lösungen der Differentialgleichung Clairaut's werden dargestellt durch ∞^1 einscharig in der linearen Kongruenz enthaltene Regelflächen zweiten Grades. Sie gehen durch einen festen Kongruenzstrahl a und umhüllen eine mit ihrer Regelschar in der Kongruenz enthaltene (algebraische oder transzendente) Regelfläche. Diese Hüllfläche ist durch das singuläre Integral der Differentialgleichung gegeben.

VI. Die Differentialgleichung erster Ordnung und die lineare Kongruenz.

19. In der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

gewährleistet das auf die Lipschitz-Bedingung gegründete Existenztheorem, *eine* durch einen gegebenen Punkt gehende stetige Lösung mit stetiger erster Ableitung. Eine Stelle, an der die eine oder andere Voraussetzung des Existenztheorems nicht erfüllt ist, heißt eine singuläre Stelle des Feldes. Die homogene Differentialgleichung und die umfassendere Klasse der Differentialgleichungen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Ax + By + \delta(x, y)}{Cx + Dy + \varepsilon(x, y)} \qquad (\delta,\ \varepsilon \text{ Potenzreihenentwicklungen nach } x,\ y),$$

weisen bekanntlich vier Typen von singulären Stellen auf, nämlich: den Sattelpunkt mit zwei voneinander verschiedenen Lösungen, den Wirbelpunkt, der als isolierter Punkt von den Integralkurven umschlossen wird, den Strudelpunkt mit asymptotischem Verhalten der Integralkurven in seiner Umgebung und den Knotenpunkt, durch den ∞^1 Integralkurven verlaufen.

Die Untersuchungen des Abschnittes III lieferten die Bedeutung des Bogenelementes und des Krümmungskreises der Bildebene für die Geometrie auf der linearen Strahlenkongruenz und für die verschiedenen Typen von Regelstrahlen einer in der Kongruenz liegenden (algebraischen oder transzendenten) Regelschar. Infolgedessen findet die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung nicht nur auf der Ebene sondern jetzt auch auf der linearen Strahlenkongruenz ihre Deutung. Die Integralkurven stellen wohlbestimmte Systeme von Regelscharen dar, und die vier angeführten Typen von singulären Stellen der Ebene bestimmen auf der Kongruenz analoge Singularitäten. Es tritt aber bei dieser neuen Deutung der Differentialgleichungen das wichtige Moment hinzu, daß ein reguläres Bogenelement einer Integralkurve der Bildebene je nach seiner Lage zu deren singulären Fundamentalpunkten L, R einen gewöhnlichen Regelstrahl, einen Torsalstrahl, einen Wenderegelstrahl oder noch einen anderen Typus repräsentiert. Das in der Bildebene gewonnene Lösungssystem einer Differentialgleichung ist also bei der Übertragung auf die lineare Kongruenz noch in dieser Richtung zu diskutieren.

20. Unter diesem Gesichtspunkte werde die allgemeine Differentialgleichung erster Ordnung in impliziter Form betrachtet:

$$f(x, y, y') = 0.$$

Die singulären Elemente sind die den beiden Gleichungen $f = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$ genügenden Wertetripel x, y, y'. Durch Elimination von y' aus beiden Gleichungen ergibt sich die Diskriminantenkurve. Die Diskriminantenkurve ist überall da singuläre Lösung, wo

ihre Richtung mit der in ihren Punkten vorgeschriebenen Feldrichtung übereinstimmt. An allen anderen Stellen kann sie der Ort von singulären Punkten der regulären Integralkurven sein oder eine reguläre Lösung darstellen. Jede Hüllkurve einer Integralkurvenschar ist singuläre Lösung und als solche in der Diskriminantenkurve enthalten. Hieraus ergibt sich:

Die regulären Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung führen zu einem System $S(R)$ allgemeiner Regelscharen der linearen Kongruenz. Ist die Diskriminantenkurve in der Bildebene eine Hüllkurve der regulären Integralkurven, so repräsentiert sie die mit ihrer Regelschar in der Kongruenz enthaltene Hüllfläche der Regelscharen $S(R)$. Ist aber die Diskriminantenkurve in der Bildebene der Ort singulärer Punkte der Integralkurven, so wird auch die durch sie dargestellte Regelschar von den singulären Regelstrahlen jener Regelscharen $S(R)$ erfüllt.

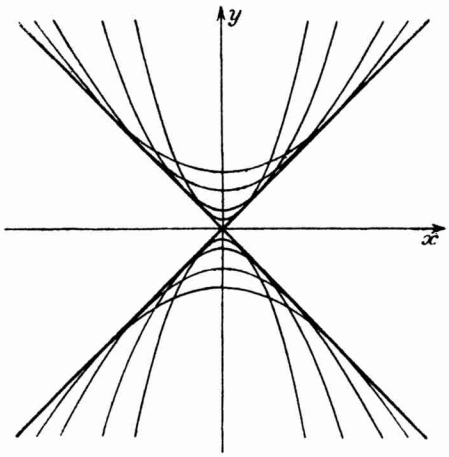

Fig. 12.

21. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$xy'^2 - 2yy' + x = 0$$

ist die Parabelschargleichung:

$$y = \frac{x^2}{2c} + \frac{c}{2} \qquad \text{(Fig. 12).}$$

Die Parabeln haben die y-Achse gemeinschaftlich zur Hauptachse und umhüllen die beiden Geraden $y = \pm x$ als zwei singuläre Integrale. Damit ist auch die Bedeutung der angegebenen Differentialgleichung für die Geometrie der hyperbolischen linearen Kongruenz erkennbar:

Die Lösungen der Differentialgleichung $xy'^2 - 2yy' + x = 0$ führen zu ∞^1 in der Kongruenz enthaltenen Regelscharen vierter Ordnung erster Art. Sie berühren einander längs eines Regelstrahls und haben einen zweiten Kongruenzstrahl a als Doppelregelstrahl gemein. Sie werden von zwei durch a gehenden Regelscharen zweiter Ordnung umhüllt.

Wird das Koordinatenkreuz der Ebene so gewählt, daß die eine der beiden Geraden $y = \pm x$ durch den einen Fundamentalpunkt L, die andere durch den Fundamentalpunkt R geht, so umhüllen die ∞^1 Regelscharen vierter Ordnung zwei Kongruenzstrahlenbüschel erster Ordnung. Die Ebenen a_1, a_2 der beiden Büschel schneiden einander in dem gemeinsamen Doppelregelstrahl a der Regelscharen vierter Ordnung. Jede Regelschar vierter Ordnung berührt a_1 und a_2 je in einem Kongruenzstrahle, mit anderen Worten: Die beiden einhüllenden Ebenen sind gemeinsame Torsalebenen der Träger-

flächen jener Regelscharen vierter Ordnung, und jede der beiden Ebenen enthält einen Torsalstrahl jeder Regelschar.

Dieser Sonderfall kann durch keine Kollineation der linearen Kongruenz in sich auf den vorhin angegebenen allgemeinen Fall der Lösung zurückgeführt werden.

Die Differentialgleichung:

$$64\,xy'^2 - (9\,x - \alpha)^2 = 0$$

hat als reguläre Integralkurven die rationalen Kurven dritter Ordnung:

$$4y = (3x - \alpha)\sqrt{x} - c \qquad \text{(Fig. 13).}$$

Die Gerade $x = \frac{\alpha}{3}$ ist der Ort der Doppelpunkte dieser Kurven. Die Gerade $x = 0$ ist ihre Hüllkurve und die singuläre Lösung. Die Gerade $x = \frac{\alpha}{9}$ ist der Ort gegenseitiger Berührung je zweier Integralkurven. Für die lineare Kongruenz folgt hieraus:

Die Differentialgleichung $64\,xy'^2 - (9\,x - \alpha)^2 = 0$ *bestimmt durch ihre regulären Integrale* ∞^1 *Regelscharen sechster Ordnung der linearen Kongruenz. Die Regelscharen haben alle denselben Kongruenzstrahl a zum dreifachen Regelstrahl. Jede von ihnen hat*

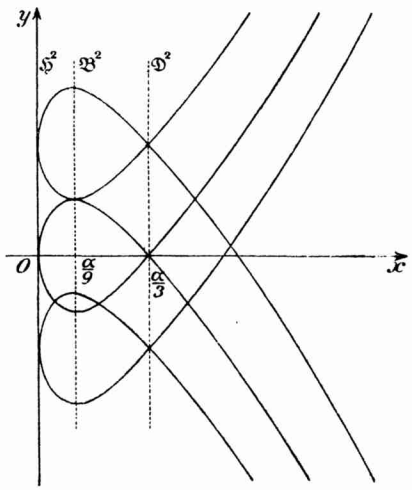

Fig. 13.

außerdem einen Doppelregelstrahl. Die Doppelregelstrahlen erfüllen eine Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{D}^2$. *Die* ∞^1 *Regelscharen sechster Ordnung werden von einer Regelschar zweiter Ordnung* $\mathfrak{H}^2$ *umhüllt. Je zwei von ihnen berühren einander in einem Kongruenzstrahle. Die* ∞^1 *Berührungsstrahlen erfüllen eine Regelschar zweiter Ordnung* $\mathfrak{B}^2$. *Die drei Regelscharen zweiter Ordnung* $\mathfrak{D}^2$, $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{H}^2$ *gehen durch den dreifachen Strahl a und durch einen zweiten gemeinsamen Kongruenzstrahl, liegen also in einem Büschel.*

Eingegangen 10. Januar 1935.