Die Geometrie des linearen Strahlenkomplexes
gegründet auf seine Polarentheorie.

Von *G. Haenzel* in Karlsruhe.

In der Geometrie des Strahlenraumes spielt der lineare Strahlenkomplex eine ähnliche Rolle wie die Fläche zweiter Ordnung und Klasse in der Geometrie des Punkte- und Ebenenraumes. Daraus ergibt sich die Frage nach der Existenz einer durch den linearen Strahlenkomplex bestimmten polaren Korrelation, die der polaren Korrelation der Fläche zweiter Ordnung und Klasse im Punkte- und Ebenenraum entspricht. Vielfach glaubt man im Nullraume des linearen Strahlenkomplexes die Analogie zum polaren Raume der Fläche zweiter Ordnung zu sehen. Diese Auffassung ist unberechtigt. Einmal ist der lineare Strahlenkomplex nicht das Inzidenzgebilde seines Nullraumes in dem Sinne wie die Fläche zweiter Ordnung die Inzidenzfläche ihres polaren Raumes darstellt; außerdem werden im Nullraume Punkt und Ebene als Elemente einander zugeordnet, während doch in einer polaren Korrelation der Strahlengeometrie nur Strahlengebilde als Pol und Polargebilde einander gegenübertreten müßten. Deutet man endlich die Linienkoordinaten als Punkte eines Hyperraumes, so erscheint die Korrelation des Nullraumes überhaupt als involutorische Perspektivität in diesem Hyperraume. Nun bedingt der lineare Strahlenkomplex wirklich eine polare Korrelation im Strahlenraume, und zwar als ihr Inzidenzgebilde. Die Grundlagen dieser Polarität werden im folgenden zuerst entwickelt.

In den weiteren Abschnitten kommt eine Abbildung des linearen Strahlenkomplexes auf den dreidimensionalen Punkteraum zur Anwendung, auf die zuerst M. Noether[1]) algebraisch hingewiesen hat. Sie wurde später von S. Lie sowie von F. Klein zur Formulierung und zum Beweise mancher liniengeometrischen Theoreme benutzt. Die Noethersche Abbildung liefert nicht nur eine Isomorphie zu der in unserem ersten Abschnitt abgeleiteten Polarentheorie, sondern ihre weitere Ausgestaltung ermöglicht eine einfache Darstellung bekannter und neuer Theoreme über die Geometrie der im linearen Strahlenkomplexe enthaltenen Strahlenkongruenzen und Regelscharen. Im Anschluß an die aufgestellte Polarentheorie des linearen Komplexes ergibt sich die bisher unbekannte Theorie seiner Involutionen und seiner involutorisch selbstgescharten Kongruenzen und Regelscharen. Eine weitere Arbeit über die Geometrie des linearen Komplexes soll sich hier anschließen.

I. Die Polarentheorie des linearen Strahlenkomplexes.

1. Ausgehend von den Plückerschen Linienkoordinaten

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i \qquad (i, k = 1, \ldots, 4)$$

[1]) M. Noether, Zur Theorie der algebraischen Funktionen mehrerer komplexen Variablen, Nachr. d. Kgl. Ges d. Wissenschaften zu Göttingen 1869, Nr. 15.

einer gegebenen Geraden XY werden durch die linearen Substitutionen

$$\varrho p_1 = p_{12} + p_{34}, \qquad \varrho p_3 = (p_{13} + p_{42}), \qquad \varrho p_5 = (p_{14} - p_{23}),$$
$$\varrho p_2 = i(p_{34} - p_{12}), \qquad \varrho p_4 = i(p_{42} - p_{13}), \qquad \varrho p_6 = (p_{14} + p_{23})$$

die sechs neuen Linienkoordiaten $p_i (i = 1, \ldots, 6)$ eingeführt. Die Plückersche Fundamentalrelation zwischen den Linienkoordinaten hat dann die Form:

$$P^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - p_5^2 + p_6^2 = 0\,.$$

Die Invariante eines gegebenen linearen Strahlenkomplexes mit der Gleichung $\Sigma_1^6 a_i p_i = 0$ schreibt sich:

$$(\alpha)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 + a_6^2\,.$$

Die simultane Invariante zweier linearen Strahlenkomplexe mit den Gleichungen $\Sigma a_i p_i = 0$ und $\Sigma b_i p_i = 0$ lautet:

$$(\alpha\beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 - a_5 b_5 + a_6 b_6\,.$$

Die sechs Gleichungen

$$p_i = 0 \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

stellen sechs Fundamentalkomplexe[2]) dar, deren ursprüngliche Gleichungen aus den obigen Substitutionen folgen. Jeder von ihnen ist für die fünf übrigen nullinvariant. Je vier Fundamentalkomplexe haben zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) windschiefe Strahlen gemein, die Leitgeraden der Schnittkongruenz der beiden übrigen Fundamentalkomplexe. So gehen die vier linearen Strahlenkomplexe mit den Gleichungen

$$p_i = 0 \qquad\qquad (i = 1, \ldots, 4)$$

durch die Geraden

$$u: \qquad x_1 = x_4 = 0$$

und

$$v: \qquad x_2 = x_3 = 0\,.$$

Die lineare Strahlenkongruenz C_v^u mit den Leitgeraden u, v ist dargestellt durch

$$p_{14} = p_{23} = 0 \text{ oder durch } p_5 = p_6 = 0\,.$$

Ein gegebener linearer Strahlenkomplex kann bei geeigneter Wahl des Koordinatentetraeders stets durch

$$p_6 = p_{14} + p_{23} = 0$$

wiedergegeben werden.

2. Der gegebene lineare Strahlenkomplex Γ mit der Gleichung $p_6 = 0$ enthält ∞^4 lineare Kongruenzen; sie bilden eine lineare Mannigfaltigkeit vierter Stufe, den C_1^1-*Raum* des Komplexes Γ. Für den Komplex Γ sind ∞^4 lineare Strahlenkomplexe nullinvariant; sie bilden gleichfalls eine lineare Mannigfaltigkeit vierter Stufe, den Γ_0-*Raum* des Komplexes Γ. Die Gleichung

$$\Sigma_1^5 \lambda_i p_i = 0$$

zwischen den Linienkoordinaten und den Parametern λ_i hat unter diesen Umständen eine doppelte geometrische Bedeutung: Für jedes Verhältnis der λ_i stellt sie eine in Γ enthaltene lineare Strahlenkongruenz und einen für Γ nullinvarianten linearen Komplex dar. Dabei geht dieser Komplex immer durch jene Kongruenz. Die obige Gleichung kennzeichnet also gleichzeitig das Element des C_1^1-Raumes und das Element des Γ_0-Raumes

[2]) F. Klein, Zur Theorie der Linienkomplexe des ersten und zweiten Grades, Math. Annalen 2 (1870).

des linearen Komplexes Γ. Beide Räume sind zueinander perspektiv. Der C_1^1-Raum enthält ∞^4 hyperbolische und ∞^4 elliptische lineare Kongruenzen; ihre Leitgeraden sind je zwei im Nullraume von Γ einander zugeordnete Strahlen. Der C_1^1-Raum enthält ∞^3 parabolische lineare Kongruenzen, deren je vereinigte Leitgeraden mit je einem Komplexstrahle von Γ zusammenfallen. Die Parameterwerte λ_i der parabolischen Kongruenzen unterliegen der Bedingungsgleichung:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 - \lambda_5^2 = 0 .$$

Gleichzeitig kennzeichnet diese Gleichung im Γ_0-Raum von Γ die ∞^3 speziellen linearen Komplexe, deren Achsen die Leitgeraden jener ∞^3 parabolischen Kongruenzen sind.

Zwei lineare Komplexe des Γ_0-Raumes und die beiden mit ihnen inzidenten linearen Kongruenzen des C_1^1-Raumes von Γ mit den Gleichungen $\Sigma_1^5 a_i p_i = 0$, $\Sigma_1^5 b_i p_i = 0$ haben die Invarianten $(\alpha)^2, (\beta)^2$ und die simultane Invariante $(\alpha\beta)$ (Nr. **1**). Jene werden durch einen Büschel linearer Komplexe, diese durch einen Büschel linearer Kongruenzen verbunden; beide Büschel sind zueinander perspektiv und werden mittels eines Parameters $\varkappa$ dargestellt durch:

$$\Sigma_1^5 (a_i + \varkappa b_i) p_i = 0 , \qquad -\infty < \varkappa < +\infty .$$

Die Parameterwerte $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ der beiden speziellen Komplexe des Komplexbüschels und der beiden parabolischen Kongruenzen des Kongruenzbüschels sind die Wurzeln der Gleichung:

$$(\alpha)^2 \varkappa^2 + 2(\alpha\beta)\varkappa + (\beta)^2 = 0 .$$

Die Komplexe des Komplexbüschels und die Kongruenzen des Kongruenzbüschels haben eine und dieselbe (reelle oder imaginäre) Regelschar zweiter Ordnung gemein, bestehend aus Komplexstrahlen des linearen Komplexes Γ.

Drei lineare Kongruenzen des C_1^1-Raumes, die nicht in einem Kongruenzbüschel liegen, bestimmen einen Kongruenzbündel des C_1^1-Raumes, die mit ihnen inzidenten drei linearen Komplexe des Γ_0-Raumes bedingen in diesem einen Komplexbündel. Die linearen Kongruenzen des Kongruenzbündels und die linearen Komplexe des Komplexbündels haben zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Komplexstrahlen von Γ gemein. Vier unabhängige lineare Komplexe des Γ_0-Raumes werden durch ein Komplexgesbüsch verbunden, die vier mit ihnen inzidenten linearen Kongruenzen durch ein Kongruenzgebüsch.

3. Der gegebene lineare Komplex Γ bedingt sowohl in seinem C_1^1-Raume als auch in seinem Γ_0-Raume je eine polare Korrelation. Sind $\Sigma \lambda_i p_i = 0$ und $\Sigma \lambda'_i p_i = 0$ die Gleichungen zweier linearen Kongruenzen C_λ, C'_λ des C_1^1-Raumes und damit auch die Gleichungen der mit ihnen inzidenten linearen Komplexe Γ_λ, Γ'_λ des Γ_0-Raumes, so hat die bilineare Bedingung

$$\lambda_1\lambda'_1 + \lambda_2\lambda'_2 + \lambda_3\lambda'_3 + \lambda_4\lambda'_4 - \lambda_5\lambda'_5 = 0$$

einen doppelten geometrischen Ursprung:

Von den beiden linearen Kongruenzen C_λ, C'_λ geht jede im geschart involutorischen Raume der anderen in sich über. Die beiden linearen Komplexe Γ_λ, Γ'_λ sind füreinander nullinvariant, jeder von ihnen geht im Nullraume des anderen in sich über. Die beiden Leitgeraden jeder der beiden Kongruenzen sind je im geschart involutorischen Raume der anderen einander zugeordnet. Die beiden Kongruenzen haben eine (reelle oder imaginäre) Regelschar zweiter Ordnung gemein, bestehend aus Komplex-

strahlen von Γ. Die beiden Leitgeradenpaare der Kongruenzen sind daher vier Leitstrahlen dieser Regelschar. Werden die beiden linearen Kongruenzen C_λ, C'_λ als *konjugierte Kongruenzen* des C_1^1-Raumes bezeichnet, die beiden linearen Komplexe Γ_λ, Γ'_λ als *konjugierte Komplexe* des Γ_0-Raumes, so folgt:

Einer gegebenen linearen Kongruenz C_λ des C_1^1-Raumes sind die ∞^3 linearen Kongruenzen eines Kongruenzgebüsches konjugiert. Aus der Gleichung von C_λ:

Einem gegebenen linearen Komplexe Γ_λ des Γ_0-Raumes sind die ∞^3 linearen Komplexe eines Komplexgebüsches konjugiert. Aus der Gleichung von Γ_λ:

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4 + a_5 p_5 = 0$$

folgt die Gleichung

des Gebüsches der konjugierten Kongruenzen:

des Gebüsches der konjugierten Komplexe:

$$\lambda_1(a_5 p_1 + a_1 p_5) + \lambda_2(a_5 p_2 + a_2 p_5) + \lambda_3(a_5 p_3 + a_3 p_5) + \lambda_4(a_5 p_4 + a_4 p_5) = 0$$

oder:

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_1^4 \lambda_i p_i & -p_5 \\ \sum\limits_1^4 \lambda_i a_i & a_5 \end{vmatrix} = 0.$$

Die linearen Kongruenzen und die zugehörigen Gebüsche konjugierter Kongruenzen sind als *Polkongruenzen* und *Polarkongruenzgebüsche* im polaren C_1^1-Raume des linearen Komplexes Γ einander zugeordnet, die linearen Komplexe und die zugehörigen Gebüsche konjugierter Komplexe als *Polkomplexe* und *Polarkomplexgebüsche* im polaren Γ_0-Raume von Γ.

Ist die gegebene lineare Kongruenz C_a parabolisch, der mit ihr inzidente lineare Komplex also ein spezieller Komplex (Nr. 2), so gilt:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 = 0\,.$$

In Worten:

Das Polarkongruenzgebüsch einer parabolischen Kongruenz C_a geht durch seine Polkongruenz C_a.

Das Polarkomplexgebüsch eines speziellen Komplexes Γ_a geht durch seinen Polkomplex Γ_a.

Der lineare Komplex Γ besteht aber aus den Leitgeraden der parabolischen Kongruenzen (Nr. 2) seines polaren C_1^1-Raumes und ebenso aus den Achsen der speziellen Komplexe seines Γ_0-Raumes, er ist daher das Inzidenzgebilde seines polaren C_1^1-Raumes und seines polaren Γ_0-Raumes.

4. Zwei lineare Kongruenzen des C_1^1-Raumes werden durch einen Büschel solcher Kongruenzen verbunden. Den ∞^1 Kongruenzen des Büschels sind die ∞^2 linearen Kongruenzen seines *Polarkongruenzbündels* im polaren C_1^1-Raume konjugiert. Aus der Gleichung des Kongruenzbüschels:

Zwei lineare Komplexe des Γ_0-Raumes werden durch einen Büschel solcher Komplexe verbunden. Den ∞^1 Komplexen des Büschels sind die ∞^2 linearen Komplexe seines *Polarkomplexbündels* im polaren Γ_0-Raume konjugiert. Aus der Gleichung des Komplexbüschels:

$$\sum_1^5 (a_i + \varkappa b_i)\, p_i = 0, \qquad -\infty < \varkappa < +\infty\,,$$

folgt mit Hilfe der beiden Beziehungen

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 + a_4\lambda_4 - a_5\lambda_5 = 0\,,$$
$$b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3 + b_4\lambda_4 - b_5\lambda_5 = 0$$

die Gleichung des zugeordneten

Polarkongruenzbündels: | Polarkomplexbündels:

$$\lambda_1 \begin{vmatrix} p_1 & p_4 & -p_5 \\ a_1 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_4 & b_5 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} p_2 & p_4 & -p_5 \\ a_2 & a_4 & a_5 \\ b_2 & b_4 & b_5 \end{vmatrix} + \lambda_3 \begin{vmatrix} p_3 & p_4 & -p_5 \\ a_3 & a_4 & a_5 \\ b_3 & b_4 & b_5 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_1^3 \lambda_i p_i & p_4 & -p_5 \\ \sum\limits_1^3 \lambda_i a_i & a_4 & a_5 \\ \sum\limits_1^3 \lambda_i b_i & b_4 & b_5 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Die Kongruenzen des Kongruenzbüschels und die Komplexe des Komplexbüschels gehen durch ein und dieselbe in Γ enthaltene Regelschar zweiter Ordnung. Die Strahlen dieser Regelschar sind sowohl die Leitgeraden der ∞^1 parabolischen Kongruenzen des Polarkongruenzbündels, als auch die Hauptachsen der ∞^1 speziellen Komplexe des Polarkomplexbündels.

II. Die Noethersche Abbildung.

5. Ist $\Gamma = 0$ die Gleichung eines gegebenen linearen Strahlenkomplexes Γ, so läßt sich mit ihrer Hilfe eine der Plückerschen Linienkoordinaten aus der quadratischen Plückerschen Fundamentalrelation $P^2 = 0$ (Nr. **1**) eliminieren. Die ∞^3 Strahlen des linearen Strahlenkomplexes erscheinen dann als die ∞^3 Punkte der Hyperfläche zweiter Ordnung P^2 im vierdimensionalen Raume. Ein ausgewählter Punkt A der Hyperfläche entspricht einem Komplexstrahle a. Die stereographische Projektion aus A in den diametralen dreidimensionalen Tangentialraum bildet die ∞^3 Komplexstrahlen auf die ∞^3 Punkte dieses dreidimensionalen Raumes ab. Dabei sind im dreidimensionalen Bildraume eine reelle Ebene ε und ein in ihr liegender (imaginärer oder reeller) Kegelschnitt k^2 als Fundamentalgebilde ausgezeichnet, sodaß sich die liniengeometrischen Theoreme auf einen Bildraum mit euklidischer oder pseudoeuklidischer Metrik beziehen lassen. Hat — wie in Nr. **1** — die Fundamentalrelation $P^2 = 0$ die Form

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - p_5^2 + p_6^2 = 0\,,$$

und ist $p_6 = 0$ die Gleichung des linearen Komplexes Γ, so wird nach Anfügen der stereographischen Projektion die Abbildung in rechtwinkligen Koordinaten wiedergegeben durch:

$$\varrho p_1 = 4x, \quad \varrho p_2 = 4y, \quad \varrho p_3 = 4z, \quad \varrho p_4 = x^2 + y^2 + z^2 - 4, \quad \varrho p_5 = x^2 + y^2 + z^2 + 4\,.$$

Eine gegebene lineare Kongruenz des Komplexes

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 + \lambda_4 p_4 + \lambda_5 p_5 = 0$$

geht über in die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{4}{\lambda_4 + \lambda_5}(\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z - \lambda_4 + \lambda_5) = 0\,.$$

Werden in der Kugelgleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) + \delta = 0$$

die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \varrho, \delta$ als Kugelkoordinaten benutzt, wobei für den Radius ϱ die Gleichung $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \varrho^2 - \delta = 0$ gilt, so folgt:

$$\alpha = \frac{-2\lambda_1}{\lambda_4 + \lambda_5}, \quad \beta = \frac{-2\lambda_2}{\lambda_4 + \lambda_5}, \quad \gamma = \frac{-2\lambda_3}{\lambda_4 + \lambda_5}, \quad \varrho = \frac{2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 - \lambda_5^2}}{\lambda_4 + \lambda_5},$$

$$\delta = -\frac{4(\lambda_4 - \lambda_5)}{\lambda_4 + \lambda_5}.$$

Die parabolischen linearen Kongruenzen werden auf die Nullkugeln abgebildet. Die Orthogonalitätsbedingung zweier Kugeln $K(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varrho)$ und $K'(\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varrho')$, nämlich

$$2(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') - (\delta + \delta') = 0,$$

geht über in

$$\lambda_1\lambda_1' + \lambda_2\lambda_2' + \lambda_3\lambda_3' + \lambda_4\lambda_4' - \lambda_5\lambda_5' = 0.$$

Zwei einander senkrecht schneidende Kugeln entsprechen konjugierten linearen Kongruenzen im polaren C_1^1-Raume des Komplexes Γ. Eine Kugel und ihre Kreise gehen aus einer linearen Strahlenkongruenz und ihren Regelscharen zweiter Ordnung hervor. Die Polarentheorie des linearen Komplexes (Abschnitt I) mit ihren Begriffen Polkongruenz — Polarkongruenzgebüsch, Kongruenzbüschel — Polarkongruenzbündel usf. steht der Theorie der orthogonalen Kugeln gegenüber. Insbesondere entspricht dabei der durch eine lineare Kongruenz bedingten gescharten Involution die Inversion an einer Kugel.

6. Ein Strahlenkomplex n-ten Grades Γ_n schneidet den linearen Komplex Γ in einer Kongruenz C_n^n vom Bündel- und Feldgrade n. Sie erscheint im Punkteraum als algebraische Fläche $2n$-ter Ordnung mit dem fundamentalen Kegelschnitt k^2 als n-fache Kurve. Der Strahlenkomplex Γ_n darf dabei nicht durch den Strahl a gehen, der das Zentrum der stereographischen Projektion abgibt. Zwei Strahlenkomplexe Γ_m, Γ_n der Ordnungen m und n schneiden zwei Kongruenzen C_m^m, C_n^n in den linearen Komplex, und diese beiden Kongruenzen haben eine Regelschar $\mathfrak{R}^{2mn}$ von der Ordnung $2mn$ gemein. Die Bilder der beiden Kongruenzen C_m^m, C_n^n sind zwei Flächen von den Ordnungen $2m$, $2n$. Sie enthalten den fundamentalen Kegelschnitt als m- bzw. als n-fache Kurve und durchdringen einander außerdem in einer algebraischen Raumkurve von der Ordnung $2mn$, dem Bilde der Regelschar $\mathfrak{R}^{2mn}$.

7. In der Noetherschen Abbildung repräsentieren (Fig. 1) die ∞^3 Unisekanten s des fundamentalen Kegelschnittes k^2 (die Minimalgeraden der zugehörigen Metrik) die ∞^3 Strahlenbüschel erster Ordnung des linearen Komplexes Γ. Von den ∞^3 Komplexstrahlenbüscheln liegt einer in der unendlichfernen Ebene, sein Mittelpunkt ist der unendlichferne Punkt der Komplexhauptachse. Von den ∞^3 mit dem fundamentalen Kegelschnitt inzidenten Strahlen soll nunmehr ein Strahl u als Bild dieses unendlichfernen Komplexstrahlenbüschels in der Noetherschen Abbildung ausgezeichnet werden (Fig. 1). Eine gegebene Fläche zweiter Ordnung durch den fundamentalen Kegelschnitt k^2 schneidet u in einem nicht auf k^2 liegenden Punkt S_u. Die Fläche zweiter Ordnung repräsentiert eine lineare Kongruenz und der Punkt S_u den unendlichfernen Strahl s_∞ dieser Kongruenz. Der lineare Komplex enthält ∞^2 Parallelstrahlenbüschel, je ∞^1 von ihnen gehen durch denselben unendlichfernen Komplexstrahl s und ihre Mittelpunkte erfüllen diesen Strahl. Im Bildraume entsprechen den ∞^2 Parallelstrahlenbüscheln die ∞^2 mit dem

fundamentalen Kegelschnitte und mit u inzidenten Geraden p. Je ∞^1 von ihnen gehen durch denselben Punkt S_u von u, erfüllen also einen Strahlenkegel zweiter Ordnung.

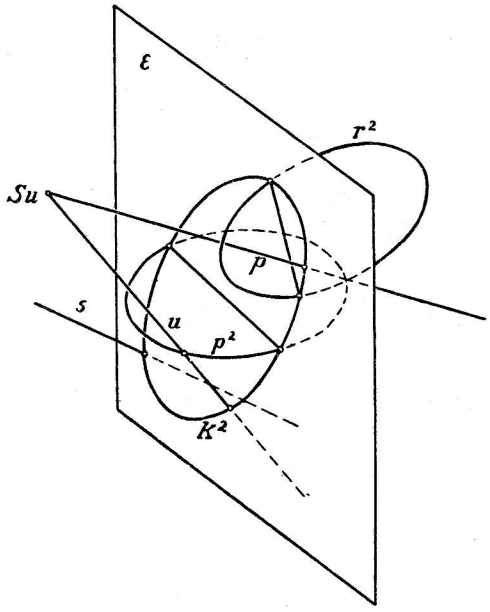

Fig. 1.

Eine Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$ des linearen Strahlenkomplexes bildet sich in einen zwei Punkte des fundamentalen Kegelschnittes enthaltenden Kegelschnitt r^2 ab. Eine parabolische Regelschar $\mathfrak{P}^2$ des Komplexes ist nunmehr dadurch ausgezeichnet, daß der entsprechende Kegelschnitt p^2 außerdem die Gerade u in einem Punkte schneidet.

III. Differentialgeometrische Eigenschaften der im linearen Strahlenkomplexe enthaltenen Regelscharen.

8. Eine gegebene Regelschar des linearen Komplexes wird durch die (erweiterte) Noethersche Abbildung in eine Raumkurve verwandelt, und es wird ein Raumkurvenpunkt P, seine Tangente t, sein Schmiegungskreis h^2 und seine Schmiegungskugel H^2 ins Auge gefaßt. Jedoch sind die Ausdrücke Schmiegungskreis und Schmiegungskugel wieder auf die Metrik des Bildraumes mit dem Kegelschnitt k^2 als Fundamentalgebilde zu beziehen. Die Schmiegungskugel des Raumkurvenpunktes P repräsentiert die lineare Schmiegungskongruenz der Regelfläche längs des Komplexstrahles p. Diese hat mit der Regelfläche vier benachbarte Strahlen gemein und schmiegt sich ihr näher an als alle übrigen linearen Kongruenzen. Im Schmiegungskreise erkennen wir die im linearen Komplexe enthaltene Regelschar des längs p oskulierenden Hyperboloides wieder.

9. Die vorhergehenden Betrachtungen ermöglichen eine besonders einfache Ableitung der wichtigsten speziellen Typen von Regelstrahlen der im linearen Komplexe enthaltenen Regelscharen.

a) *Der Torsalstrahl.*

Das Bogenelement ds einer Raumkurve im Bildraume sende seine Tangente t durch einen Punkt des fundamentalen Kegelschnittes k^2. Die Raumkurve stellt eine mit ihrer Regelschar im linearen Komplexe enthaltene Regelfläche dar, der Berührungspunkt P aber repräsentiert einen Torsalstrahl der Regelfläche. Er schneidet seinen Nachbarregelstrahl, denn er liegt mit ihm in einem Strahlenbüschel erster Ordnung, dargestellt durch die Tangente t.

b) *Der Torsalstrahl höherer Ordnung.*

Berührt im Element ds die Tangente t n-fach, so liegt ein Torsalstrahl $(n-1)$-ter Ordnung erster Art vor. Es sind n benachbarte Regelstrahlen miteinander inzident. — Konstruiert man in der Umgebung des Raumkurvenpunktes P die Tangentenfläche der Raumkurve, so mag die Tangentenfläche den fundamentalen Kegelschnitt von n-ter Ordnung berühren. Die in der Raumkurve abgebildete Regelfläche hat dann an der Stelle p einen Torsalstrahl $(n-1)$-ter Ordnung zweiter Art. Von n aufeinander folgenden Regelstrahlen schneidet jeder nur den folgenden, aber nicht den übernächsten.

c) *Der zylindrische Regelstrahl.*

Das Bogenelement der Raumkurve sende seine Tangente durch einen Punkt des fundamentalen Kegelschnittes k^2 und außerdem durch einen Punkt der Geraden u. Der durch den Berührungspunkt P dargestellte Regelstrahl liegt mit dem Nachbarregelstrahl in einem Parallelstrahlenbüschel erster Ordnung von Komplexstrahlen (7).

d) *Der Scheitelregelstrahl.*

Das oskulierende Hyperboloid der Regelfläche an der betrachteten Stelle ist durch den Kegelschnitt dargestellt, der die Bildkurve oskuliert und durch die beiden fundamentalen Punkte der Schmiegungsebene hindurchgeht (8). Bei Hyperoskulation dieses Kegelschnittes heißt der dargestellte Regelstrahl ein Scheitelregelstrahl.

e) *Der Wenderegelstrahl.*

Geht der oskulierende Kegelschnitt nicht nur durch die beiden Fundamentalpunkte der Schmiegungsebene, sondern trifft er die Gerade u noch in einem Punkte, so ist die durch den oskulierenden Kegelschnitt dargestellte oskulierende Regelfläche zweiter Ordnung ein Strahlenparaboloid (7). Der betrachtete Punkt der Raumkurve repräsentiert einen Wenderegelstrahl.

f) Der mehrfache Regelstrahl.

Ein Knotenpunkt, eine Spitze oder ein isolierter Punkt der Raumkurve im Bildraume sind bzw. die Bilder des mehrfachen Regelstrahles, des Rückkehrregelstrahles oder des isolierten Regelstrahles der Regelschar im linearen Strahlenkomplex.

Es lassen sich noch weitere spezielle Typen von Regelstrahlen auf diesem Wege charakterisieren und aus den angegebenen Typen können Singularitäten höherer Ordnung durch gegenseitige Überlagerung abgeleitet werden. Eine abwickelbare Regelschar des linearen Komplexes besteht aus Torsalstrahlen. Die Tangentenfläche ihrer Bildkurve geht daher durch den fundamentalen Kegelschnitt k^2. Den abwickelbaren Regelscharen entsprechen also die Minimalkurven des Bildraumes.

IV. Die Involutionen im linearen Strahlenkomplexe.

10. Die ∞^3 Strahlen eines linearen Strahlenkomplexes sind bekanntlich involutorisch gepaart

a) im Nullraume eines gegebenen für Γ nullinvarianten linearen Strahlenkomplexes Γ'.

b) im geschart involutorischen Raume einer gegebenen im linearen Strahlenkomplexe Γ enthaltenen linearen Strahlenkongruenz C_1^1.

c) im polaren Raume einer gegebenen einscharig im linearen Strahlenkomplexe Γ enthaltenen Regelfläche zweiten Grades R^2.

Trotz dieser dreifachen Möglichkeit sind nur zwei verschiedene Arten von Involutionen im linearen Strahlenkomplexe zu unterscheiden, denn die Fälle a) und b) führen auf dieselben Involutionen.

Die linearen Strahlenkomplexe Γ und Γ' seien füreinander nullinvariant. Dann ist im Nullraume von Γ' einem gegebenen Komplexstrahle s von Γ ein zweiter Komplexstrahl s_1 von Γ als konjugierter Strahl involutorisch zugeordnet; gehört der Strahl s_1 auch dem Komplexe Γ' an, so fällt er mit s zusammen. Die durch den Nullraum von Γ' hervorgerufene Involution im Komplexe Γ hat also ∞^2 Doppelstrahlen; sie erfüllen eine lineare Strahlenkongruenz C_1^1, die Schnittkongruenz der linearen Komplexe Γ und Γ'.

Die füreinander nullinvarianten Komplexe Γ, Γ' weisen einer gegebenen Ebene π zwei Nullpunkte P, P_1 zu, die auf einem gemeinsamen Komplexstrahle g liegen. Die Punkte P, P_1 sind homologe Punkte im geschart involutorischen Raume der linearen Kongruenz C_1^1, erfüllt von allen gemeinsamen Komplexstrahlen. Sind nähmlich wieder s, s_1 zwei im Nullraume von Γ' konjugierte Komplexstrahlen von Γ und g ein mit s und s_1 inzidenter gemeinsamer Strahl beider Komplexe, so ist der Ebene $sg = \pi$ als Nullpunkt zugeordnet

$$\begin{array}{lll} \text{durch } \Gamma & \text{der Punkt} & s\,g = P\,, \\ \text{,,} \quad \Gamma' & \text{,,} \quad \text{,,} & s_1 g = P_1\,. \end{array}$$

Zugleich ist der Ebene $s_1 g = \pi_1$ als Nullpunkt zugeordnet

$$\begin{array}{lll} \text{durch } \Gamma' & \text{der Punkt} & s\,g = P\,. \\ \text{,,} \quad \Gamma & \text{,,} \quad \text{,,} & s_1 g = P_1\,. \end{array}$$

Die Punkte P, P_1 und ebenso die Ebenen π, π_1 sind einander also involutorisch zugeordnet, und diese Involution ist geschart involutorisch, weil konjugierte Punkte P, P_1 auf einem gemeinsamen Strahle g der beiden Komplexe liegen und konjugierte Ebenen π, π_1 durch einen solchen Strahl gehen.

Die mit s und mit s_1 inzidenten gemeinsamen Strahlen beider linearen Komplexe liegen in der linearen Kongruenz C_1^1 und erfüllen daher eine Regelschar zweiter Ordnung. Wenn der gemeinsame Komplexstrahl g diese Regelschar durchläuft, so beschreiben die konjugierten Punkte P, P_1 des geschart involutorischen Raumes die Strahlen s, s_1. Die Komplexstrahlen s, s_1 des linearen Komplexes Γ sind also nicht nur konjugierte Strahlen im Nullraume des linearen Komplexes Γ', sondern auch konjugierte Strahlen im geschart involutorischen Raume der linearen Kongruenz C_1^1. Hiernach gilt:

Eine Involution erster Art im linearen Strahlenkomplexe ist bedingt durch den Nullraum eines für Γ nullinvarianten linearen Strahlenkomplexes Γ' und zugleich durch den geschart involutorischen Raum der den beiden Komplexen Γ und Γ' gemeinsamen linearen Kongruenz C_1^1. Konjugierte Strahlen der Involution erster Art sind sowohl im Nullraume von Γ' als auch im geschart involutorischen Raume von C_1^1 einander zugeordnet. Die Involution hat die ∞^2 Strahlen der linearen Kongruenz C_1^1 zu Doppelstrahlen.

Die zweifache Bestimmung der Involution erster Art erscheint selbstverständlich, wenn bedacht wird, daß die Polarentheorie des linearen Strahlenkomplexes Γ (Abschnitt I) zwei verschiedene Formen annimmt, je nachdem der Γ_0-Raum der ∞^4 für Γ nullinvarianten linearen Komplexe oder der C_1^1-Raum der ∞^4 in Γ enthaltenen linearen Kongruenzen den Ausgangspunkt bildet.

11. Der lineare Komplex ist polarinvariant für jede einscharig in ihm enthaltene Regelfläche R^2 zweiten Grades [3]). Hieraus folgt:

Eine Involution zweiter Art im linearen Strahlenkomplexe Γ ist bedingt durch den polaren Raum einer einscharig im linearen Komplex Γ enthaltenen Fläche zweiter Ordnung R^2.

[3]) Reye, Geometrie der Lage 2, Stuttgart 1907, S. 117. Der Satz geht auf v. Staudt zurück.

Konjugierte Strahlen der Involution sind reziproke Polaren für die Fläche zweiter Ordnung R^2. Die Involution hat die ∞^1 Regelstrahlen von R^2 zu Doppelstrahlen.

Der lineare Strahlenkomplex trägt ∞^4 Involutionen erster Art und ∞^6 Involutionen zweiter Art. Von einer Klassifikation dieser Involutionen im einzelnen soll hier abgesehen werden.

12. Will man sich in der Geometrie des linearen Strahlenkomplexes Γ mit dem Effekt der Noetherschen Abbildung begnügen, so scheinen die Überlegungen der Nr. **10** und **11** entbehrlich zu sein. Die Kollineationen des linearen Komplexes in sich werden nach Anwendung der Noetherschen Abbildung durch quadratische Cremonatransformationen im dreidimensionalen Bildraume wiedergegeben. Es gibt zwei Arten involutorischer quadratischer Cremonatransformationen, und aus ihnen ist auf die beiden Arten von Involutionen im linearen Strahlenkomplex zu schließen.

Die eine involutorische quadratische Transformation ist durch die Inversion dargestellt. Eine Fläche zweiter Ordnung C^2 durch den fundamentalen Kegelschnitt k^2 ordnet der Ebene ε dieses Kegelschnittes den Pol C zu; zwei inverse Punkte P, P_1 liegen auf demselben Strahle durch das Inversionszentrum C, jeder in der Polarebene des andern. — Das Zentrum C werde als Ecke $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ des Koordinatentetraeders gewählt, die Ebene ε als $x_4 = 0$. Es sei $\varphi^2(x_1, x_2, x_3) = 0$ die Gleichung des Kegels aus C durch den fundamentalen Kegelschnitt k^2, sodaß sich die Gleichung der Fläche C^2 schreibt:

$$\varphi^2(x_1, x_2, x_3) - c x_4^2 = 0 \qquad (c \text{ Konstante}).$$

Dann ist die Inversion wiedergegeben durch:

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 x_4 : x_2 x_4 : x_3 x_4 : \frac{\varphi^2(x_1, x_2, x_3)}{c}.$$

Damit ist die Involution erster Art im linearen Komplex Γ durch eine Inversion dargestellt. Es ist auch ersichtlich, daß die Involution durch den geschart involutorischen Raum einer im Komplexe enthaltenen linearen Kongruenz C_1^1 hervorgerufen wird, weil die Inversion die ∞^2 Punkte der Fläche zweiter Ordnung C^2 zu Fixpunkten hat. Daß dieselbe Involution auch durch den Nullraum eines für den linearen Komplex Γ nullinvarianten linearen Strahlenkomplexes Γ' bedingt wird (**10**), geht aus der Noetherschen Abbildung allein nicht hervor, weil der dreidimensionale Bildraum die Geometrie des linearen Komplexes von innen, aber nicht von außen zeigt. Dasselbe Mißgeschick erleidet die Polarentheorie des Komplexes bei der Abbildung. Die Vorteile der Abbildung liegen hier in anderer Richtung:

13. Die Wahl des unendlichfernen Kugelkreises zum fundamentalen Kegelschnitte k^2 führt die Darstellung der Involution erster Art auf die Transformation durch reziproke Radienvektoren an einer (reellen oder imaginären) Kugel zurück. Die Kugel C^2 und ihre ∞^3 Orthogonalkugeln repräsentieren eine lineare Kongruenz C_1^1 und das zugehörige Polargebüsch der ∞^3 konjugierten linearen Kongruenzen; jede von ihnen ist im geschart involutorischen Raum von C_1^1 invariant.

Die durch eine Inversion an einer Kugel in sich überführbaren Flächen hat Moutard[4]) behandelt und als *anallagmatische* Flächen bezeichnet. Sie werden hier *selbstinverse* Flächen genannt. Eine für die Kugel C^2 selbstinverse Fläche F ist Hüllfläche von ∞^2 Orthogonalkugeln von C^2. Die ∞^2 Mittelpunkte der umhüllten Kugeln erfüllen eine Fläche, den

[4]) Moutard, Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques, Nouv. Ann. (2) **3** (1864), S. 306—309. — Sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre, ebenda S. 536—539.