Journal für die reine und angewandte Mathematik
Herausgegeben von **Helmut Hasse**
Druck und Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35

Sonderabdruck aus Band 178 Heft 4. 1938.

# Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz. III.

Von *G. Haenzel* und *F. Reutter* in Karlsruhe.

Im Anschluß an die beiden vorhergehenden Abhandlungen [1]) wird im folgenden eine Theorie der Oskulation in der linearen Strahlenkongruenz entwickelt (Abschnitt I). Die Bestimmung des oskulierenden Hyperboloides längs eines Regelstrahles führt auf zwei weitere mit einer gegebenen Regelfläche $R$ verknüpfte Regelflächen: Die Hauptachsenfläche der oskulierenden Hyperboloide, bedeckt von den Tripeln von Hauptachsen der oskulierenden Regelfläche zweiten Grades einer Regelfläche $R$, und die Evolutenregelfläche. Während die erstere eine Begleiterin jeder Regelfläche ist, kann man von einer Evolutenregelfläche nur bei den in der linearen Kongruenz enthaltenen Regelflächen sprechen. Dort spielen sie die gleiche Rolle wie die Evolute einer Kurve in der Ebene.

Das Hauptziel der Arbeit aber ist die Behandlung einer neuen Flächenklasse. Die früher behandelten Ringsysteme von Regelflächen zweiten Grades [2]) in Verbindung mit dem Begriffe konjugierter Richtungen [3]) in der linearen Kongruenz führen jetzt mit Hilfe von Differentialgleichungen auf merkwürdige, bisher ganz unbekannte Flächen und Flächensysteme, die in der hyperbolischen und der elliptischen linearen Kongruenz enthalten sind (Abschnitt II). Die allgemeinen Typen dieser neuartigen transzendenten Regelflächen sind im polaren Raume einer (reellen oder imaginären) Regelfläche zweiten Grades autopolar und können sie zur Asymptotenfläche haben. Sonderfälle dieser Flächensysteme vermitteln ein neues Theorem über den polaren Raum der Regelfläche zweiten Grades (Abschnitt III).

## I. Die Hauptachsenfläche der oskulierenden Hyperboloide und die Evolutenregelschar in der linearen Kongruenz.

**1.** Für eine Parameterdarstellung einer gegebenen Regelschar $\mathfrak{R}$ sind die homogenen Linienkoordinaten $p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ Funktionen eines reellen Parameters $t$. Die sechs Funktionen

$$p_i = p_i(t) \tag{1}$$

seien bis auf einzelne $t$-Werte einschließlich ihrer ersten und zweiten Ableitungen stetig differenzierbar. Einen Regelstrahl $s$ mit dem Parameterwert $t$ greifen wir heraus. Die $\mathfrak{R}$ längs $s$ oskulierende Regelschar $\mathfrak{R}^2$ zweiter Ordnung läßt sich als Schnitt von drei linearen Strahlenkomplexen bestimmen, analytisch daher durch die drei folgenden

[1]) G. Haenzel, Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz, Journ. f. d. reine u. angew. Mathematik **173** (1935), S. 91—113. Angeführt als Abhandlung I. — Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz. II, Journ. f. d. reine u. angew. Mathematik **175** (1936), S. 169—181. Angeführt als Abhandlung II.

[2]) Abhandlung II, Abschnitt III.

[3]) Abhandlung II, Abschnitt IV.

Gleichungen in laufenden Koordinaten $\mathfrak{p}_i$ darstellen:

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{p}_1 p_4(t_1) + \mathfrak{p}_2 p_5(t_1) + \mathfrak{p}_3 p_6(t_1) + \mathfrak{p}_4 p_1(t_1) + \mathfrak{p}_5 p_2(t_1) + \mathfrak{p}_6 p_3(t_1) = 0, \\ \mathfrak{p}_1 p_4'(t_1) + \mathfrak{p}_2 p_5'(t_1) + \mathfrak{p}_3 p_6'(t_1) + \mathfrak{p}_4 p_1'(t_1) + \mathfrak{p}_5 p_2'(t_1) + \mathfrak{p}_6 p_3'(t_1) = 0, \\ \mathfrak{p}_1 p_4''(t_1) + \mathfrak{p}_2 p_5''(t_1) + \mathfrak{p}_3 p_6''(t_1) + \mathfrak{p}_4 p_1''(t_1) + \mathfrak{p}_5 p_2''(t_1) + \mathfrak{p}_6 p_3''(t_1) = 0. \end{cases}$$

Die Koeffizienten der bestimmenden linearen Komplexe sind die Funktionswerte der $p_i(t)$ und ihrer ersten beiden Ableitungen an der Stelle $t$. Zur Abkürzung gilt für die weitere Darstellung:

$$\{p_i p_k p_l\} = \begin{vmatrix} p_i(t) & p_k(t) & p_l(t) \\ p_i'(t) & p_k'(t) & p_l'(t) \\ p_i''(t) & p_k''(t) & p_l''(t) \end{vmatrix}.$$

Mit Benutzung dieser Abkürzung werden folgende Koeffizienten eingeführt:

$$(3)\quad \begin{gathered} a_{11} = \{p_4 p_3 p_5\}, \quad a_{22} = \{p_2 p_4 p_6\}, \quad a_{33} = \{p_5 p_1 p_6\}, \quad a_{44} = \{p_2 p_1 p_3\}, \\ a_{12} = \tfrac{1}{2}[\{p_4 p_3 p_6\} + \{p_2 p_4 p_5\}], \quad a_{13} = \tfrac{1}{2}[\{p_3 p_6 p_5\} + \{p_4 p_1 p_5\}], \quad a_{14} = \tfrac{1}{2}[\{p_4 p_1 p_3\} + \{p_2 p_3 p_5\}], \\ a_{23} = \tfrac{1}{2}[\{p_4 p_1 p_6\} + \{p_2 p_5 p_6\}], \quad a_{24} = \tfrac{1}{2}[\{p_2 p_1 p_4\} + \{p_2 p_3 p_6\}], \quad a_{34} = \tfrac{1}{2}[\{p_2 p_1 p_6\} + \{p_3 p_1 p_6\}]. \end{gathered}$$

Das oskulierende Hyperboloid (Paraboloid) $R^2$ mit der Regelschar $\mathfrak{R}^2$ hat in homogenen Punktkoordinaten $x_1, \ldots, x_4$ die Gleichung

$$(4)\quad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2(a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{14}x_1x_4 + a_{23}x_2x_3 + a_{24}x_2x_4 + a_{34}x_3x_4) = 0.$$

Die zugehörige bilineare Form liefert für den Mittelpunkt $(y_1 : y_2 : y_3 : y_4)$ des oskulierenden Hyperboloides die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} 2a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4 &= 0, \\ a_{12}y_1 + 2a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4 &= 0, \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + 2a_{33}y_3 + a_{34}y_4 &= 0. \end{aligned}$$

Der Mittelpunktsort des oskulierenden Hyperboloides $R^2$ (Regelschar $\mathfrak{R}^2$) für die allgemeine Regelfläche $R$ (Regelschar $\mathfrak{R}$) ist eine Raumkurve $m_r$, ihre analytische Gleichung lautet:

$$(5)\quad y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \begin{vmatrix} a_{14} & a_{12} & a_{13} \\ a_{24} & 2a_{22} & a_{23} \\ a_{34} & a_{23} & 2a_{33} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{14} & a_{13} \\ a_{12} & a_{24} & a_{23} \\ a_{13} & a_{34} & 2a_{33} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & 2a_{22} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{34} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 2a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 2a_{33} \end{vmatrix}.$$

Nach den Gleichungen (3) und (1) sind sämtliche $a_{ik}$ Funktionen von $t$, und es handelt sich in (5) um eine Parameterdarstellung des Mittelpunktortes $m_r$ der oskulierenden Hyperboloide. Jeder feste Wert von $t$ bedingt nach (1) den oskulierten Regelstrahl der Regelfläche $R$ und nach (5) den Mittelpunkt des oskulierenden Hyperboloides. Gleichung (4) stellt für festes $t$ das oskulierende Hyperboloid selbst dar. Aus ihr ergeben sich seine Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenlängen.

**2.** Die Regelschar $\mathfrak{R}$, deren oskulierende Hyperboloide im vorhergehenden Abschnitte konstruiert wurden, liege in einer (hyperbolischen, parabolischen oder elliptischen) linearen Kongruenz. Alle ihre oskulierenden Hyperboloide sind gleichfalls in der Kongruenz enthalten. Die durch Gleichung (5) dargestellte Mittelpunktskurve $m_r$ der oskulierenden Hyperboloide liegt in der Fluchtebene der Kongruenz, da die Mittelpunkte aller in der Kongruenz einscharig enthaltenen Flächen zweiten Grades die Fluchtebene erfüllen. Die Hauptachsen der oskulierenden Hyperboloide liegen im Hauptachsenkomplex der linearen Kongruenz.

Der Hauptachsenkomplex der linearen Strahlenkongruenz wurde von Herrn Jolles [4]) untersucht, und zwar rein synthetisch. Die $\infty^3$ einscharig in der Kongruenz

[4]) St. Jolles, Die Hauptachsenflächen der Büschelscharen aus den einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen Flächen zweiten Grades, Journ. f. reine u. angew. Mathematik **172** (1935), S. 1—24.

enthaltenen Flächen zweiten Grades bilden bekanntlich eine lineare Mannigfaltigkeit dritter Stufe, einen Gebüschverband. Jeder Punkt der Fluchtebene $\mu$ der Kongruenz ist der Mittelpunkt von $\infty^1$ Flächen dieser Mannigfaltigkeit. Sie bilden eine Büschelschar konzentrischer Flächen. Jede Gerade $t$ der Fluchtebene trägt die Mittelpunkte von $\infty^2$ einscharig in der Kongruenz enthaltenen Flächen zweiten Grades. Sie bilden ein Bündelheer solcher Flächen, und die Gerade $t$ ist die *Zentragerade* des Bündelheeres. Das Bündelheer umfaßt $\infty^2$ Büschelscharen von Flächen zweiten Grades, deren Mittelpunkte die Zentragerade erfüllen. Darunter sind $\infty^1$ Büschelscharen konzentrischer Flächen. Das Bündelheer läßt sich durch diese Büschelscharen konzentrischer Flächen erschöpfen. Der Gebüschverband aller in der linearen Kongruenz enthaltenen Flächen zweiten Grades kann aus $\infty^2$ Bündelheeren mit je einer Zentrageraden zusammengesetzt werden. Die Zentrageraden sind die Strahlen der Fluchtebene.

Die Hauptachsen der einscharig in der Kongruenz enthaltenen Flächen zweiten Grades bilden den quadratischen Hauptachsenkomplex der linearen Kongruenz. Die im quadratischen Hauptachsenkomplexe enthaltenen Regelflächen werden Hauptachsenflächen genannt. So erfüllen die Hauptachsen einer Büschelschar konzentrischer Flächen zweiten Grades einen Kegel zweiter Ordnung als Hauptachsenfläche der Büschelschar. Eine Büschelschar von Flächen zweiten Grades mit einer eigentlichen Zentrageraden $t$ hat zur Hauptachsenfläche eine biquadratische Regelfläche $T^4$ mit $t$ als Gerade dreifacher Punkte.

**3.** Die Mittelpunktskurve $m_r$ der $\infty^1$ oskulierenden Hyperboloide einer Regelfläche $R$ liegt in der Fluchtebene $\mu$ der linearen Kongruenz. Jeder Punkt von $m_r$ ist der Mittelpunkt eines Kegels zweiter Ordnung des Hauptachsenkomplexes. Die Regelfläche $R$ gibt so Anlaß zur Entstehung einer allgemeinen Kegelreihe mit der Zentrakurve $m_r$. Die Anwendung der Hauptachsentransformation auf Gleichung (4) bestimmt auf jedem Kegel der Kegelreihe die Hauptachsen des oskulierenden Hyperboloides. Daher folgt:

*Die $\infty^1$ Hauptachsentripel der oskulierenden Hyperboloide einer Regelfläche $R$ erfüllen die „Hauptachsenfläche der oskulierenden Hyperboloide". Sie hat den Mittelpunktsort der die Regelfläche $R$ oskulierenden Hyperboloide zur dreifachen Kurve.*

Von den $\infty^2$ Durchmessern eines oskulierenden Hyperboloides liegt *einer* in der linearen Kongruenz. Die Mittelpunktskurve $m_r$ ist also Leitkurve einer weiteren in der Kongruenz enthaltenen Regelschar, erfüllt von $\infty^1$ Durchmessern der $\infty^1$ oskulierenden Hyperboloide. Mit anderen Worten:

*Die in der linearen Kongruenz enthaltenen $\infty^1$ Durchmesser der oskulierenden Hyperboloide einer Regelfläche $R$ erfüllen die „Evolutenregelschar" von $R$. Ihre Trägerfläche heißt die Evolutenregelfläche; sie hat die (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden der Kongruenz und den Mittelpunktsort der oskulierenden Hyperboloide zu Leitkurven.*

Erinnern wir uns an die schon früher benutzte Abbildung der linearen Kongruenz durch Verwandlung in eine Fläche zweiten Grades mit anschließender stereographischer Projektion. Der Hauptachsenkomplex der linearen Kongruenz und damit die Hauptachsenfläche der oskulierenden Hyperboloide, sowie ihre Mittelpunktskurve werden von der Abbildung nicht erfaßt. Wohl aber die Evolutenregelschar der oskulierenden Hyperboloide. Wird die Regelfläche $R$ der Kongruenz auf die Kurve $r$ abgebildet, so geht die Evolutenregelschar auf die Evolute der Kurve $r$ über. Die Normalen der Kurve $r$ entsprechen den $\infty^1$ parabolischen Regelscharen der linearen Kongruenz, welche die Regelschar $\mathfrak{R}$ in konjugierten Richtungen [3]) schneiden. Da die Evolute von den Kurvennormalen umhüllt wird, ergibt sich der Satz:

*Die Evolutenregelfläche einer Regelfläche $R$ ist die Hüllfläche der $\infty^1$ zur Regelfläche $R$ konjugierten Strahlenparaboloide.*

Die Fußpunkttransformation ebener Kurven, die Inversion, die Transformation ebener Kurven durch Polaren [5]) in bezug auf einen Kreis und andere Theoreme finden in gleicher Weise in allen Einzelheiten ihre Gegenbilder in der Geometrie der linearen Kongruenz. Doch handelt es sich bei den entsprechenden Transformationen der linearen Kongruenz um spezielle Beispiele zu einer allgemeinen Theorie der Berührungstransformationen in der Liniengeometrie.

## II. Die Trajektorflächen der Ringsysteme von Regelflächen zweiten Grades.

**4.** Zwei gegebene Flächen zweiten Grades $H_1^2$, $H_2^2$ werden von zwei Ringsystemen von Regelflächen zweiten Grades umhüllt [6]). Die $\infty^1$ Flächen des einen Ringsystems berühren die beiden Leitflächen $H_1^2$, $H_2^2$ gleichartig, die $\infty^1$ Flächen des anderen Ringsystems berühren sie ungleichartig. Die Mittelpunktsorte der Flächen beider Ringsysteme sind zwei ebene Kurven vierter Ordnung in der Fluchtebene; die in der Kongruenz enthaltenen Durchmesser dieser Flächen erfüllen zwei Regelscharen vierter Ordnung. Die schon häufig benutzte Abbildung der Kongruenz durch Verwandlung in eine Fläche zweiten Grades mit anschließender stereographischer Projektion bildet die beiden Leitflächen $H_1^2$, $H_2^2$ auf zwei Kreise $K_1^2$, $K_2^2$ ab, die Flächen der beiden Ringsysteme aber auf die (gleichartigen und ungleichartigen) Berührungskreise von $K_1^2$, $K_2^2$ (Fig. 1—6). Die zwei feste Kreise $K_1^2$, $K_2^2$ berührenden Kreise sind schon von J. Steiner eingehend behandelt worden. Ein

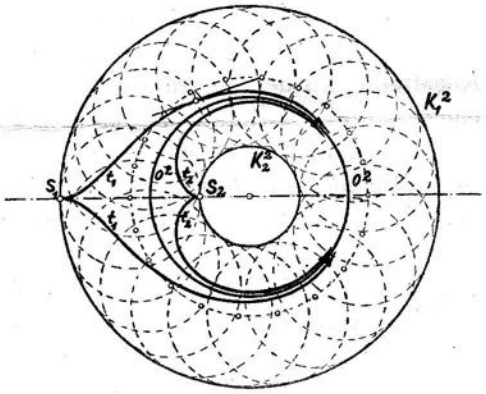


Fig. 1.

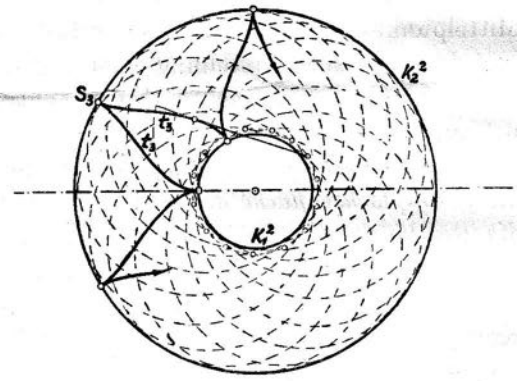


Fig. 2.

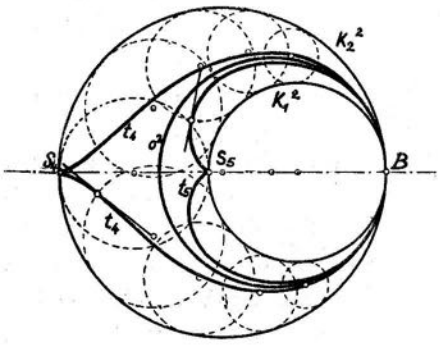


Fig. 3.

---

[5]) S. Lie, Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig 1896, Kap. I, § 3.

[6]) Abhandlung II, Nr. 8.

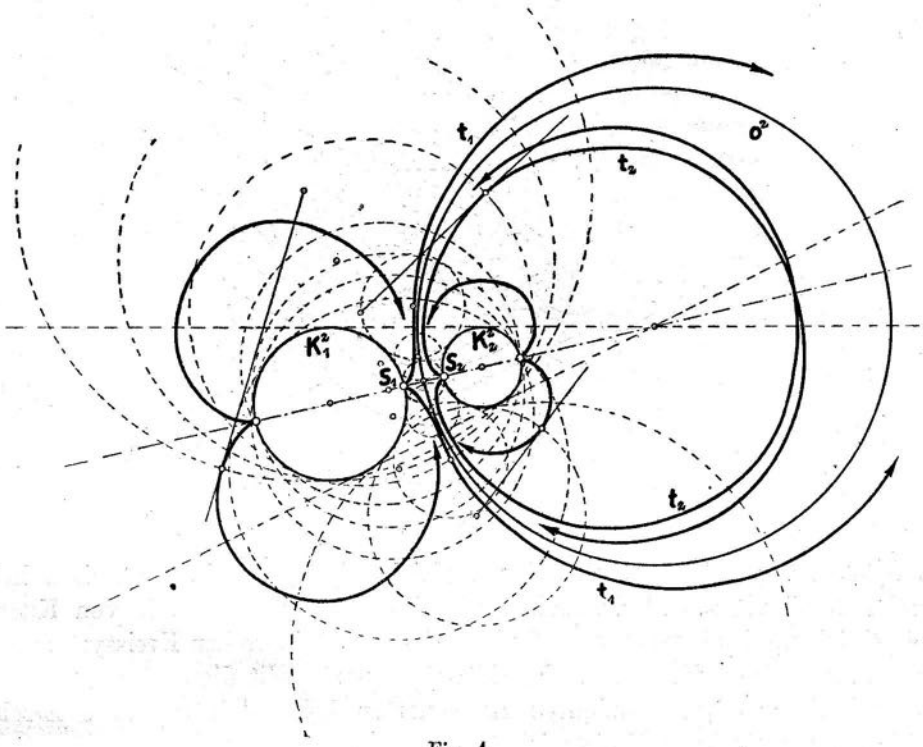


Fig. 4.

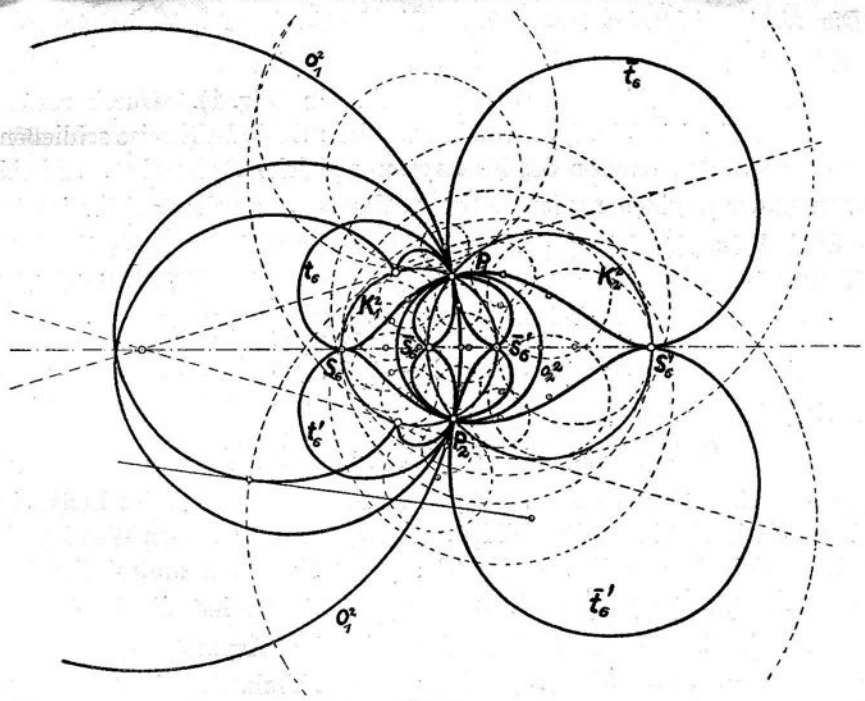


Fig. 5.

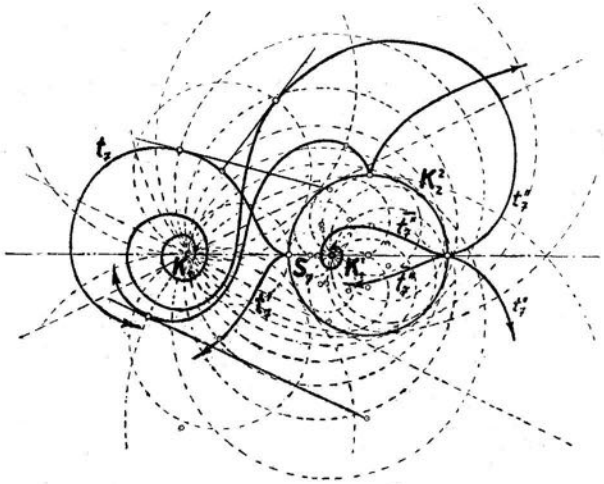

Fig. 6.

solches System von (gleichartigen oder ungleichartigen) Berührungskreisen heiße ein *Steinersches Kreissystem.* Merkwürdigerweise ist bisher eine Familie von Kurven unbekannt geblieben, die als senkrechte Trajektorien der Steinerschen Kreissysteme erhalten werden können. Trotz dieser einfachen Erzeugungsart stellt diese Kurvenfamilie unter der großen Zahl von transzendenten Kurvenarten keine uninteressante Erscheinung dar. Wir nennen sie kurz *Kreistrajektorien.*

**5.** Die vollständige Untersuchung der Kreistrajektorien kann auf eine Anzahl Differentialgleichungen zurückgeführt werden. Sie liefert folgende Ergebnisse, die für die späteren liniengeometrischen Betrachtungen von Bedeutung sind:

a) *Die Kreistrajektorien erster Art.* Die Leitkreise $K_1^2$, $K_2^2$ haben keine reellen Schnittpunkte. Der eine Leitkreis $K_1^2$ schließt den andern ein und die $\infty^1$ Kreise des Kreissystems berühren beide Leitkreise ungleichartig (Fig. 1). Durch reelle Kreisverwandtschaft kann Fig. 1 in Fig. 4 verwandelt werden: Beide Leitkreise schließen einander aus und werden von den Kreisen des Kreissystems gleichartig berührt. In beiden Fällen gibt es einen und nur einen reellen Orthogonalkreis $O^2$ zu den $\infty^1$ Kreisen des Kreissystems. Sind $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$, $O(x, y)$ die Potenzen der drei Kreise $K_1^2$, $K_2^2$, $O^2$, so sind die Kreistrajektorien erster Art die Integralkurven der Differentialgleichung

$$y' = \frac{y \cdot O(x, y) + x\sqrt{-K_1(x, y) \cdot K_2(x, y)}}{x \cdot O(x, y) - y\sqrt{-K_1(x, y) \cdot K_2(x, y)}} \tag{6}$$

mit der Diskriminantenkurve

$$O^2(x, y) \cdot K_1(x, y) \cdot K_2(x, y) \cdot (x^2 + y^2)^2 = 0\,. \tag{7}$$

Die Kreistrajektorie erster Art beginnt daher in einem Punkte $S_1$ des Leitkreises $K_1^2$ mit zwei Zweigen, die in $S_1$ eine Spitze bilden. Jeder hat einen reellen Wendepunkt. Beide Zweige nähern sich dem reellen Kreise $O^2$ asymptotisch von außen, ihn in entgegengesetztem Umlaufsinne umkreisend. Eine zweite Spitze hat die Kreistrajektorie im Punkte $S_2$ von $K_2^2$. Ihre beiden Zweige nähern sich dem Asymptotenkreise $O^2$ von innen in entgegengesetztem Umlaufsinne. Bei jedem vollen Umlauf zweier äußeren oder zweier inneren Zweige entstehen je zwei Doppelpunkte. Die Kreistrajektorie ist für ihren Asymptotenkreis selbstinvers.

In Fig. 1 ist zudem $x = 0$, $y = 0$ isolierter Punkt der Kurve.

b) *Die Kreistrajektorien zweiter Art.* Die beiden Leitkreise schließen einander ein und werden gleichartig berührt (Fig. 2). Durch eine geeignete reelle Kreisverwandtschaft entstehen daraus zwei einander ausschließende Leitkreise mit ungleichartiger Berührung durch die $\infty^1$ Kreise des Kreissystems. Die Kreistrajektorie zweiter Art hat in einem Punkte $S_3$ des einen Leitkreises eine Spitze. Die beiden von dort ausgehenden Zweige erreichen mit je einem reellen Wendepunkte den anderen Leitkreis, wo sich weitere Zweige mit Spitzen ansetzen usf. Die Kreistrajektorien zweiter Art sind für einen imaginären Kreis $O^2$ selbstinvers. In Fig. 2 ist zudem $x = 0$, $y = 0$ isolierter Punkt der Kurve.

Ist die Quadratwurzel aus dem Radienverhältnis der Leitkreise $\sqrt{\frac{r_1}{r_2}} = \frac{p}{q}$ eine rationale Zahl, so sind die Kreistrajektorien zweiter Art in Fig. 2 algebraische Kurven. Ein beweglicher Kurvenpunkt kehrt dann nach Durchlaufen einer endlichen (geraden) Anzahl von Spitzen und Wendepunkten an seine Ausgangsstelle zurück. Die Kreistrajektorie schließt sich um den inneren Leitkreis nach ein oder mehreren Umläufen. Ist $m$ die Zahl der Umläufe, $n$ die Zahl der Spitzen auf jedem der beiden Leitkreise und $g$ eine ganze Zahl, so lautet die Schließungsbedingung:

$$\frac{m}{n} = \frac{(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2})^2}{2\sqrt{r_1 r_2}} = \frac{(g-1)^2}{2g} \qquad (g = 2, 3, 4, \ldots). \tag{8}$$

Es gibt daher nur eine algebraische Kreistrajektorie zweiter Art, die sich nach einem Umlauf schließt, sie hat innerhalb dieses Umlaufes vier Spitzen auf jedem Leitkreise. Die nächsthöhere algebraische Kurve schließt sich nach vier Umläufen mit sechs Spitzen auf jedem Leitkreise usf.

c) *Die Kreistrajektorien dritter Art.* Die beiden Leitkreise berühren einander äußerlich oder innerlich in einem Punkte $B$ (Fig. 3). Ein Punkt $S_4$ des einen und ein Punkt $S_5$ des anderen Leitkreises sind Spitzen. Die vier von ihnen paarweise ausgehenden Kurvenzweige berühren einander in $B$. Es kommen zwei oder keine reellen Wendepunkte vor. Zu den Kreistrajektorien dritter Art gehört ein reeller Kreis $O^2$. Für ihn ist jede andere Kreistrajektorie selbstinvers.

d) *Die Kreistrajektorien vierter Art.* Die Leitkreise haben zwei reelle Schnittpunkte $P_1$, $P_2$. Das eine Kreissystem besteht aus den gleichartig, das andere aus den ungleichartig berührenden Kreisen (Fig. 5). Die Kreistrajektorie vierter Art hat Spitzen auf beiden Leitkreisen. Ihre Zweige berühren einander paarweise in den Knotenpunkten $P_1$, $P_2$. Reelle Wendepunkte können paarweise auftreten. In $P_1$, $P_2$ berührt die Kreistrajektorie einen reellen Kreis, für den sie selbstinvers ist.

e) *Die Kreistrajektorien fünfter Art.* Ist der eine Leitkreis ein Punkt $K_1$ (Fig. 6), so durchsetzt die Kreistrajektorie fünfter Art die $\infty^1$ Kreise, die durch diesen Punkt gehen und den zweiten Leitkreis $K_2^2$ berühren. Die Kreistrajektorie fünfter Art hat eine Spitze $S_7$, einen asymptotischen Punkt $K_1$, den ihre beiden Zweige in entgegengesetztem Sinne umkreisen; sie besitzt im allgemeinen zwei reelle Wendepunkte und $\infty^1$ Doppelpunkte. Der inverse Punkt $K_1'$ des asymptotischen Punktes $K_1$ in bezug auf $K_2^2$ ist isolierter Punkt.

Die Ausartung des zweiten Leitkreises führt auf ein Büschel von Kreisen als Orthogonaltrajektorien. Die Fälle a)—e) können durch reelle Kreisverwandtschaften nicht ineinander überführt werden.

**6.** Die $\infty^1$ Kongruenzrichtungen durch einen gegebenen Kongruenzstrahl $s$ sind paarweise konjugiert und bilden eine Involution konjugierter Richtungen. Führen zwei

(algebraische oder transzendente) Regelscharen $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ der Kongruenz in zwei konjugierten Richtungen durch $s$, so ist jede die Regelschar $\mathfrak{R}_1$ längs $s$ berührende Regelschar zweiter Ordnung polarinvariant für jede $\mathfrak{R}_2$ längs $s$ berührende Regelschar zweiter Ordnung. Insbesondere gilt das von den beiden oskulierenden Regelscharen und den beiden berührenden parabolischen Regelscharen zweiter Ordnung [7]). Zwei Systeme von Regelscharen der Kongruenz, die einander überall in konjugierten Richtungen durchdringen, heißen konjugierte Systeme von Regelscharen, die Systeme ihrer Trägerflächen konjugierte Flächensysteme. Dabei sei daran erinnert, daß die Abbildung der linearen Kongruenz durch Deutung als Fläche zweiten Grades und stereographische Projektion die konjugierten Flächensysteme der Kongruenz in die orthogonalen Kurvennetze der Bildebene verwandelt.

Ihre Umkehrung führt daher die Kreissysteme und die in Nr. **5** behandelten orthogonalen Kreistrajektorien in die Ringsysteme von Flächen zweiten Grades (Nr. **4**) und ihre konjugierten Flächensysteme über. Die konjugierten Flächen der Ringsysteme werden im folgenden als *Trajektorflächen* bezeichnet. Soll von den Kreistrajektorien der Ebene auf die Trajektorflächen der linearen Kongruenz geschlossen werden, so ist für die elliptische Kongruenz von den Kreistrajektorien der euklidischen Geometrie auszugehen, für die hyperbolische Kongruenz von denen der pseudoeuklidischen Geometrie.

Da aber die Untersuchung der Kongruenz allein mittels Abbildungen unvollkommen bleibt, werden die Trajektorflächen zuerst unmittelbar in der linearen Kongruenz betrachtet und erst nachträglich wird ihre durch die Abbildung vermittelte Verwandtschaft mit den ebenen Kreistrajektorien herangezogen.

### A. Die Trajektorflächen in der elliptischen linearen Kongruenz.

**7.** Die elliptische lineare Kongruenz sei durch die Gleichungen gegeben:

$$p_2 - p_5 = 0, \quad p_3 - p_6 = 0. \tag{9}$$

Zwei einscharig in der Kongruenz enthaltene (reelle) Strahlenhyperboloide $H_1^2$, $H_2^2$, die ohne Einschränkung der Allgemeinheit konzentrisch angenommen werden können und keinen reellen Strahl gemein haben, werden bestimmt durch die Gleichungen

$$\Gamma_a = a_1 p_4 + a_4 p_1 = 0, \quad \Gamma_b = b_1 p_4 + b_4 p_1 = 0. \tag{10}$$

$a_1$, $a_4$ haben gleiche Vorzeichen, ebenso $b_1$, $b_4$. Die beiden linearen Strahlenkomplexe $\Gamma_a$, $\Gamma_b$ mit diesen Gleichungen schneiden die Kongruenz in den Regelscharen $\mathfrak{H}_1^2$, $\mathfrak{H}_2^2$ der Hyperboloide $H_1^2$, $H_2^2$. Die beiden Strahlenhyperboloide $H_1^2$, $H_2^2$ sind die Leitflächen zweier Ringsysteme von Flächen zweiten Grades. Die $\infty^1$ Flächen des ersten Ringsystems berühren die Leitflächen ungleichartig, und die Darstellung ihrer $\infty^1$ Regelscharen mittels des Scharparameters $\lambda$ lautet:

$$\sqrt{a_1}\left(\sqrt{a_4 b_4}\, p_1 - \sqrt{a_1 b_1}\, p_4\right) - \left(\sqrt{a_1 b_4} + \sqrt{a_4 b_1}\right)\left[\sqrt{a_4}\,\lambda p_5 + \sqrt{a_1 - \lambda^2 a_4}\, p_6\right] = 0 \tag{11}$$
$$(-\infty < \lambda < +\infty).$$

Die $\infty^1$ Flächen des zweiten Ringsystems berühren die Leitflächen gleichartig und ihre $\infty^1$ Regelscharen haben die Parametergleichung

$$\sqrt{a_1}\left(\sqrt{a_4 b_4}\, p_1 + \sqrt{a_1 b_1}\, p_4\right) - \left(\sqrt{a_1 b_4} - \sqrt{a_4 b_1}\right)\left[\sqrt{a_4}\,\lambda p_5 + \sqrt{a_1 - \lambda^2 a_4}\, p_6\right] = 0 \tag{11'}$$
$$(-\infty < \lambda < +\infty).$$

Berührt eine Fläche des einen oder des anderen Ringsystems die Leitfläche $H_1^2$ längs des

---

[7]) Abhandlung II, S. 178.

Regelstrahles $r(\mathfrak{p}_i)$, so ist ihre Gleichung bestimmt durch den Parameterwert

$$\lambda = -\frac{\mathfrak{p}_5}{\mathfrak{p}_4};$$

gleichzeitig ist

$$w = \sqrt{a_1 - \lambda^2 a_4} = -\frac{\mathfrak{p}_6}{\mathfrak{p}_4}.$$

Ein solches Ringsystem sendet durch einen gegebenen Kongruenzstrahl $s(p_i)$ im Ringgebiet zwischen den Leitflächen $H_1^2$, $H_2^2$ zwei reelle Flächen zweiten Grades, bedingt also ein doppeltes „Richtungsfeld". Die beiden Flächenparameter $\lambda_1$, $\lambda_2$ dieser Richtungen sind bestimmt durch

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{a_4} \cdot \frac{p_5(\sqrt{a_4 b_4}\, p_1 \mp \sqrt{a_1 b_1}\, p_4) + p_6 \sqrt{-\Gamma_a \Gamma_b}}{p_1 p_4 (\sqrt{a_1 b_4} \pm \sqrt{a_4 b_1})};$$

dazu gehört

$$w_{1,2} = -\frac{a_1}{a_4} \cdot \frac{p_6(\sqrt{a_4 b_4}\, p_1 \mp \sqrt{a_1 b_1}\, p_4) - p_5 \sqrt{-\Gamma_a \Gamma_b}}{p_1 p_4 (\sqrt{a_1 b_4} \pm \sqrt{a_4 b_1})}.$$

Die oberen Vorzeichen betreffen das Ringsystem erster Art (ungleichartige Berührung), die unteren das Ringsystem zweiter Art (gleichartige Berührung). Die Bestimmung der konjugierten Flächen führt auf die Differentialgleichung der Trajektorflächen (Nr. **6**) erster und zweiter Art:

$$(12) \quad -p_1 \sqrt{-\Gamma_a \Gamma_b}\, dp_4 + (p_6 [\sqrt{a_4 b_4}\, p_1 \pm \sqrt{a_1 b_1}\, p_4] - p_5 \sqrt{-\Gamma_a \Gamma_b})\, dp_5 + (-p_5 [\sqrt{a_4 b_4}\, p_1 \pm \sqrt{a_1 b_1}\, p_4] - p_6 \sqrt{-\Gamma_a \Gamma_b}) dp_6 = 0.$$

Mit Hilfe der Kongruenzgleichungen (9) und der Plückerschen Fundamentalbeziehung wird $p_1$ eliminiert:

$$p_1 = -\frac{p_6^2 + p_5^2}{p_4}.$$

Dann ist die linke Seite der Differentialgleichung (12) der Trajektorflächen äquivalent einer Differentialform in zwei inhomogenen Veränderlichen $x$, $y$:

$$f_1 dx + f_2 dy.$$

Mit $-\frac{p_6}{p_4} = x$ und $-\frac{p_5}{p_4} = y$ erhält man

$$(13) \quad \begin{cases} f_1 = -[y(\sqrt{a_4 b_4}\,(x^2+y^2) \mp \sqrt{a_1 b_1}) + x\sqrt{-[a_4(x^2+y^2)-a_1][b_4(x^2+y^2)-b_1]}] \\ f_2 = \quad x(\sqrt{a_4 b_4}\,(x^2+y^2) \mp \sqrt{a_1 b_1}) - y\sqrt{-[a_4(x^2+y^2)-a_1][b_4(x^2+y^2)-b_1]} \end{cases}.$$

Die Differentialgleichung (12) der Trajektorflächen geht jetzt über in

$$(14) \quad y' = \frac{y[\sqrt{a_4 b_4}(x^2+y^2) \mp \sqrt{a_1 b_1}] + x\sqrt{-[a_4(x^2+y^2)-a_1][b_4(x^2+y^2)-b_1]}}{x[\sqrt{a_4 b_4}(x^2+y^2) \mp \sqrt{a_1 b_1}] - y\sqrt{-[a_4(x^2+y^2)-a_1][b_4(x^2+y^2)-b_1]}}.$$

Setzt man $\frac{a_1}{a_4} = r_1^2$, $\frac{b_1}{b_4} = r_2^2$ und deutet $r_1$, $r_2$ als die Radien der Kreise $K_1^2$, $K_2^2$ in Fig. 1, so ist die Differentialgleichung (14) der Trajektorflächen mit der Differentialgleichung (6) der Kreistrajektorien in Nr. 5 identisch. Das war zu erwarten, weil die Abbildung der elliptischen linearen Kongruenz auf die euklidische Bildebene die Trajektorflächen in die Kreistrajektorien verwandelt. Wegen der Invarianz gegen Drehungen um den Anfangspunkt ist die Differentialgleichung (14) durch Anwendung von Polarkoordinaten

separierbar:

$$(15)\qquad \varrho\frac{d\varphi}{d\varrho}=\frac{\sqrt{-(a_4\varrho^2-a_1)(b_4\varrho^2-b_1)}}{\sqrt{a_4b_4}\,\varrho^2\mp\sqrt{a_1b_1}}$$

und hat das Integral [8])

$$(16)\quad \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{-(a_4\varrho^2-a_1)(b_4\varrho^2-b_1)}}{\sqrt{a_4b_4}\,\varrho^2+\sqrt{a_1b_1}}$$

$$-\frac{\sqrt{a_1b_4}-\sqrt{a_4b_1}}{\sqrt[4]{a_1a_4b_1b_4}}\,\mathfrak{Ar}\,\begin{matrix}\mathfrak{Tg}\\ \mathfrak{Ctg}\end{matrix}\,\frac{\sqrt{-(a_4\varrho^2-a_1)(b_4\varrho^2-b_1)}}{a_4\varrho^2-a_1}\sqrt[4]{\frac{a_1b_4}{a_4b_1}}+C\qquad(-\pi\leqq C<+\pi)$$

für das konjugierte Flächensystem des Ringsystems erster Art und [8])

$$(16')\quad \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{-(a_4\varrho^2-a_1)(b_4\varrho^2-b_1)}}{\sqrt{a_4b_4}\,\varrho^2-\sqrt{a_1b_1}}$$

$$-\frac{\sqrt{a_1b_4}+\sqrt{a_4b_1}}{\sqrt[4]{a_1a_4b_1b_4}}\left(\begin{matrix}\operatorname{arc\,tg}\\ -\operatorname{arc\,ctg}\end{matrix}\frac{\sqrt{-(a_4\varrho^2-a_1)(b_4\varrho^2-b_1)}}{a_4\varrho^2-a_1}\sqrt[4]{\frac{a_1b_4}{a_4b_1}}\right)+C\qquad(-\pi\leqq C<+\pi)$$

für das konjugierte Flächensystem des Ringsystems zweiter Art. Geht man den angedeuteten Weg zurück, indem man zu Linienkoordinaten zurückkehrt, so erhält man aus (16) bzw. (16′) das Integral der Differentialgleichung (12) in Linienkoordinaten. Als konjugiertes Flächensystem zum Ringsystem erster Art ergeben sich die Trajektorflächen erster Art mit der Gleichung [9])

$$(17)\quad \operatorname{arc\,tg}\frac{2\mu p_6+(1-\mu^2)p_5}{(1-\mu^2)p_6-2\mu p_5}$$

$$-\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{-\Gamma_a\Gamma_b}}{\sqrt{a_4b_4}\,p_1-\sqrt{a_1b_1}\,p_4}+\frac{\sqrt{a_1b_4}-\sqrt{a_4b_1}}{\sqrt[4]{a_1a_4b_1b_4}}\,\mathfrak{Ar}\,\begin{matrix}\mathfrak{Tg}\\ \mathfrak{Ctg}\end{matrix}\,\frac{\sqrt{-\Gamma_a\Gamma_b}}{\Gamma_a}\sqrt[4]{\frac{a_1b_4}{a_4b_1}}=0\quad(-\infty<\mu<+\infty),$$

als konjugiertes Flächensystem zum Ringsystem zweiter Art die Trajektorflächen zweiter Art mit der Gleichung [9]):

$$(17')\quad \operatorname{arc\,tg}\frac{2\mu p_6+(1-\mu^2)p_5}{(1-\mu^2)p_6-2\mu p_5}$$

$$-\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{-\Gamma_a\Gamma_b}}{\sqrt{a_4b_4}\,p_1+\sqrt{a_1b_1}\,p_4}+\frac{\sqrt{a_1b_4}+\sqrt{a_4b_4}}{\sqrt[4]{a_1a_4b_1b_4}}\left(\begin{matrix}\operatorname{arc\,tg}\\ -\operatorname{arc\,ctg}\end{matrix}\frac{\sqrt{-\Gamma_a\Gamma_b}}{\Gamma_a}\sqrt[4]{\frac{a_1b_4}{a_4b_1}}\right)=0\ (-\infty<\mu<+\infty).$$

Als Flächenparameter im System der Trajektorflächen dient $\mu=\operatorname{tg}\frac{C}{2}$. Den Ringsystemen $R$, $R'$ erster und zweiter Art von Flächen zweiten Grades mit den Gleichungen (11), (11′) sind die Systeme $T$, $T'$ von Trajektorflächen erster und zweiter Art mit den Gleichungen (17), (17′) konjugiert. Die Diskriminantenfläche $\Delta$ der Differentialgleichung

---

[8]) In Gleichung (16) ist $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}$ oder $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}$ zu setzen, je nachdem $\sqrt[+]{\frac{-b_4\varrho^2+b_1}{a_4\varrho^2-a_1}}\sqrt[+]{\frac{a_1b_4}{a_4b_1}}\lesseqgtr 1$. Beide Ausdrücke stellen jedoch Zweige eines einzigen Gebildes dar, da sich $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}$ und $\mathfrak{Ar}\mathfrak{Ctg}$ für alle Argumente $z$ gemeinsam durch $\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|$ ausdrücken lassen. In Gleichung (16′) ist (im 3. Glied) sowohl die Funktion arc tg als auch arc ctg zu berücksichtigen.

[9]) Für die Integrationskonstante $C$ der Gleichungen (16) u. (16′) ist $C=2\operatorname{arc\,tg}\mu$ zu setzen.

(12) der Trajektorflächen hat die Gleichung

$$(18) \qquad \Delta(p_i) = 4p_1^2 p_4^2 (\sqrt{a_4 b_4}\, p_1 \pm \sqrt{a_1 b_1}\, p_4)^2 \, (a_4 p_1 + a_1 p_4)\, (b_4 p_1 + b_1 p_4) = 0$$

und enthält die beiden Paare von konjugiert imaginären Kongruenzstrahlenbüscheln erster Ordnung $p_1 = 0$, $p_4 = 0$ mit je einem reellen gemeinsamen Strahle. Diese beiden Strahlen sind isolierte Strahlen der Diskriminantenfläche. Ferner gehören die beiden einscharig in der Kongruenz enthaltenen Strahlenhyperboloide $H_1^2$, $H_2^2$ mit den Gleichungen (10) der Diskriminantenfläche an. Ihre Regelscharen bestehen aus den Rückkehrregelstrahlen der Trajektorflächen. Endlich gehört eine Fläche $O^2$ zweiten Grades zur Diskriminantenfläche. Ihre Regelschar hat die Gleichung:

$$(19) \qquad O^2 = \sqrt{a_4 b_4}\, p_1 \pm \sqrt{a_1 b_1}\, p_4 = 0\,, \quad p_2 - p_5 = 0\,, \quad p_3 - p_6 = 0$$

und ist singuläres Integral der Differentialgleichung (12). Die weitere Untersuchung der Systeme $T$, $T'$ von Trajektorflächen und der Diskriminantenfläche mit Hilfe der Gleichungen (12)—(19) gibt folgende Resultate:

*Zwei einscharig in der elliptischen linearen Kongruenz enthaltene Strahlenhyperboloide $H_1^2$, $H_2^2$ mit zwei gemeinsamen konjugiert imaginären Regelstrahlen bestimmen ein Ringsystem $R$ von $\infty^1$ sie ungleichartig berührenden Strahlenflächen zweiten Grades. Durch einen gegebenen Kongruenzstrahl des Ringgebietes zwischen den Leitflächen gehen zwei reelle Flächen des Ringsystems $R$. Dem Flächensystem $R$ (Gleichung 11) ist ein Flächensystem $T$ (Gleichung 17) von $\infty^1$ transzendenten Trajektorflächen erster Art konjugiert. Jede Trajektorfläche schneidet die $\infty^1$ Flächen des Ringsystems in konjugierten Richtungen. Das System $T$ der Trajektorflächen erster Art enthält außer $\infty^1$ transzendenten Flächen ein reelles Strahlenhyperboloid $O^2$. Es ist für die $\infty^1$ Flächen des Ringsystems $R$ polarinvariant und die Asymptotenfläche aller Trajektorflächen.*

*Jede reelle transzendente Trajektorfläche erster Art hat einen Regelstrahl $s_1$ der äußeren Leitfläche $H_1^2$ zum Rückkehrregelstrahl. Beide in $s_1$ ansetzende Flächenschalen haben je einen reellen Wenderegelstrahl und nähern sich dem Strahlenhyperboloid $O^2$ asymptotisch von außen in entgegengesetztem Umlaufsinne, wobei sie einander unendlich oft in je einem Regelstrahl schneiden. Ebenso ist ein Regelstrahl $s_2$ der inneren Leitfläche $H_2^2$ Rückkehrregelstrahl der Trajektorfläche; die beiden von $s_2$ ausgehenden Flächenschalen nähern sich dem Strahlenhyperboloid $O^2$ asymptotisch von innen in entgegengesetztem Umlaufsinne. Die Trajektorfläche ist für ihre Asymptotenfläche $O^2$ autopolar.*

*Die Wenderegelstrahlen aller Trajektorflächen erster Art erfüllen die Regelschar eines Strahlenhyperboloides $W^2$, ihre Rückkehrregelstrahlen erfüllen die Regelscharen der Strahlenhyperboloide $H_1^2$, $H_2^2$. Die Flächen $H_1^2$, $H_2^2$, $W^2$ und die reelle Asymptotenfläche $O^2$ liegen in einem Büschel von Regelflächen zweiten Grades.*

Die Abbildung der Kongruenz auf die euklidische Bildebene verwandelt die Trajektorflächen erster Art in die Kreistrajektorien erster Art (Nr. 5a). Die konjugierten Flächensysteme $R$, $T$ gehen also in die orthogonalen Kurvensysteme der Fig. 1 über. Sind die Leitflächen $H_1^2$, $H_2^2$ koachsiale Rotationshyperboloide, so liefern auch die achsennormalen Schnitte durch die Flächensysteme $R$, $T$ die Fig. 1.

*Zwei einscharig in der elliptischen linearen Kongruenz enthaltene Strahlenhyperboloide $H_1^2$, $H_2^2$ mit zwei gemeinsamen konjugiert imaginären Regelstrahlen bestimmen ein Ringsystem $R'$ von $\infty^1$ sie gleichartig berührenden Strahlenflächen zweiten Grades. Dem Flächensystem $R'$ (Gleichung 11') ist ein Flächensystem $T'$ (Gleichung 17') von $\infty^1$ Trajektorflächen zweiter Art konjugiert. Die Flächen beider Systeme schneiden einander in konjugierten Richtungen. Eine Trajektorfläche zweiter Art läuft im ganzen Ringgebiet zwischen $H_1^2$, $H_2^2$*

*hin und her. Jede reelle Flächenschale berührt dabei die vorhergehende und die folgende in einem Rückkehrregelstrahl, so daß die Rückkehrregelstrahlen abwechselnd auf $H_1^2$ oder $H_2^2$ liegen. Auf jeder Trajektorfläche zweiter Art liegt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Rückkehrregelstrahlen ein reeller Wenderegelstrahl. Das System $T'$ der Trajektorflächen zweiter Art enthält außer $\infty^1$ transzendenten Regelflächen eine imaginäre Regelfläche $O^2$ zweiten Grades. Sie ist für die $\infty^1$ Flächen des Ringsystems polarinvariant.*

*Die Trajektorfläche zweiter Art ist für die imaginäre Regelfläche $O^2$ autopolar.*

Dabei ist in Gleichung (17′) für das dritte Glied sowohl arc tg als auch arc ctg zu berücksichtigen. Die durch den arc tg dargestellten Flächenteile sind zu den durch den arc ctg dargestellten Flächenteilen in bezug auf die imaginäre Regelfläche $O^2$ reziprok polar.

*Die Wenderegelstrahlen der Trajektorflächen zweiter Art erfüllen die Regelschar eines Strahlenhyperboloids $W^2$, ihre Rückkehrregelstrahlen erfüllen die Regelscharen der Strahlenhyperboloide $H_1^2, H_2^2$. Die Flächen $H_1^2, H_2^2, W^2$ und die imaginäre Regelfläche $O^2$ liegen in einem Büschel von Regelflächen zweiten Grades.*

Die Abbildung der Kongruenz auf die euklidische Bildebene verwandelt die Trajektorflächen zweiter Art in die Kreistrajektorien zweiter Art (Nr. 5b, Fig. 2). In der Zeichnung sind nur die dem arc tg der Gleichung (17′) entsprechenden Flächenteile berücksichtigt. Sind die Leitflächen koachsiale Rotationshyperboloide, so entsteht Fig. 2 auch unmittelbar als achsennormaler Schnitt der Flächensysteme $R'$, $T'$.

8. Mit Benutzung von kartesischen rechtwinkligen Koordinaten $x, y, z$ lassen sich die Trajektorflächen erster Art darstellen durch die Gleichung:

$$\begin{aligned}(20)\quad &\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}-\operatorname{arc\,tg}\frac{2\mu z-(1-\mu^2)}{(1-\mu^2)z+2\mu}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{[-a_4(x^2+y^2)+a_1(1+z^2)][b_4(x^2+y^2)-b_1(1+z^2)]}}{\sqrt{a_4b_4}(x^2+y^2)+\sqrt{a_1b_1}(1+z^2)}\\ &+\frac{\sqrt{a_1b_4}-\sqrt{a_4b_1}}{\sqrt[4]{a_1a_4b_1b_4}}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\sqrt{[-a_4(x^2+y^2)+a_1(1+z^2)][b_4(x^2+y^2)-b_1(1+z^2)]}}{a_4(x^2+y^2)-a_1(1+z^2)}\sqrt[4]{\frac{a_1b_4}{a_4b_1}}=0,\end{aligned}$$

die Trajektorflächen zweiter Art durch die Gleichung:

$$\begin{aligned}(20')\quad &\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}-\operatorname{arc\,tg}\frac{2\mu z-(1-\mu^2)}{(1-\mu^2)z+2\mu}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{[-a_4(x^2+y^2)+a_1(1+z^2)][b_1(x^2+y^2)-b_1(1+z^2)]}}{\sqrt{a_4b_4}(x^2+y^2)-\sqrt{a_1b_1}(1+z^2)}\\ &+\frac{\sqrt{a_1b_4}+\sqrt{a_4b_1}}{\sqrt[4]{a_1a_4b_1b_4}}\left(\begin{matrix}\operatorname{arc\,tg}\\-\operatorname{arc\,ctg}\end{matrix}\frac{\sqrt{[-a_4(x^2+y^2)+a_1(1+z^2)][b_4(x^2+y^2)-b_1(1+z^2)]}}{a_4(x^2+y^2)-a_1(1+z^2)}\sqrt[4]{\frac{a_1b_4}{a_4b_1}}\right)=0.\end{aligned}$$

Ist in der Gleichung (17′) oder (20′) die Zahl

$$\tau=\frac{\sqrt{a_1b_4}+\sqrt{a_4b_1}}{\sqrt[4]{a_1a_4b_1b_4}}$$

rational, so lassen sich die sämtlichen arc tg-Glieder nach dem Additionstheorem der arc tg-Funktion zu einem einzigen Gliede zusammenfassen. Die Trajektorflächen zweiter Art sind in diesem Falle algebraisch. Ein beweglicher reeller Regelstrahl, der die Fläche beschreibt, kehrt nach Durchlaufen einer endlichen (geraden) Anzahl von Rückkehrregelstrahlen und Wenderegelstrahlen in seine Ausgangslage zurück. Die Schließungsbedingung der algebraischen Trajektorflächen ist derjenigen der algebraischen Kreistrajektorien analog (Gleichung 8):

*Eine algebraische Trajektorfläche zweiter Art schließt sich reell nach einer endlichen Anzahl $m$ von Umläufen im Ringgebiet zwischen zwei Strahlenhyperboloiden. Ist $2n$ die*

*Anzahl der unterwegs angetroffenen Rückkehrregelstrahlen (sowie der reellen Wenderegelstrahlen), so gilt:*

$$\frac{m}{n} = \frac{(g-1)^2}{2g}, \text{ wo } g = 2, 3, 4, \ldots$$

*Die Umlaufzahlen der verschiedenen Typen algebraischer Trajektorflächen zweiter Art sind die Quadrate der natürlichen Zahlen.*

**9.** In Fig. 1 sind die beiden Spitzen $S_1$, $S_2$ der Kreistrajektorie inverse Punkte für ihren Asymptotenkreis $o^2$, und die ganze Kurve besteht aus Paaren inverser Punkte für diesen Kreis. Insbesondere werden die $\infty^1$ Doppelpunkte der Kurve durch die Inversion am Kreise $o^2$ auf der Geraden $S_1$, $S_2$ involutorisch zu Paaren geordnet. Die Schnittpunkte von $S_1 S_2$ mit $o^2$ sind die Doppelelemente der Involution und die beiden Häufungspunkte der Kurvendoppelpunkte. Da zwei für einen Kreis inversen Punkten der Bildebene zwei reziprok polare Kongruenzstrahlen in bezug auf eine Fläche zweiten Grades entsprechen, ergibt sich folgendes Theorem:

*Eine Trajektorfläche erster Art ist autopolar im polaren Raume ihrer Asymptotenfläche $O^2$, ihre Regelstrahlen sind Paare von reziproken Polaren für das Strahlenhyperboloid $O^2$. Insbesondere ordnet dieses die beiden Rückkehrregelstrahlen und die beiden isolierten Strahlen der Trajektorfläche einander zu und paart ebenso ihre $\infty^1$ Doppelregelstrahlen involutorisch. Die Rückkehrregelstrahlen, isolierten Regelstrahlen und die Doppelregelstrahlen der Trajektorfläche liegen in einer für $O^2$ autopolaren Regelschar $\mathfrak{R}^2$ zweiter Ordnung. Die beiden reellen Schnittstrahlen dieser Regelschar $\mathfrak{R}^2$ mit der Regelschar der Asymptotenfläche $O^2$ sind Häufungsstellen der Doppelregelstrahlen, ohne selber der Trajektorfläche anzugehören.*

**10.** Die vollständige Behandlung der übrigen Arten von Trajektorflächen der elliptischen linearen Kongruenz führt auf folgende Ergebnisse:

*Zwei einscharig in der elliptischen linearen Kongruenz enthaltene Strahlenhyperboloide $H_1^2$, $H_2^2$, die einander längs eines Regelstrahles $b$ berühren, bestimmen ein Ringsystem $R$ von Strahlenflächen zweiten Grades. Die $\infty^1$ Flächen des Ringsystems berühren die beiden Leitflächen $H_1^2$, $H_2^2$ ungleichartig oder gleichartig, je nachdem $H_1^2$ und $H_2^2$ einander einschließen oder ausschließen. Dem Flächensystem $R$ ist ein System $T$ von Trajektorflächen dritter Art konjugiert. Eine Trajektorfläche dritter Art geht bei der Abbildung der Kongruenz in eine Kreistrajektorie dritter Art über (Fig. 3). Das Flächensystem $T$ von Trajektorflächen dritter Art enthält ein reelles Strahlenhyperboloid $O^2$. Es ist für die $\infty^1$ Flächen zweiten Grades des Ringsystems $R$ autopolar und berührt die Hyperboloide $H_1^2$, $H_2^2$ längs ihres gemeinsamen Strahles $b$.*

*Eine Trajektorfläche dritter Art hat einen Rückkehrregelstrahl $s_4$ auf dem Hyperboloid $H_2^2$ (Bildpunkt $S_4$) und einen Rückkehrregelstrahl $s_5$ auf dem Hyperboloid $H_1^2$ (Bildpunkt $S_5$). Die vier von den beiden Rückkehrregelstrahlen ausgehenden Flächenschalen umschließen das Hyperboloid $O^2$ paarweise von außen und innen und berühren es längs des Regelstrahles $b$ (Bildpunkt $B$). Die Trajektorfläche dritter Art ist für das Hyperboloid $O^2$ autopolar.*

Zwei Leitflächen $H_1^2$, $H_2^2$, die einander in zwei reellen Regelstrahlen $r_1$, $r_2$ schneiden, führen in entsprechender Weise auf zwei Ringsysteme und damit auf die Trajektorflächen vierter Art in der elliptischen linearen Kongruenz. Durch die beiden Tripel von Gleichungen

$$(21) \qquad \begin{aligned} H_1 &= p_1 + p_4 + 2c\, p_5 = 0, \quad p_2 - p_5 = 0, \quad p_3 - p_6 = 0, \\ H_2 &= p_1 + p_4 + \frac{2}{c}\, p_5 = 0, \quad p_2 - p_5 = 0, \quad p_3 - p_6 = 0 \end{aligned}$$

sind zwei Strahlenhyperboloide $H_1^2, H_2^2$ gegeben, die einander in den reellen Strahlen

$$r_1\colon\ p_2 = p_5 = 0, \quad p_1 = -1, \quad p_3 = p_6 = +1, \quad p_4 = +1,$$
$$r_2\colon\ p_2 = p_5 = 0, \quad p_1 = -1, \quad p_3 = p_6 = -1, \quad p_4 = +1$$

schneiden. Durch sie sind zwei Systeme von Trajektorflächen vierter Art bedingt. Die Gleichungen der Regelscharen dieser beiden Systeme von Trajektorflächen vierter Art lauten:

$$\left.\begin{aligned} &(22)\quad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\frac{2p_6 + \lambda(p_1 - p_4)}{2\lambda p_6 + (p_1 - p_4)} + \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\frac{\sqrt{-H_1H_2\delta}}{O_2} - a\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\frac{\sqrt{-H_1H_2\delta}}{aO_2} = 0 \\ &(22')\quad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\frac{2p_6 + \lambda(p_1 - p_4)}{2\lambda p_6 + (p_1 - p_4)} + \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\frac{\sqrt{H_1H_2\delta}}{O_1} - \sqrt{1-a^2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\frac{\sqrt{H_1H_2\delta}}{\sqrt{1-a^2}\,O_1} = 0 \end{aligned}\right\}(-1<\lambda<+1),$$

wo $a = \dfrac{1-c}{\sqrt{2+2c^2}}$ und $\delta = 1 - 2a^2$ gesetzt ist. Die Gleichungen

$$(23)\qquad O_1 = p_1 + 2p_5 + p_4 = 0,$$
$$(23')\qquad O_2 = p_1 - 2p_5 + p_4 = 0$$

stellen zwei Regelscharen zweiter Ordnung dar. Ihre Trägerflächen $O_1^2, O_2^2$ sind selbst Trajektorflächen im ersten bzw. zweiten Flächensystem und sind für die $\infty^1$ Regelflächen des ersten bzw. zweiten Ringsystems autopolar. Alle Trajektorflächen vierter Art des ersten Flächensystems sind für $O_1^2$ autopolar, alle Trajektorflächen des zweiten Flächensystems sind es für $O_2^2$. Die Fig. 5 zeigt die Bilder der Trajektorflächen vierter Art. Im ganzen ergibt sich das Resultat:

*Zwei einscharig in der elliptischen linearen Kongruenz enthaltene Strahlenhyperboloide $H_1^2$, $H_2^2$ (Bildkreise $K_1^2$, $K_2^2$), die einander in zwei reellen Regelstrahlen $r_1$, $r_2$ schneiden, bestimmen zwei Ringsysteme von Regelflächen zweiten Grades. Die $\infty^1$ Flächen des einen Ringsystems berühren die beiden Leitflächen $H_1^2$, $H_2^2$ gleichartig, die $\infty^1$ Flächen des anderen Ringsystems berühren sie ungleichartig. Jedem der beiden Ringsysteme ist ein System von Trajektorflächen vierter Art konjugiert.*

*Die Trajektorfläche vierter Art (Gleichung 22 oder 22′) ist i. a. transzendent und hat vier Rückkehrregelstrahlen $s_6, s_6', \bar{s}_6, \bar{s}_6'$. Sie hat vier reelle Flächenschalen, deren zwei, $t_6$, $t_6'$, vom Rückkehrregelstrahl $s_6$ (Bildpunkt $S_6$) zum Rückkehrregelstrahl $\bar{s}_6$ (Bildpunkt $\bar{S}_6$) führen, während die beiden anderen, $\bar{t}_6, \bar{t}_6'$, von $s_6'$ (Bildpunkt $S_6'$) nach $\bar{s}_6'$ (Bildpunkt $\bar{S}_6'$) laufen. Außerdem berühren die Schalen $t_6, \bar{t}_6$ einander im Regelstrahl $r_1$ (Bildpunkt $P_1$) und die Schalen $t_6', \bar{t}_6'$ berühren einander im Regelstrahle $r_2$ (Bildpunkt $P_2$). Diese vier Flächenschalen werden in den Regelstrahlen $r_1$ und $r_2$ paarweise von einer Regelfläche $O_1^2$ zweiten Grades berührt und die Trajektorfläche vierter Art ist für die Regelfläche $O_1^2$ autopolar. Die Regelstrahlen und insbesondere die Rückkehrregelstrahlen $s_6, s_6'$, und $\bar{s}_6, \bar{s}_6'$ sind paarweise reziproke Polaren im polaren Raume von $O_1^2$.*

Für rationale Werte von $a$ in (22) oder für rationale Werte von $\sqrt{1-a^2}$ in (22′) ist die Trajektorfläche vierter Art algebraisch.

**11.** Von zwei Regelscharen $\mathfrak{K}_1^2, \mathfrak{K}_2^2$ zweiter Ordnung der elliptischen linearen Kongruenz sei die erste in zwei konjugiert imaginäre Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallen. Ihre beiden Ebenen gehen durch den reellen Kongruenzstrahl $k_1$ und je eine der beiden konjugiert imaginären Leitgeraden. Die zweite Regelschar $\mathfrak{K}_2^2$ liege auf dem Strahlenhyperboloid $K_2^2$. Der reelle Kongruenzstrahl $k_1'$ sei die reziproke Polare von $k_1$ im polaren Raume von $K_2^2$. Die $\infty^1$ einscharig in der Kongruenz enthaltenen Flächen

zweiten Grades, die $K_2^2$ berühren und durch $k_1$ gehen, bilden ein entartetes Ringsystem. Sein Bild ist das Kreissystem in Fig. 6, gebildet aus allen Kreisen, die den festen Kreis $K_2^2$ berühren und durch den Punkt $K_1$ gehen. Die Kreistrajektorien fünfter Art aber stellen die Trajektorflächen fünfter Art dar, und es folgen die Sätze:

*Durch eine Regelfläche $K_2^2$ zweiten Grades und einen Kongruenzstrahl $k_1$ ist ein entartetes Ringsystem $R$ von $\infty^1$ Regelflächen zweiten Grades bestimmt, die $K_2^2$ berühren und durch $k_1$ gehen. Durch einen reellen Kongruenzstrahl gehen keine oder zwei reelle Flächen des Ringsystems, je nachdem der Strahl von $k_1$ durch die Fläche $K_2^2$ getrennt wird oder nicht. Dem entarteten Ringsystem ist ein System $T$ von transzendenten Trajektorflächen fünfter Art konjugiert.*

*Die Trajektorfläche fünfter Art besitzt zwei konjugiert imaginäre windschiefe Leitgeraden und zwei reelle Flächenschalen $t_7$, $t_7'$, die einander in dem Rückkehrregelstrahl $s_7$ (Bildpunkt $S_7$) berühren und je einen reellen Wenderegelstrahl enthalten. Beide Flächenschalen haben den Kongruenzstrahl $k_1$ zum asymptotischen Strahl, indem sie ihn in entgegengesetztem Umlaufsinne umkreisen; dabei entstehen $\infty^1$ Doppelregelstrahlen der Trajektorfläche, in denen ihre beiden Schalen einander schneiden. Endlich hat die Trajektorfläche fünfter Art einen isolierten Regelstrahl $k_1'$. Die Strahlen $k_1$, $k_1'$ sind reziproke Polaren für $K_2^2$.*

*Die $\infty^1$ transzendenten Regelflächen eines Systems $T$ von Trajektorflächen fünfter Art haben ihren asymptotischen Regelstrahl $k_1$ und ihren isolierten Regelstrahl $k_1'$ gemeinsam. Ihre Rückkehrregelstrahlen erfüllen die Regelschar eines Strahlenhyperboloides $K_2^2$, und die Strahlen $k_1$, $k_1'$ sind zwei reziproke Polaren für $K_2^2$.*

Im polaren Raume der Regelfläche $K_2^2$ entspricht der Trajektorfläche fünfter Art mit dem Rückkehrregelstrahl $s_7$, dem asymptotischen Regelstrahle $k_1$ und dem isolierten Regelstrahle $k_1'$ eine andere Trajektorfläche fünfter Art mit dem Rückkehrregelstrahle $s_7$, dem isolierten Regelstrahle $k_1$ und dem asymptotischen Regelstrahle $k_1'$ (Fig. 6).

Zerfallen zwei Regelscharen zweiter Ordnung $\mathfrak{K}_1^2$, $\mathfrak{K}_2^2$ der elliptischen linearen Kongruenz bzw. in zwei konjugiert imaginäre Strahlenbüschel erster Ordnung mit dem reellen gemeinsamen Strahle $r_1$ und in zwei konjugiert imaginäre Strahlenbüschel erster Ordnung mit dem reellen gemeinsamen Strahle $r_2$, so sind $r_1$, $r_2$ und die Leitgeraden der Kongruenz die Grundstrahlen eines Büschels von $\infty^1$ Regelscharen zweiter Ordnung. Das konjugierte Flächensystem ist gleichfalls ein Büschel von Regelscharen zweiter Ordnung, und die Trägerflächen beider Büschel sind füreinander autopolar. Es ergeben sich daher keine weiteren Trajektorflächen.

Die fünf verschiedenen Arten von Trajektorflächen in der elliptischen linearen Kongruenz können durch keine reellen Kollineationen ineinander überführt werden.

### B. Die Trajektorflächen in der hyperbolischen linearen Kongruenz.

**12.** Die hyperbolische lineare Kongruenz sei durch die Gleichungen gegeben:

$$p_2 - p_5 = 0, \qquad p_3 + p_6 = 0. \tag{24}$$

Zwei einscharig in der Kongruenz enthaltene Strahlenhyperboloide $H_1^2$, $H_2^2$, die ohne Einschränkung der Allgemeinheit konzentrisch angenommen werden können und einander in zwei reellen Regelstrahlen $r_1$, $r_2$ schneiden, sind bestimmt durch die Gleichungen

$$\Gamma_a = a_1 p_4 + a_4 p_1 = 0, \qquad \Gamma_b = b_1 p_4 + b_4 p_1 = 0 \tag{25}$$

mit $a_1 > 0$, $a_4 > 0$, $b_1 > 0$, $b_4 > 0$ oder $\operatorname{sgn} a_4 = -\operatorname{sgn} a_1$ und zugleich $\operatorname{sgn} b_4 = -\operatorname{sgn} b_1$[10]. Die beiden linearen Strahlenkomplexe $\Gamma_a$, $\Gamma_b$ mit diesen Gleichungen schneiden die Kon-

[10]) Die Fälle $a_1 > 0$, $a_4 > 0$, $b_1 > 0$, $b_4 < 0$ oder $b_1 > 0$, $b_4 > 0$, $a_1 > 0$, $a_4 < 0$ führen auf Ringsysteme aus imaginären Flächen zweiten Grades mit imaginären Polarsystemen.

gruenz in den Regelscharen $\mathfrak{H}_1^2, \mathfrak{H}_2^2$ der Hyperboloide $H_1^2, H_2^2$. Ihre beiden gemeinsamen Regelstrahlen $r_1, r_2$ haben die Gleichungen:

$$p_1 = p_4 = 0,\ p_5 = p_6 \quad \text{und} \quad p_1 = p_4 = 0,\ p_5 = -p_6.$$

Die beiden Strahlenhyperboloide werden von zwei Ringsystemen von je $\infty^1$ Regelflächen zweiten Grades umhüllt. Die Flächen des ersten Ringsystems berühren $H_1^2, H_2^2$ ungleichartig, die des zweiten berühren gleichartig. Die Gleichungen ihrer $\infty^1$ Regelscharen sind:

$$\left.\begin{aligned} &(26)\ \sqrt{a_1}(\sqrt{a_4 b_4}\,p_1 - \sqrt{a_1 b_1}\,p_4) - (\sqrt{a_1 b_4} + \sqrt{a_4 b_1})\,[\sqrt{a_4}\,\lambda p_5 - \sqrt{\lambda^2 a_4 - a_1}\,p_6] = 0 \\ &(26')\ \sqrt{a_1}(\sqrt{a_4 b_4}\,p_1 + \sqrt{a_1 b_1}\,p_4) - (\sqrt{a_1 b_4} - \sqrt{a_4 b_1})\,[\sqrt{a_4}\,\lambda p_5 - \sqrt{\lambda^2 a_4 - a_1}\,p_6] = 0 \end{aligned}\right\} (-\infty < \lambda < +\infty).$$

Jedes der beiden Flächensysteme sendet durch einen gegebenen Kongruenzstrahl $s(p_i)$ zwei (reelle oder imaginäre) Regelflächen zweiten Grades, bedingt also in der Kongruenz ein doppeltes Richtungsfeld. Die beiden Flächenparameter sind:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{a_4}\,\frac{p_5(\sqrt{a_4 b_4}\,p_1 \mp \sqrt{a_1 b_1}\,p_4) - p_6\sqrt{+\,\Gamma_a \Gamma_b}}{p_1 p_4(\sqrt{a_1 b_4} \pm \sqrt{a_4 b_1})}.$$

Ganz wie in Nr. 7 dieser Abhandlung ist nun die Differentialgleichung der beiden Ringsystemen konjugierten Flächensysteme aufzustellen und zu integrieren. Die konjugierten Flächensysteme $T, T'$ bestehen aus Trajektorflächen sechster und siebenter Art mit den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &(27)\ \mathfrak{Ar}\,\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\frac{(1+\mu^2)\,p_5 + 2\mu p_6}{(1+\mu^2)\,p_6 + 2\mu p_5} \\ &-\mathfrak{Ar}\,\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\frac{\sqrt{\Gamma_a \Gamma_b}}{\sqrt{a_4 b_4}\,p_1 - \sqrt{a_1 b_1}\,p_4} + \frac{\sqrt{a_1 b_4} - \sqrt{a_4 b_1}}{\sqrt[4]{a_1 a_4 b_1 b_4}}\left(\begin{matrix}\text{arc tg}\\ -\text{arc ctg}\end{matrix}\,\frac{\sqrt{\Gamma_a \Gamma_b}}{\Gamma_a}\sqrt[4]{\frac{a_1 b_4}{a_4 b_1}}\right) = 0 \\ &(27')\ \mathfrak{Ar}\,\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\frac{(1+\mu^2)\,p_5 + 2\mu p_6}{(1+\mu^2)\,p_6 + 2\mu p_5} \\ &-\mathfrak{Ar}\,\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\frac{\sqrt{\Gamma_a \Gamma_b}}{\sqrt{a_4 b_4}\,p_1 + \sqrt{a_1 b_1}\,p_4} + \frac{\sqrt{a_1 b_4} + \sqrt{a_4 b_1}}{\sqrt[4]{a_1 a_4 b_1 b_4}}\,\mathfrak{Ar}\,\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\frac{\sqrt{\Gamma_a \Gamma_b}}{\Gamma_a}\sqrt[4]{\frac{a_1 b_4}{a_4 b_1}} = 0 \end{aligned}\right\} (-1 < \mu < +1).$$

In jeder Gleichung gilt im ersten und zweiten Glied $\mathfrak{Ar}\,\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}$ für $p_5 \lesseqgtr p_6$, im dritten Gliede von (27′) $\mathfrak{Ar}\,\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}$, je nachdem $\frac{\sqrt{\Gamma_a \Gamma_b}}{\Gamma_a}\sqrt[4]{\frac{a_1 b_4}{a_4 b_1}} \lesseqgtr 1$. In (27) ist im dritten Glied sowohl die Funktion arc tg als auch arc ctg zu berücksichtigen.

Die Diskriminantenfläche der Differentialgleichung lautet:

$$(28)\quad \Delta(p_i) = 4p_1^2 p_4^2(\sqrt{a_4 b_4}\,p_1 \pm \sqrt{a_1 b_1}\,p_4)^2\,(a_1 p_4 + a_4 p_1)\,(b_1 p_4 + b_4 p_1) = 0.$$

Die beiden durch $a_1 p_4 + a_4 p_1 = 0$ und $b_1 p_4 + b_4 p_1 = 0$ gegebenen Regelscharen zweiter Ordnung $\mathfrak{H}_1^2, \mathfrak{H}_2^2$ werden von den Rückkehrregelstrahlen der Flächensysteme $T, T'$ von Trajektorflächen sechster und siebenter Art erfüllt. Die beiden Gleichungen

$$\sqrt{a_4 b_4}\,p_1 + \sqrt{a_1 b_1}\,p_4 = 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{a_4 b_4}\,p_1 - \sqrt{a_1 b_1}\,p_4 = 0$$

stellen gleichfalls zwei Regelscharen zweiter Ordnung dar, deren Trägerflächen $O_1^2, O_2^2$ als singuläre Integralflächen zur Diskriminantenfläche gehören. Das Hyperboloid $O_1^2$ ist eine spezielle Trajektorfläche sechster Art, $O_2^2$ eine solche siebenter Art.

Aus den Gleichungen (27) und (27′), welche die (in der Kongruenz enthaltenen) Regelscharen der Trajektorflächen sechster und siebenter Art bestimmen, erhält man

die Gleichungen dieser Flächen in kartesischen Koordinaten:

$$(29)\quad \mathfrak{Ar}\,\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\frac{y}{x} - \mathfrak{Ar}\,\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\frac{2\mu z + (1+\mu^2)}{(1+\mu^2)z + 2\mu}$$

$$- \mathfrak{Ar}\,\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\frac{\sqrt{[a_4(y^2-x^2)+a_1(1-z^2)]\,[b_4(y^2-x^2)+b_1(1-z^2)]}}{\sqrt{a_4 b_4}\,(y^2-x^2) - \sqrt{a_1 b_1}\,(1-z^2)}$$

$$+\frac{\sqrt{a_1 b_4}-\sqrt{a_4 b_1}}{\sqrt[4]{a_1 a_4 b_1 b_4}}\left(\begin{matrix}\operatorname{arc\,tg}\\ -\operatorname{arc\,ctg}\end{matrix}\frac{\sqrt{[a_4(y^2-x^2)+a_1(1-z^2)][b_4(y^2-x^2)+b_1(1-z^2)]}}{a_4(y^2-x^2)+a_1(1-z^2)}\sqrt[4]{\frac{a_1 b_4}{a_4 b_1}}\right)=0,$$

$$(29')\quad \mathfrak{Ar}\,\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\frac{y}{x} - \mathfrak{Ar}\,\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\frac{2\mu z + (1+\mu^2)}{(1+\mu^2)z + 2\mu}$$

$$- \mathfrak{Ar}\,\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\frac{\sqrt{[a_4(y^2-x^2)+a_1(1-z^2)]\,[b_4(y^2-x^2)+b_1(1-z^2)]}}{\sqrt{a_4 b_4}\,(y^2-x^2) + \sqrt{a_1 b_1}\,(1-z^2)}$$

$$+\frac{\sqrt{a_1 b_4}+\sqrt{a_4 b_1}}{\sqrt[4]{a_1 a_4 b_1 b_4}}\,\mathfrak{Ar}\,\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\frac{\sqrt{[a_4(y^2-x^2)+a_1(1-z^2)]\,[b_4(y^2-x^2)+b_1(1-z^2)]}}{a_4(y^2-x^2)+a_1(1-z^2)}\sqrt[4]{\frac{a_1 b_4}{a_4 b_1}}=0.$$

In (29) und (29′) gilt im zweiten Gliede $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}$ oder $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}$, je nachdem $|z| \gtrless 1$. (In sämtlichen Gliedern ist für Argumentwerte $\mu > 1$ der $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\mu$ durch den $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\,\mu$ zu ersetzen.) Ihre Schnittkurven senkrecht zur $z$-Achse, $z =$ konst., erhalten mit $x = \varrho\,\mathfrak{Sin}\,\varphi$, $y = \varrho\,\mathfrak{Cos}\,\varphi$ für $y \gtrless x$, $|z| \gtrless 1$ bzw. $x = \varrho\,\mathfrak{Cos}\,\varphi$, $y = \varrho\,\mathfrak{Sin}\,\varphi$ für $y \gtrless x$, $|z| \lessgtr 1$ die Form:

$$(30)\quad \varphi = \mathfrak{Ar}\,\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\frac{\sqrt{[a_4\varrho^2+a_1(1-z^2)]\,[b_4\varrho^2+b_1(1-z^2)]}}{\sqrt{a_4 b_4}\,\varrho^2 - \sqrt{a_1 b_1}(1-z^2)}$$

$$-\frac{\sqrt{a_1 b_4}-\sqrt{a_4 b_1}}{\sqrt[4]{a_1 a_4 b_1 b_4}}\left(\begin{matrix}\operatorname{arc\,tg}\\ -\operatorname{arc\,ctg}\end{matrix}\frac{\sqrt{[a_4\varrho^2+a_1(1-z^2)][b_4\varrho^2+b_1(1-z^2)]}}{a_4\varrho^2+a_1(1-z^2)}\sqrt[4]{\frac{a_1 b_4}{a_4 b_1}}\right)+c \quad (-\infty<c<+\infty),$$

$$(30')\quad \varphi = \mathfrak{Ar}\,\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\frac{\sqrt{[a_4\varrho^2+a_1(1-z^2)]\,[b_4\varrho^2+b_1(1-z^2)]}}{\sqrt{a_4 b_4}\,\varrho^2 + \sqrt{a_1 b_1}(1-z^2)}$$

$$-\frac{\sqrt{a_1 b_4}+\sqrt{a_4 b_1}}{\sqrt[4]{a_1 a_4 b_1 b_4}}\,\mathfrak{Ar}\,\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\frac{\sqrt{[a_4\varrho^2+a_1(1-z^2)]\,[b_4\varrho^2+b_1(1-z^2)]}}{a_4\varrho^2+a_1(1-z^2)}\sqrt[4]{\frac{a_1 b_4}{a_4 b_1}}+c \quad (-\infty<c<+\infty).$$

Die Schnittkurve des Hyperboloides $O_1^2$ mit der Ebene $z =$ *konst.* ist die Hyperbel mit der Gleichung

$$(31)\qquad \sqrt{a_4 b_4}(y^2-x^2) + \sqrt{a_1 b_1}(1-z^2) = 0.$$

Geht jetzt in der Gleichung (30) $\varrho^2 \to -\sqrt{\frac{a_1 b_1}{a_4 b_4}}\,(1-z^2)$, so nähert man sich der durch (31) gegebenen Hyperbel; gleichzeitig ergibt sich:

$$\lim_{\varrho^2 \to -\sqrt{\frac{a_1 b_1}{a_4 b_4}}(1-z^2)} \varphi = i\infty.$$

Die Trajektorflächen sechster Art haben daher das reelle Strahlenhyperboloid $O_1^2$ zur Asymptotenfläche ihrer imaginären Flächenschalen. Das Gesamtergebnis lautet folgendermaßen:

*Zwei einscharig in der hyperbolischen linearen Kongruenz enthaltene Strahlenhyperboloide $H_1^2$, $H_2^2$ mit zwei reellen gemeinsamen Regelstrahlen $r_1$, $r_2$ bestimmen ein Ringsystem $R$ von $\infty^1$ sie ungleichartig berührenden Strahlenflächen zweiten Grades* (*Gleichung* 26). *Dem*

*Flächensystem $R$ ist ein Flächensystem $T$ von $\infty^1$ transzendenten Trajektorflächen sechster Art konjugiert (Gleichung 27 und 29). Durch einen gegebenen Kongruenzstrahl gehen zwei reelle oder imaginäre Flächenschalen des Systems $T$. Die Regelscharen von $H_1^2$, $H_2^2$ bestehen aus den Rückkehrregelstrahlen der Trajektorflächen sechster Art. Zu den Trajektorflächen sechster Art gehört außer $\infty^1$ transzendenten Flächen ein reelles Strahlenhyperboloid $O_1^2$; es ist für die $\infty^1$ Strahlenflächen zweiten Grades des Ringsystems autopolar. Die transzendente Trajektorfläche sechster Art hat das reelle Strahlenhyperboloid $O_1^2$ zur Asymptotenfläche ihrer imaginären Flächenschalen und ist für $O_1^2$ autopolar.*

Dabei ist in Gleichung (27) und (29) im dritten Gliede sowohl arc tg als auch arc ctg zu berücksichtigen. Die durch den arc tg dargestellten Flächenteile sind zu den durch den arc ctg dargestellten Flächenteilen in bezug auf das Strahlenhyperboloid $O_1^2$ reziprok polar.

*Die Strahlenhyperboloide $H_1^2$, $H_2^2$ bestimmen außerdem ein Ringsystem $R'$ von $\infty^1$ sie gleichartig berührenden Strahlenflächen zweiten Grades (Gleichung 26′). Dem Flächensystem $R'$ ist ein Flächensystem $T'$ von $\infty^1$ transzendenten Trajektorflächen siebenter Art konjugiert (Gleichung 27′ und 29′). Das Flächensystem $R'$ enthält ein reelles Strahlenhyperboloid $O_2^2$. Es ist für die $\infty^1$ Flächen zweiten Grades des Ringsystems $R'$ autopolar. Die transzendente Trajektorfläche siebenter Art hat mit dem Strahlenhyperboloid $O_2^2$ die beiden reellen Regelstrahlen $r_1$, $r_2$ gemein und ist für $O_2^2$ autopolar.*

Ist in Gleichung (29′) der Ausdruck $\tau = \dfrac{\sqrt{a_1 b_4} + \sqrt{a_4 b_1}}{\sqrt[4]{a_1 a_4 b_1 b_4}}$ rational, so ist die Trajektorfläche siebenter Art algebraisch, ein Verhalten, das dem der Trajektorfläche zweiter Art in Nr. 8 bei gleicher Vorbedingung entspricht. Eine Schließungsbedingung wie dort ist damit im Reellen nicht erfüllt, weil $\mathfrak{Tg}$ im Reellen keine periodische Funktion ist.

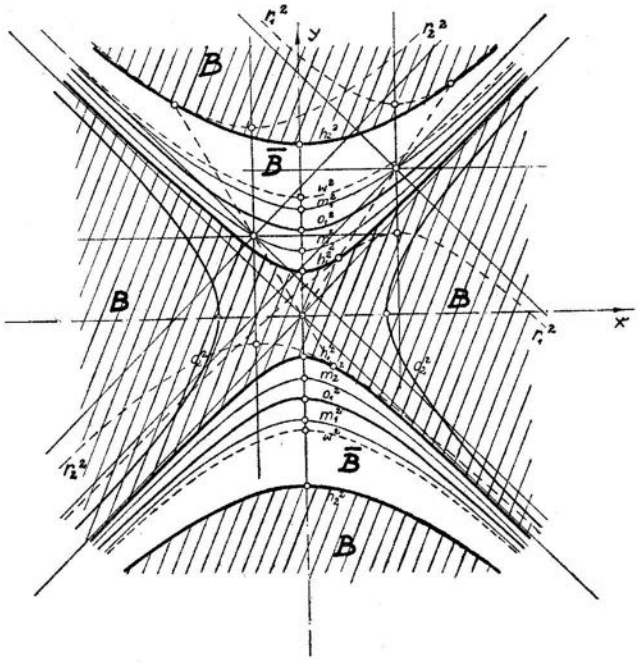


Fig. 7.

Fig. 7 stellt einen Schnitt senkrecht zur $z$-Achse durch die Flächensysteme $R$, $R'$ dar. Die Hyperbeln $h_1^2$, $h_2^2$ sind die Schnittkurven der Hyperboloide $H_1^2$, $H_2^2$. Sie werden von den Flächen zweiten Grades der Ringsysteme $R$ oder $R'$ ungleichartig oder gleichartig berührt. Die reellen Flächen beider Ringsysteme erfüllen den Bereich $B$. (Als Beispiele der ungleichartigen und der gleichartigen Berührung sind die Hyperbeln $r_1^2$ und $r_2^2$ verzeichnet, $m_1^2$, $m_2^2$ sind die entsprechenden Mittelpunktsorte.) Die reellen transzendenten Trajektorflächen sechster und siebenter Art erfüllen gleichfalls den Bereich $B$, während im Streifenbereiche $\overline{B}$ zwischen den Hyperboloiden keine reellen Flächenschalen dieser Flächen verlaufen. Die reelle Asymptotenfläche $O_1^2$ für die imaginären Schalen der Trajektorflächen sechster Art verläuft im Bereiche $\overline{B}$ (Schnittkurve $o_1^2$). Die Hyperbel $o_2^2$ ist die Schnittkurve des Hyperboloides $O_2^2$.

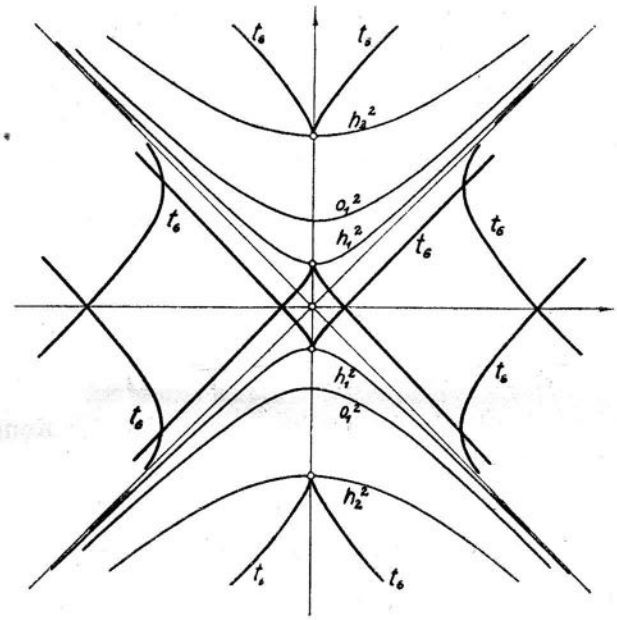


Fig. 8.

In Fig. 8 ist die Kurve $t_6$ der Schnitt einer Ebene senkrecht zur $z$-Achse mit der Trajektorfläche sechster Art (Gleichung 30, $c = 0$), in Fig. 9 stellt die Kurve $t_7$ den entsprechenden Schnitt durch die Trajektorfläche siebenter Art dar (Gleichung 30′, $c = 0$).

Endlich ergibt sich, daß die Trajektorflächen sechster und siebenter Art nur konjugiert imaginäre windschiefe Wenderegelstrahlen besitzen. Ihr geometrischer Ort ist ein reelles Strahlenhyperboloid $W^2$ im Bereiche $\overline{B}$ (Schnittkurve $w^2$ in Fig. 7).

**13.** Zwei reelle mit ihren Regelscharen in der Kongruenz enthaltene Regelflächen zweiten Grades, die einander längs eines Kongruenzstrahles berühren, sind Leitflächen eines Ringsystems von Regelflächen zweiten Grades. Die konjugierten Flächen sind die Trajektorflächen achter Art. Eine Trajektorfläche achter Art ist für eine reelle Strahlenfläche $O^2$ zweiten Grades autopolar.

Zwei je einscharig in der Kongruenz enthaltene Strahlenhyperboloide $H_1^2$, $H_2^2$ mit zwei konjugiert imaginären gemeinsamen Regelstrahlen bedingen in der Kongruenz ein Ringsystem $R$ gleichartig berührender und ein Ringsystem $R'$ ungleichartig berührender Flächen zweiten Grades. Die beiden zu $R$, $R'$ konjugierten Flächensysteme $T$, $T'$ be-

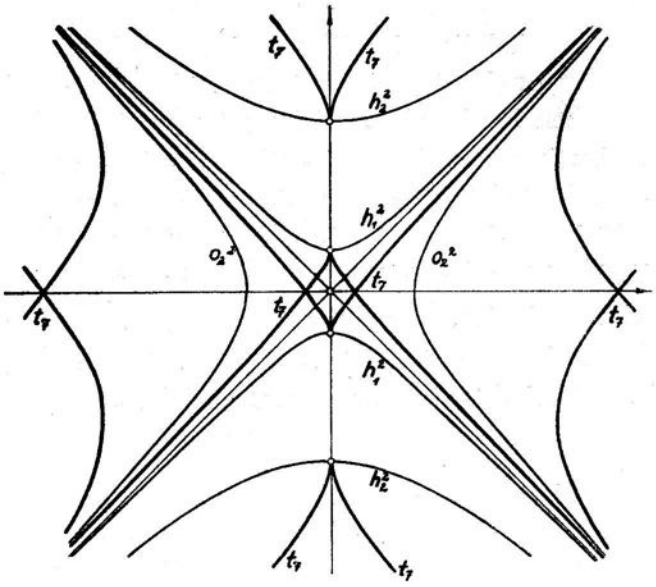


Fig. 9.

stehen aus Trajektorflächen neunter Art. Die beiden Strahlenhyperboloide $H_1^2$, $H_2^2$ seien durch die beiden Gleichungstripel

$$H_1 = p_1 + p_4 + 2c\, p_5 = 0, \quad p_2 - p_5 = 0, \quad p_3 + p_6 = 0,$$
$$H_2 = p_1 + p_4 + \frac{2}{c}\, p_5 = 0, \quad p_2 - p_5 = 0, \quad p_3 + p_6 = 0$$

gegeben. Sie schneiden einander in den reellen Leitgeraden der Kongruenz und in den konjugiert imaginären Regelstrahlen

$$r_1\colon\ p_1 = -1, \quad p_2 = p_5 = 0, \quad p_3 = +i,\ p_4 = +1, \quad p_6 = -i$$
$$r_2\colon\ p_1 = -1, \quad p_2 = p_5 = 0, \quad p_3 = -i,\ p_4 = +1, \quad p_6 = +i.$$

Die Gleichungen der beiden Systeme $T$, $T'$ von Trajektorflächen neunter Art lauten dann:

$$\left.\begin{aligned}
&(32)\quad \operatorname{arc\,tg}\frac{2p_6 + \lambda(p_1 - p_4)}{-2\lambda p_6 + (p_1 - p_4)} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{H_1 H_2 \delta}}{a O_2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{H_1 H_2 \delta}}{a O_2} = 0\\
&(32')\quad \operatorname{arc\,tg}\frac{2p_6 + \lambda(p_1 - p_4)}{-2\lambda p_6 + (p_1 - p_4)} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{-H_1 H_2 \delta}}{O_1} - \sqrt{1-a^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{-H_1 H_2 \delta}}{\sqrt{1-a^2}\,O_1} = 0
\end{aligned}\right\}(-\infty < \lambda < +\infty)$$

wo $\delta = 1 - 2a^2$, $a = \dfrac{1-c}{\sqrt{2+2c^2}}$ gesetzt ist. Die Gleichungen

$$O_1 = p_1 + 2p_5 + p_4 = 0, \quad O_2 = p_1 - 2p_5 + p_4 = 0$$

stellen zwei Regelscharen zweiter Ordnung der hyperbolischen linearen Kongruenz dar. Ihre Trägerflächen $O_1^2$, $O_2^2$ liegen bzw. in den Systemen $T$, $T'$. Die Trajektorflächen neunter Art des Systems $T$ sind für rationale Werte von $a$ algebraische Flächen, die Trajektorflächen des Systems $T'$ sind es für rationale Werte von $\sqrt{1-a^2}$. Insbesondere erhält man das Ergebnis:

*Die Trajektorfläche neunter Art ist für eine reelle Regelfläche ($O_1^2$ oder $O_2^2$) zweiten Grades autopolar. Sie hat mit ihr außer den beiden reellen Leitgeraden zwei konjugiert imaginäre Regelstrahlen gemein.*

**14.** Durch eine einscharig in der hyperbolischen Kongruenz enthaltene Regelfläche $K^2$ zweiten Grades und einen nicht auf ihr liegenden Kongruenzstrahl $k$ sind $\infty^1$ einscharig in der Kongruenz enthaltene Flächen zweiten Grades bestimmt, die $K^2$ berühren und durch $k$ gehen. Sie bilden ein entartetes Ringsystem der Kongruenz. Die eine Leitfläche $K^2$ sei bestimmt durch

$$K = a_4 p_1 + a_1 p_4 = 0.$$

Die andere zerfällt in die beiden reellen Ebenen $E_1$, $E_2$ durch $k$ und die beiden Leitgeraden der Kongruenz. Für die folgende analytische Darstellung fällt der Strahl $k$ mit dem in der Kongruenz enthaltenen Durchmesser von $K^2$ zusammen. Die konjugierten Regelflächen dieses entarteten Ringsystems sind die Trajektorflächen zehnter Art.

Die Regelschar der Trajektorfläche zehnter Art wird in die hyperbolische lineare Kongruenz durch einen transzendenten Strahlenkomplex eingeschnitten mit der Gleichung

$$(33)\quad \mathfrak{Ar}\,\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\frac{(1+\sigma^2)\,p_5 + 2\sigma p_6}{(1+\sigma^2)\,p_6 + 2\sigma p_5} + \sqrt{\frac{K}{a_4 p_1}} - \mathfrak{Ar}\,\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\sqrt{\frac{K}{a_4 p_1}} = 0 \qquad (-1<\sigma<+1).$$

Im ersten Gliede ist $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}$ oder $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}$ zu setzen, je nachdem $p_5 < p_6$ oder $p_5 > p_6$. Im dritten Gliede heißt es $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}$ oder $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}$, je nachdem $a_4 p_1 > K$ oder $a_4 p_1 < K$.

Für die Trajektorflächen selbst gilt die Gleichung

$$\mathfrak{Ar}\,\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\frac{y}{x} - \mathfrak{Ar}\,\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\frac{2\sigma z + (1+\sigma^2)}{(1+\sigma^2)\,z + 2\sigma} + \sqrt{\frac{a_4(y^2-x^2) + a_1(1-z^2)}{a_4(y^2-x^2)}}$$
$$- \mathfrak{Ar}\,\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\sqrt{\frac{a_4(y^2-x^2) + a_1(1-z^2)}{a_4(y^2-x^2)}} = 0.$$

Im zweiten Gliede gilt $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}$ für $|z| > 1$, $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}$ für $|z| < 1$. Die Schnittkurve der Trajektorfläche zehnter Art senkrecht zur $z$-Achse hat mit $x = \varrho\,\mathfrak{Sin}\,\varphi$, $y = \varrho\,\mathfrak{Cos}\,\varphi$ für $y \gtrless x$, $|z| \gtrless 1$ bzw. $x = \varrho\,\mathfrak{Cos}\,\varphi$, $y = \varrho\,\mathfrak{Sin}\,\varphi$ für $y \gtrless x$, $|z| \lessgtr 1$ die Gleichung

$$(34)\quad \varphi = -\sqrt{\frac{a_4\varrho^2 + a_1(1-z^2)}{a_4\varrho^2}} + \mathfrak{Ar}\,\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\sqrt{\frac{a_4\varrho^2 + a_1(1-z^2)}{a_4\varrho^2}} + c \quad (-\infty<c<+\infty).$$

Aus ihr ist zu ersehen:

$$\lim_{\varrho^2\to+0}\varphi(|z|>1) = \lim_{\varrho^2\to-0}\varphi(|z|<1) = i\infty.$$

Mit anderen Worten:

*Eine Trajektorfläche zehnter Art ist konjugierte Regelfläche für ein entartetes Ringsystem der hyperbolischen Kongruenz gebildet aus $\infty^1$ Regelflächen zweiten Grades, die eine gegebene Regelfläche $K^2$ zweiten Grades berühren und durch einen gegebenen Strahl $k$ gehen. Die Trajektorfläche zehnter Art ist transzendent. Sie hat den Strahl $k$ zum asymptotischen Regelstrahl ihrer imaginären Flächenschalen.*

Fig. 10 zeigt in der Kurve $t_{10}$ den Schnitt einer Trajektorfläche zehnter Art senkrecht zur $z$-Achse (Gleichung 34, $c = 0$).

**15.** Die parabolische lineare Kongruenz scheidet für die Untersuchung der Trajektorflächen aus. Denn einmal liegen in der parabolischen linearen Kongruenz keine Ringsysteme von Regelflächen zweiten Grades, da alle einscharig in der Kongruenz enthaltenen Regelflächen zweiten Grades einander ohnehin längs der vereinigten Leitgeraden der Kongruenz berühren. Zum andern artet auch der Begriff der konjugierten Richtung in der parabolischen Kongruenz aus. Ein vorgegebener Kongruenzstrahl $s$ liegt in einem Strahlenbüschel erster Ordnung von Kongruenzstrahlen, dessen Ebene $\sigma$ durch $s$ und die vereinigten Leitgeraden geht und dessen Mittelpunkt $S$ der Schnittpunkt von $s$ mit den vereinigten Leitgeraden der Kongruenz ist. Einer jeden durch $s$ gehenden

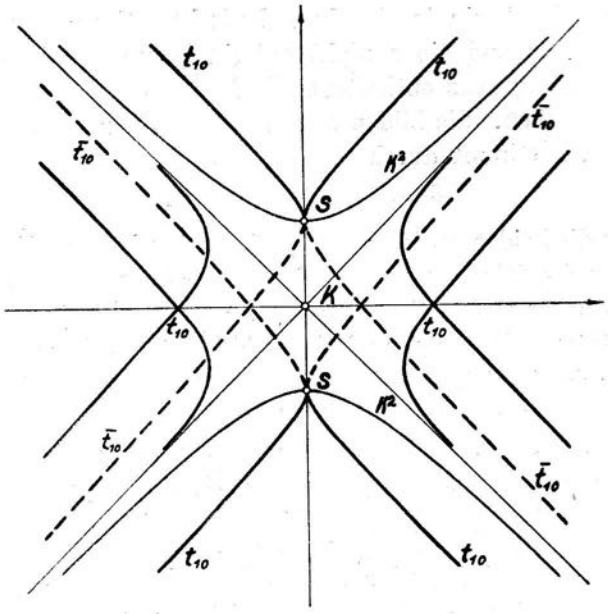


Fig. 10.

Richtung ist aber die durch den Strahlenbüschel $S(\sigma)$ gegebene Richtung konjugiert. Die Involution konjugierter Richtungen durch einen Kongruenzstrahl ist eine parabolische. Weitere Arten von Trajektorflächen gibt es also nicht.

## III. Die Trajektorflächen im polaren Raume einer Regelfläche zweiten Grades.

**16.** Es gibt zehn Arten von transzendenten Trajektorflächen. Die Trajektorflächen erster bis fünfter Art haben zwei konjugiert imaginäre windschiefe Leitgeraden, die Trajektorflächen sechster bis zehnter Art haben zwei reelle Leitgeraden. Die Trajektorflächen erster bis vierter und sechster bis neunter Art sind die allgemeinen. Für sie gilt nach Abschnitt II A, II B das Theorem:

*Eine allgemeine Trajektorfläche ist autopolar im polaren Raume einer nicht zerfallenen (reellen oder imaginären) Strahlenfläche zweiten Grades. Die beiden (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden der Trajektorfläche sind Leitgeraden der Strahlenfläche zweiten Grades. Die Regelstrahlen der Trajektorfläche sind paarweise reziproke Polaren des polaren Raumes.*

Im polaren Raume einer reellen Strahlenfläche zweiten Grades liegen:

a) Autopolare Trajektorflächen erster Art. Die vier reellen Schalen der Trajektorfläche nähern sich der Inzidenzfläche paarweise von innen und außen asymptotisch (Nr. **7—9** u. Fig. 1).

b) Autopolare Trajektorflächen dritter Art. Ihre vier reellen Flächenschalen berühren die Inzidenzfläche längs eines gemeinsamen Regelstrahles (Nr. **10** u. Fig. 3).

c) Autopolare Trajektorflächen vierter Art. Ihre vier reellen Schalen berühren die Inzidenzfläche paarweise längs zweier reeller Regelstrahlen (Nr. **10** u. Fig. 5).

b) Autopolare Trajektorflächen sechster Art. Sie haben ihre beiden reellen Leitgeraden und zwei reelle Regelstrahlen mit der Inzidenzfläche gemein. Ihre imaginären Schalen haben die Inzidenzfläche zur Asymptotenfläche (Nr. **12** u. Fig. 8).

e) Autopolare Trajektorflächen siebenter Art. Sie haben ihre beiden reellen Leitgeraden und zwei reelle Regelstrahlen mit der Inzidenzfläche gemein (Nr. **12** u. Fig. 9).

f) Autopolare Trajektorflächen achter Art. Sie haben ihre beiden reellen Leitgeraden mit der Inzidenzfläche gemein und berühren diese längs eines reellen Regelstrahles (Nr. **13**).

g) Autopolare Trajektorflächen neunter Art. Sie haben ihre beiden reellen Leitgeraden und zwei konjugiert imaginäre Regelstrahlen mit der Inzidenzfläche gemein (Nr. **13**).

Im polaren Raume einer imaginären Fläche zweiten Grades mit reellem Polarsysteme liegen autopolare Trajektorflächen zweiter Art (Nr. 7—8 u. Fig. 2). Eine solche Trajektorfläche zweiter Art hat ihre beiden konjugiert imaginären (windschiefen) Leitstrahlen und zwei konjugiert imaginäre (windschiefe) Regelstrahlen mit der Inzidenzfläche des polaren Raumes gemein.

**17.** Die nicht ausgearteten Trajektorflächen sind die einzigen bisher bekannten transzendenten autopolaren Flächen im polaren Raume einer Fläche zweiten Grades. Die ausgearteten Trajektorflächen, nämlich die Trajektorflächen fünfter und zehnter Art, führen auf eine neue Eigenschaft des Polarsystemes der Regelfläche zweiten Grades.

Eine reelle Regelfläche $K^2$ zweiten Grades und ein sie nicht berührender reeller Strahl $k$ bestimmen ein der Fläche einbeschriebenes Tangentialtetraeder. Der Strahl $k$ trifft die Regelfläche in zwei reellen oder konjugiert imaginären Punkten, ist daher mit zwei reellen oder konjugiert imaginären Regelstrahlen $r_1, r_2$ und mit zwei reellen oder konjugiert imaginären Leitstrahlen $l_1, l_2$ inzident. Die drei Strahlenpaare $r_1, r_2, l_1, l_2$ sowie $k$ und seine reziproke Polare $k'$ sind die drei Gegenkantenpaare des Tangentialtetraeders. Der Strahl $k$ und seine Polare $k'$ liegen in einer hyperbolischen oder elliptischen linearen Kongruenz $R_1^1$ mit den Leitgeraden $r_1, r_2$; in dieser Kongruenz ist die Leitschar der Fläche $K^2$ enthalten. Die Strahlen $k, k'$ liegen ferner in einer hyperbolischen oder elliptischen linearen Kongruenz $L_1^1$ mit den Leitgeraden $l_1, l_2$; in dieser Kongruenz ist die Regelschar der Fläche $K^2$ enthalten. Die linearen Kongruenzen $R_1^1, L_1^1$ sind beide gleichzeitig entweder elliptisch oder hyperbolisch. Im ersten Falle bedingen der Strahl $k$ und die reelle Regelfläche $K^2$ zweiten Grades in der elliptischen linearen Kongruenz $R_1^1$ nach Nr. **11** ein System von Trajektorflächen fünfter Art, ebenso in der elliptischen linearen Kongruenz $L_1^1$. Im zweiten Falle bedingen sie in der hyperbolischen linearen Kongruenz $R_1^1$ nach Nr. **14** ein System von Trajektorflächen zehnter Art, ein ebensolches Flächensystem bedingen sie in der hyperbolischen Kongruenz $L_1^1$. Mit Rücksicht auf Nr. **11** und **14** ergibt sich nunmehr:

*Ein Strahl $k$, der eine Regelfläche $K^2$ zweiten Grades in zwei konjugiert imaginären Punkten schneidet, bedingt zwei Systeme $S_r$, $S_l$ von je $\infty^1$ transzendenten Trajektorflächen fünfter Art. Jede Trajektorfläche $T_5$ fünfter Art des Flächensystemes $S_r$ hat je einen Regelstrahl $r$ von $K^2$ zum Rückkehrregelstrahl und hat den Strahl $k$ zum asymptotischen Strahl ihrer beiden reellen Flächenschalen; jede Trajektorfläche $T_5$ fünfter Art des Flächensystems $S_l$ hat je einen Leitstrahl $l$ von $K^2$ zum Rückkehrregelstrahl und hat den Strahl $k$ zum asymptotischen Strahl. Den Flächensystemen $S_r$, $S_l$ sind im polaren Raume von $K^2$ zwei ebensolche Flächensysteme $\overline{S}_r$, $\overline{S}$ zugeordnet. Ihre $\infty^1$ Flächen haben die reziproke Polare $k'$ von $k$ zum asymptotischen Strahl ihrer reellen Flächenschalen.*

In Fig. 6 geht die Kurve $\overline{t}_7''$ aus $t_7''$ durch Inversion am Kreise $k_2^2$ hervor. Ihr asymptotischer Punkt ist $K_1'$. $t_7''$ und $\overline{t}_7''$ sind die Bilder zweier durch den polaren Raum von $K^2$ einander zugeordneter Trajektorflächen fünfter Art mit den asymptotischen Strahlen $k$ (Bildpunkt $K_1$) und $k'$ (Bildpunkt $K_1'$).

*Ein Strahl $k$, der eine Regelfläche $K^2$ zweiten Grades in zwei reellen Punkten schneidet, bedingt zwei Systeme $S_r$, $S_l$ von je $\infty^1$ transzendenten Trajektorflächen zehnter Art. Jede Trajektorfläche $T_{10}$ zehnter Art des Flächensystemes $S_r$ hat einen Regelstrahl von $K^2$ zum Rückkehrregelstrahl, jede solche Fläche des Flächensystemes $S_l$ hat einen Leitstrahl von $K^2$ zum Rückkehrregelstrahl. Die Flächen beider Flächensysteme aber haben den reellen Strahl $k$ zum asymptotischen Strahl ihrer imaginären Flächenschalen. Den beiden Flächensystemen $S_r$, $S_l$ sind im polaren Raume von $K^2$ zwei ebensolche Flächensysteme $\overline{S}_r$, $\overline{S}_l$ zugeordnet. Ihre $\infty^1$ Flächen haben die reziproke Polare $k'$ von $k$ zum asymptotischen Strahl ihrer imaginären Flächenschalen.*

In Fig. 10 ist die Hyperbel $k^2$ der Schnitt der Bildebene mit der Regelfläche $K^2$, der Punkt $K$ ist der Schnittpunkt mit dem Strahle $k$. In der Kurve $t_{10}$ schneidet die Bildebene die Trajektorfläche $T_{10}$. Die Spitze $S$ dieser Kurve liegt demnach auf der Hyperbel $k^2$, weil $T_{10}$ ihren Rückkehrregelstrahl auf $K^2$ hat. Die Kurve $\bar{t}_{10}$ endlich geht aus $t_{10}$ durch Inversion an der Hyperbel $k^2$ hervor. Sie stellt den Schnitt der zu $T_{10}$ reziprok polaren Trajektorfläche dar. Die unendlichferne Gerade der Bildebene ist die reziproke Polare $k'$ von $k$.

---

Eingegangen 30. August 1937.