Geometrie und Wellenmechanik III.

Die Elemente auf der Eigenwertfläche und der Kernfläche.

Von G. HAENZEL in Karlsruhe.

(Mit 4 Figuren.)

In den beiden vorhergehenden Arbeiten[1]) wurden geometrische Theorien zu den Wellengleichungen des Einelektronensystems und des Zweielektronensystems entwickelt. Jetzt handelt es sich einerseits um eine organische geometrische Entwicklung aller Quantenzahlenkombinationen in ihrer Bedeutung für die spektralen Energieniveaus, für die ideale Quantenfolge und für das reale periodische System der Elemente, andererseits um eine geometrische Darstellung der Ergebnisse der Kernphysik.

Diesem Ziele dient die Konstruktion einer Fläche, die „*Eigenwertfläche*" genannt werden soll, weil sie die angedeuteten Aufgaben durch Darstellung der Eigenwerte und damit der Quantenkonfigurationen löst. Die Fläche kann entweder im Bereich der Bewegungsgeometrie — durch Schiebungen und Drehungen — oder mit einfachen Mitteln der Funktionentheorie erzeugt werden. Die Eigenwertfläche ermöglicht eine neue Anordnung der chemischen Elemente unter Vereinigung der alten Darstellung des periodischen Systems mit der Quanten- und Wellenmechanik. Eine geeignete Spiegelung führt von der Eigenwertfläche auf die „*Kernfläche*", deren Ausbau die wesentlichen Ergebnisse der Kernphysik darstellt. Die Eigenschaften der Eigenwertfläche und der Kernfläche zusammen geben den Stand der Atomphysik vollständig wieder.

I. Die Eigenwertfläche.

1. Eine Strecke von der Länge 1 wird so auf die positive y-Achse gelegt, daß ihr Anfangspunkt H mit dem Koordinatenursprung zur Deckung kommt, durch Drehung um 2π wird der Einheitskreis bedeckt. Fortgesetzte Verschiebungen des senkrechten Durchmessers vom Betrage 2 in Richtung der positiven y-Achse und die Drehungen um den Koordinatenursprung vom Drehwinkel 2π bewirken eine einfache Überdeckung der offenen Ebene und ihre Einteilung in den Einheitskreis K_0 und in konzentrische Kreisringe $K_1, K_2 \ldots$ von der

1) Haenzel, Geometrie und Wellenmechanik, Jahresber. d. DMV. **49** (1939), S. 215—242. — Geometrie und Wellenmechanik II, Jahresber. d. DMV. **50** (1940), S. 121—129.

Breite 2. Die ungeraden zyklischen Drehungen teilen die Bereiche $K_0, K_1, K_2, \ldots, K_{(\nu)} \ldots$ bzw. in $1, 3, 5, \ldots 2\nu + 1, \ldots$ gleiche Sektoren (Fig. 1).

Eine Anzahl übereinanderliegender Blätter der offenen Ebene seien von unten nach oben mit

$$n_1 = 1, 2, 3, \ldots$$

numeriert. In der untersten Ebene und allen darüberliegenden entstehe wie oben der Einheitskreis mit dem Mittelpunkte H. Er wird als (nullter) Kreisring in allen Blättern mit der Ziffer $n_2 = 0$ bezeichnet. Die unterste Ebene $n_1 = 1$ wird längs des Einheitskreises aufgeschnitten und an die darüberliegende $n_1 = 2$ geheftet. Ein Punkt des Einheitskreises in der unteren Ebene $n_1 = 1$ muß daher beim Verlassen des Einheitskreises in die darüberliegende $n_1 = 2$ aufsteigen. Die „*erzeugende Fundamentalstrecke*" $|y| \leqq 1$, $x = 0$ in der untersten Ebene wird in Richtung der positiven y-Achse um den Betrag 2 verschoben und gelangt dabei in das Blatt $n_1 = 2$. In diesem Blatte und in allen darüberliegenden wird der erste Kreisring durch Drehung erzeugt und mit $n_2 = 1$ bezeichnet. Die Richtung der positiven y-Achse wird in allen Blättern mit $n_3 = 0$ gekennzeichnet. Nunmehr sind im Blatt $n_1 = 2$ und in allen darüber befindlichen — also in allen Kreisringen $n_2 = 1$ — die zyklischen Drehungen von der Periode 3 auszuführen. Die beiden Richtungen, in die sich die erzeugende Strecke dabei einstellt, je 120° gegen die positive y-Achse, kennzeichnen die Ziffern $n_3 = +1$, $n_3 = -1$.

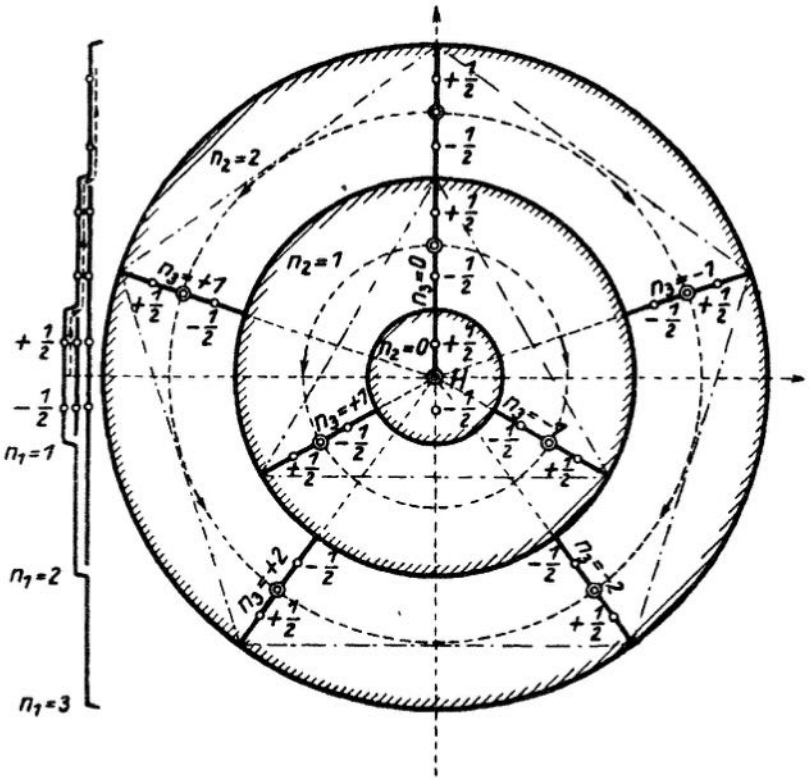

Fig. 1

Die zweite Ebene $n_1 = 2$ ist längs des Außenrandes des ersten Kreisringes $n_2 = 1$ aufzuschneiden und an die darüberliegende Ebene $n_1 = 3$ zu heften. Der Außenrand des Kreisringes $n_2 = 1$, $n_1 = 2$, kann nur durch Aufstieg in die dritte Ebene $n_1 = 3$ überschritten werden.

Die erzeugende Fundamentalstrecke wird unter Aufstieg in die Ebene $n_1 = 3$ um ihre Länge 2 in der Richtung $n_3 = 0$ verschoben, erzeugt dort und in allen darüberliegenden Blättern den zweiten Kreisring $n_2 = 2$. In diesem werden die zyklischen Drehungen von der Periode 5 ausgeführt und die vier gegen $n_3 = 0$ unter den Winkeln $\pm 72^0$, $\pm 144^0$ geneigten Richtungen mit $n_3 = \pm 1, \pm 2$ bezeichnet.

Allgemein erhält das Blatt	$n_1 = \nu$
die Kreisringe	$n_2 = 0, 1, \ldots \nu - 1$
und in ihnen die Richtungen	$n_3 = 0, \pm 1, \ldots \pm (\nu - 1)$,

erzeugt durch die zyklischen Drehungen der Perioden $1, 3, 5 \ldots 2n_3 + 1 = 2(\nu - 1) + 1$.

Der Mittelpunkt H der erzeugenden Fundamentalstrecke kommt bei der Erzeugung der Fläche mit einer Reihe von Punkten zur Deckung, die wir die charakteristischen „*Eigenwertpunkte*" der Fläche nennen. Jeder Eigenwertpunkt ist durch drei Kennziffern individualisiert. Die erste Zahl $n_1 = \nu$ bezeichnet die Nummer des Blattes, die zweite $n_2 = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$ die Nummer des Ringes, in dem der Punkt liegt. Die dritte Zahl $n_3 = 0, \pm 1, \ldots \pm (\nu - 1)$ gibt die zyklische Drehung an, durch die der Punkt von der Achse $n_3 = 0$ aus erreicht wird.

2. Die Schrödingergleichung des Einelektronensystems

$$\Delta \psi + \frac{8\pi^2 m_0}{h^2}(E - U)\psi = 0 \qquad (m_0 \text{ Ruhemasse}) \tag{1}$$

lautet mit der potentiellen Energie $U = -\frac{e^2}{r}$ in räumlichen Polarkoordinaten r, ϑ, φ:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right] + \frac{8\pi^2 m_0}{h^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0. \tag{2}$$

Die übliche Lösung mit Hilfe des Produktansatzes $\psi = R(r)\,\Theta(\vartheta)\,\Phi(\varphi)$ führt mittels Kugelflächenfunktionen $P_l^m \cdot e^{im\varphi}$ l-ter Ordnung und Laguerrescher Polynome w_p p-ten Grades auf die Eigenfunktionen

$$\psi = e^{-\frac{\varrho}{2}} \cdot \varrho^l \cdot w_{n-l-1}(\varrho)\, P_l^m(\cos\vartheta) \cdot \cos m\varphi \qquad \left(\varrho = \frac{2r}{r_0},\ n > 0, \text{ ganz}\right), \tag{3}$$

wo an die Stelle von $\cos m\varphi$ auch $\sin m\varphi$ treten kann. Die Diskussion der bekannten drei Eigenwertreihen

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m_0 e^4}{h^2 n^2}, \quad l(l+1), \quad m$$

liefert die drei ganzen Quantenzahlen $n_1 = n$, $n_2 = l$, $n_3 = m$ mit den Bedingungen

$$
\begin{aligned}
& n_1 = 1, 2, 3, \ldots \\
(4) \qquad & n_2 = 0, 1, 2, \ldots, n_1 - 1, \\
& n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm (n_1 - 1).
\end{aligned}
$$

Die charakteristischen Eigenwertpunkte der in Nr. 1 erzeugten Fläche sind also den zulässigen Eigenwerttripeln (4) der Wellengleichung (2) umkehrbar eindeutig zugeordnet und damit den Eigenfunktionen (3). Folgende Aussagen über die Wellengleichung und die Eigenwertfläche sind gleichwertig:

Bei gegebenem erstem Eigenwert n_1 läuft $n_2 = l$ von 0 bis $n_1 - 1$ und zu jedem l gibt es $2l+1$ Kugelflächenfunktionen, so daß zum Werte n_1 je $\sum_{l=0}^{n_1-1} (2l+1) = n_1^2$ zulässige Eigenfunktionen gehören.

Das gegebene Flächenblatt n_1 enthält die Ringe $n_2 = 0$ bis $n_2 = n_1 - 1$ und in jedem Ringe Nr. l liegen $2l+1$ Eigenwertpunkte, so daß die Ebene n_1 je $\sum_{l=0}^{n_1-1} (2l+1) = n_1^2$ Eigenwertpunkte enthält.

Aus alledem ergibt sich folgendes Theorem:

„Die Eigenwertfläche der Wellengleichung entsteht durch abwechselnde Anwendung der gleichen Parallelverschiebung mit den ungeraden zyklischen Drehungsgruppen steigenden Grades auf den senkrechten Durchmesser des Einheitskreises als erzeugende Fundamentalstrecke. Das Blatt $n_1 = \nu$ der Fläche besteht aus ν Kreisringen $n_2 = 0, 1, \ldots (\nu - 1)$ und hängt längs des Außenrandes seines äußersten Ringes mit dem Blatt $n_2 = \nu + 1$ zusammen. Jeder Ring der Nr. $n_2 = \lambda$ wird durch die ungeraden zyklischen Drehungsgruppen der Ordnung $2\lambda + 1$ in ebensoviele Sektoren geteilt. Der Mittelpunkt H der Fundamentalstrecke erzeugt bei Anwendung jener Parallelverschiebungen und Drehungen die Eigenwertpunkte der Fläche, die durch die Zahlentripel n_1, n_2, n_3 mit den Bedingungen (4) individualisiert den Eigenfunktionen (3) der Wellengleichung umkehrbar eindeutig zugeordnet sind.“

3. Die Richtung $n_3 = 0$ sei die positive reelle Achse einer komplexen Zahlenebene mit dem Anfangspunkt in H. Die Außenränder der Ringe $n_2 = 1, 2, 3, \ldots$ entstehen aus dem Rande des Einheitskreises durch die Folge der Dehnungen

$$z_{\nu+1} = (2\nu + 1) z_1 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dabei ist im Einheitskreise $z = z_1$. Die Richtungen n_3 entstehen aus der positiven reellen Achse durch die Folge der ungeraden zyklischen Drehungen

$$z' = e^{\frac{2k\pi i}{2\nu+1}} \cdot z \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots;\ k = 0, 1, 2, \ldots, 2\nu).$$

Abwechselnde Anwendung der Operationen beider Folgen gleicher Nummer erzeugt die Eigenwertfläche aus dem Einheitskreise. Bei jeder Dehnung ist ein neues Blatt aufzulegen. Nach der ersten Dehnung durchläuft der Punkt $z = 2$ die Folge aller Eigenwertpunkte, nämlich unter Voranstellung von $z = 0$:

$$\begin{array}{l} z = 2,\ 2e^{\frac{2\pi i}{3}},\ 2e^{\frac{4\pi i}{3}} \\ \quad 4,\ 4e^{\frac{2\pi i}{5}},\ 4e^{\frac{4\pi i}{5}},\ 4e^{\frac{6\pi i}{5}},\ 4e^{\frac{8\pi i}{5}} \\ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \quad \nu \cdot 2, \ldots, \quad \nu \cdot 2e^{\frac{2k\pi i}{2\nu+1}}, \ldots, \nu \cdot 2e^{\frac{4\nu\pi i}{2\nu+1}} \\ \qquad\qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2\nu). \end{array}$$

Unter Verwendung des Weierstraßschen Produktsatzes erhält man die ganze Funktion

$$H_0(z) = z \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \left[1 - \frac{z}{2\nu e^{\frac{2k\pi i}{2\nu+1}}}\right]_e^{\frac{z}{2\nu e^{\frac{2k\pi i}{2\nu+1}}} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2\nu e^{\frac{2k\pi i}{2\nu+1}}}\right)^2}$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2\nu)$$

mit den Nullstellen in den Eigenwertpunkten. Mit anderen Worten:

„Die Eigenwertfläche der Wellengleichung entsteht aus dem Einheitskreise und der reellen positiven Achse durch die abwechselnde Verwendung der Dehnungen $z_{\nu+1} = (2\nu + 1) z_1$ und der Drehungen $z' = e^{\frac{2k\pi i}{2\nu+1}} \cdot z$ mit $\nu = 1, 2, \ldots$ und $k = 0, 1, 2, \ldots, 2\nu$, wenn bei jeder Dehnung ein neues Blatt aufgelegt wird. Ihre Eigenwertpunkte sind die Nullstellen der Funktion $H_0(z)$ in allen Blättern. Wird die Reihe der Eigenwertpunkte im Sinne wachsender ν durchlaufen, so ist jeder Punkt mit drei Quantenzahlen n_1, n_2, n_3 zu belegen und zwar bestimmt

$n_1 = \nu + 1$ *die Nummer des Blattes,*
$n_2 = \nu$ *die Nummer des Ringes,*
$n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \nu$ *(je nachdem* Imag $z \gtrless 0$) *das Argument des Eigenwertpunktes.“*

Für den Einheitskreis ist $\nu = 0$.

II. Die Eigenwertfläche als Atommodell und als Träger des Systems der Elemente.

4. Als Modell des Einelektronensystems ist die Eigenwertfläche in der Wellenmechanik mit den Energiestufen der Eigenwerte zu belegen, und zwar erhalten die verschiedenen Flächenblätter $n_1 = 1, 2, \ldots$ die Hauptenergiestufen

$$E_{n_1} = -\frac{2\pi^2 m_0 e^4}{h^2 n_1^2} \qquad (n_1 = 1, 2, \ldots),$$

so daß der Übergang aus einem höheren Blatt n_1 in ein tieferes n_1' der Emission der zugehörigen Spektrallinie entspricht mit der Frequenz

$$\mu = \frac{2\pi^2 m_0 e^4}{h^2} \cdot \left(\frac{1}{n_1'^2} - \frac{1}{n_1^2}\right).$$

Die durch die zweite Quantenzahl $n_2 = 0, 1, \ldots, (n_1 - 1)$ bedingten zusätzlichen Energieniveaus sind zusätzlich auf die Ringe der betreffenden Nummern n_2 zu verlegen. Das Hauptenergieniveau E_{n_1} wird durch die n_2 je in n_1 verschiedene Komponenten zerlegt, denen die n_1 verschiedenen Ringe $n_2 = 0, 1, \ldots, (n_1 - 1)$ des Blattes Nummer n_1 mit diesen Belegungen entsprechen. Ihnen sind endlich die zusätzlichen Niveaus aus den Quantenzahlen n_3 zu überlagern, mit denen die entsprechenden Richtungen n_3 in den einzelnen Ringen zusätzlich zu belegen sind. Damit ist das gesamte Niveauschema der Wellengleichung (2) des Elektronensystems auf der Fläche ausgebreitet und man erhält den Satz:

„*Jeder Weg auf der Eigenwertfläche entspricht einem Energiesprung. Die physikalisch zulässigen Wege beginnen und enden in Eigenwertpunkten der Fläche; nach den bekannten Auswahlregeln liegen Anfangspunkt und Endpunkt in zwei beliebigen verschiedenen Flächenblättern. Die Differenz ihrer Ringnummern muß* ± 1 *sein, die Differenz ihrer Richtungsnummern* 0 *oder* ± 1.“

Der Energiesprung ist von der Gestalt des Weges so lange unabhängig, als nicht unterwegs weitere Eigenwertpunkte berührt werden. Enthält der Weg noch weitere Eigenwertpunkte, so handelt es sich um mehrere aneinander anschließende Sprünge.

5. Um ein Beispiel für diese Modellvorstellung zu geben, lasse man in einem Magnetfelde von der Feldstärke H (Gauß) die Flächenzahl n_3 als magnetische Quantenzahl wirksam werden. Die Fläche liefert dann das Grundtheorem des normalen *Zeemaneffektes*.

Unabhängig von der ersten Quantenzahl n_1 spaltet ein Term der zweiten Quantenzahl n_2 im magnetischen Felde in $2n_2 + 1$ Terme auf.

Das Aufspaltungsbild ist symmetrisch zur ungespaltenen Linie. Bekanntlich sind die zusätzlichen Energiewerte der magnetischen Quantenzahl $m = n_3$

$$E_m = \frac{H e h}{4 \pi m_0 c} \cdot m \quad \left(\begin{matrix} m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n_2 \\ [e \text{ Ladung}, \; m_0 \text{ Masse}] \end{matrix} \right).$$

Die Auswahlregeln $n_2 - n_2' = \pm 1$, $n_3 - n_3' = 0, \pm 1$ ergeben sofort die zulässigen Wege. Aus ihnen schließt man mittels $\Delta \mu = \frac{E_m}{h c}$ auf die Aufspaltung der einzelnen Linie mit der Wellenzahl μ in drei Linien mit den Zeemanverschiebungen

$$\Delta \mu = 0, \pm \frac{e H}{4 \pi m_0 c^2}.$$

Diese Betrachtungen gelten für Systeme, die außer dem Kern und einem äußeren Elektron abgeschlossene Schalen von Rumpfelektronen enthalten. Sie besitzen ein nur vom äußeren Elektron herrührendes Drehimpulsmoment $n_2 \cdot \frac{h}{2\pi}$, wo n_2 die Ringnummer auf der Fläche ist, d. h. $n_2 = 0, 1, 2, \ldots, n_1 - 1$. Der Wert $n_2 = 0$ ist nach dem früheren Bohrschen Modell nicht zu verstehen, da es sich dabei um eine Bahn ohne Drehimpuls, also um eine Pendelbahn durch den Kern handeln würde. Auf der Eigenwertfläche als Modell fällt dieser Widerspruch fort.

6. Die Hinzunahme des Spins führt den Wert $n_4 = + \frac{1}{2}$ oder den Wert $n_4 = - \frac{1}{2}$ als vierte Quantenzahl ein. Die Diracsche Theorie, die den Spin berücksichtigt, wurde in Abhandlung II geometrisch untersucht. Die physikalischen Eigenschaften des Diracschen Einelektronensystems wurden dabei auf die Elemente und projektiven Eigenschaften des Brianchonschen Sechsseits abgebildet, diejenigen des Zweielektronensystems auf zwei Brianchonsche Sechsseite des gleichen Kegelschnitts. Beide müssen wegen der Vertauschbarkeitsrelation durch eine perspektive Involution des Kegelschnittes miteinander vertauschbar sein, z. B. durch Drehung um den Mittelpunkt des Kegelschnitts mit dem Drehwinkel π.

Zugunsten der Einfachheit sei das Brianchonsche Sechsseit auf der Eigenwertfläche mit seinen das Einelektronensystem repräsentierenden Eigenschaften durch einen Punkt vertreten. Auf der erzeugenden Fundamentalstrecke (1) liegen daher zwei Punkte im Abstande $+ \frac{1}{2}$ und $- \frac{1}{2}$ vom Mittelpunkt (Fig. 1 und 3). Werden dieselben bei der Erzeugung der Eigenwertfläche (1) mitgenommen, so entsteht die doppelte Anzahl von Eigenwertpunkten, und zu jeder vorhin beschriebenen charakteristischen Lage der Fundamentalstrecke mit drei

gegebenen Quantenzahlen treten die Spinwerte $+\frac{1}{2}$ oder $-\frac{1}{2}$ als vierte Quantenzahlen. Die entsprechenden zusätzlichen Energieniveaus sind in jenen charakteristischen Punkten der Fläche den drei ersten Niveaus zu überlagern.

Nach dieser Einführung der vierten Quantenzahl auf der Eigenwertfläche ist mit Hilfe der Wege auf der Fläche u. a. der *anomale Zeemaneffekt* in gleicher Weise zu behandeln wie der normale Zeemaneffekt in Nr. 5.

7. Das gesamte System von vier Eigenwerten bzw. vier Quantenzahlen ist damit auf der Fläche ausgebreitet. Die ideale Zahlenfolge der Quantenzahlen und der Aufbau des periodischen Systems der Elemente durch Anbau immer neuer Elektronen sind auf der Fläche vorgezeichnet. Das Paulische Prinzip: „Unter den Elektronen eines Atoms dürfen keine zwei in allen vier Quantenzahlen übereinstimmen" weist die chemischen Elemente umkehrbar eindeutig den Eigenwertpunkten der Fläche zu, so daß die Elemente einer chemischen Periode im gleichen Flächenblatt liegen. Die Eigenwertpunkte bilden in den Flächenblättern die ideale Quantenzahlfolge. Im untersten Blatt $n_1 = 1$ liegt das Ein- und das Zweielektronensystem (H und He), im darüberliegenden $n_1 = 2$ die Achterreihe des periodischen Systems vom Lithium zum Neon, im nächsten Blatt die Achtzehnerreihe der Folge usw.

Der vielbesprochene Unterschied zwischen der idealen Zahlenfolge

$$2, 8, 18, 32, \ldots, 2n^2, \ldots$$

und der realen Folge der Reihen des periodischen Systems der Elemente

$$2, 8, 8, 18, 18, 32$$

ist treffend durch den Zusammenhang der Eigenwertfläche dargestellt. Auf der Eigenwertfläche der *idealen* Quantenfolge kann der Übergang von einem unteren Blatt in das darüberliegende erst nach Besetzung aller im unteren Blatt befindlichen Eigenwertpunkte stattfinden (Fig. 2a). Auf der Eigenwertfläche der *realen* Folge des periodischen Systems wird dagegen der Übergang vom Blatt $n_1 = 3$ in das Blatt $n_1 = 4$ infolge anderen Zusammenhanges beider Blätter (Fig. 2b) schon vollzogen, nachdem erst 8 von den 18 Eigenwertpunkten des Blattes $n_1 = 3$ besetzt waren, und zwar die 8 Stellen mit $n_2 = 0$, $n_3 = 0$, $n_4 = \pm\frac{1}{2}$ und $n_2 = 1$, $n_3 = 0, \pm 1$, $n_4 = \pm\frac{1}{2}$. Nach Besetzung der beiden Punkte $n_1 = 4$, $n_2 = 0$, $n_3 = 0$, $n_4 = \pm\frac{1}{2}$ findet Rückkehr

ins dritte Blatt $n_1 = 3$ statt, wo die Besetzung der zehn äußeren Punkte $n_2 = 2$, $n_3 = 0, \pm 1, \pm 2$, $n_4 = \pm \frac{1}{2}$ nachgeholt wird.

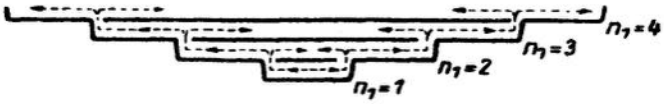

Fig. 2 a

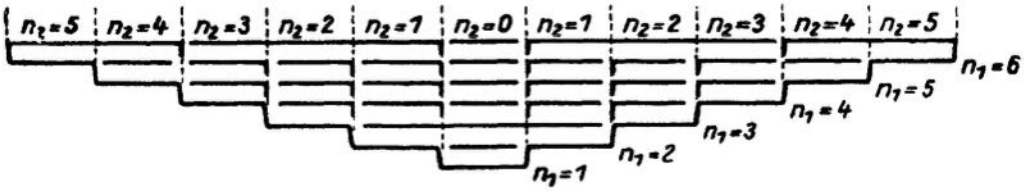

Fig. 2 b

Als Gesamtergebnis ist festzustellen:

„Die Eigenwertfläche entspricht hinsichtlich der Wege zwischen ihren Eigenwertpunkten den spektralen Eigenschaften des Einelektronensystems, unter dem Gesichtspunkte des Paulischen Prinzips entspricht sie der idealen Quantenfolge. Zur Darstellung des realen periodischen Systems ist der Zusammenhang der Fläche abzuändern.“

8. Die üblichen Darstellungen des sogenannten periodischen Systems der Elemente mit ihren Anordnungen in waagerechten und lotrechten Kolonnen oder mit Verbindungslinien zwischen homologen Elementen geben das Wesen der Sache nur unvollkommen wieder. Unserer Auffassung des periodischen Systems entspricht vielmehr die eindeutige Verteilung der Elemente auf die Eigenwertpunkte der in ihrem Zusammenhang abgeänderten Eigenwertfläche. Ein gegebenes Element der Ordnungszahl λ hat auf der Fläche den Eigenwertplatz Nr. λ desjenigen Elektrons einzunehmen, durch dessen Anbau es aus dem vorhergehenden hervorging. Die Anordnung seiner λ Elektronen und ihre Quantenzustände sind durch die Eigenwertpunkte Nr. $1 - \lambda$ völlig angegeben und λ läuft von 1 bis 92. Die Fig. 3, a—g zeigt diese Verteilung in der Reihenfolge der Blätter und Ringe. Wegen des Anschlusses an Physik und Chemie ist die Quantenzahl n_1 als Hauptquantenzahl n bezeichnet, die Quantenzahl n_2 als Nebenquantenzahl k, letztere ist um 1 erhöht, läuft also von 1 bis n. Das Zeichen m_n ist der Ring Nr. n im Blatt Nr. m. Diese Darstellung zeigt u. a. mit Deutlichkeit

a) den Aufbau des Systems nach Blättern (Schalen) und Ringen (Untergruppen) von unten nach oben und von innen nach außen, das

Auslassen einzelner Ringe und ihr späteres Nachholen, die Anzahl, Anordnung und die Energiezustände der Elektronen jedes Elementes.

b) Chemisch und physikalisch homologe Elemente, die in der Bohr-Thomsenschen Darstellung[2]) durch eine Kette von Strichen zu verbinden sind, liegen auf der Fläche untereinander an kongruenten

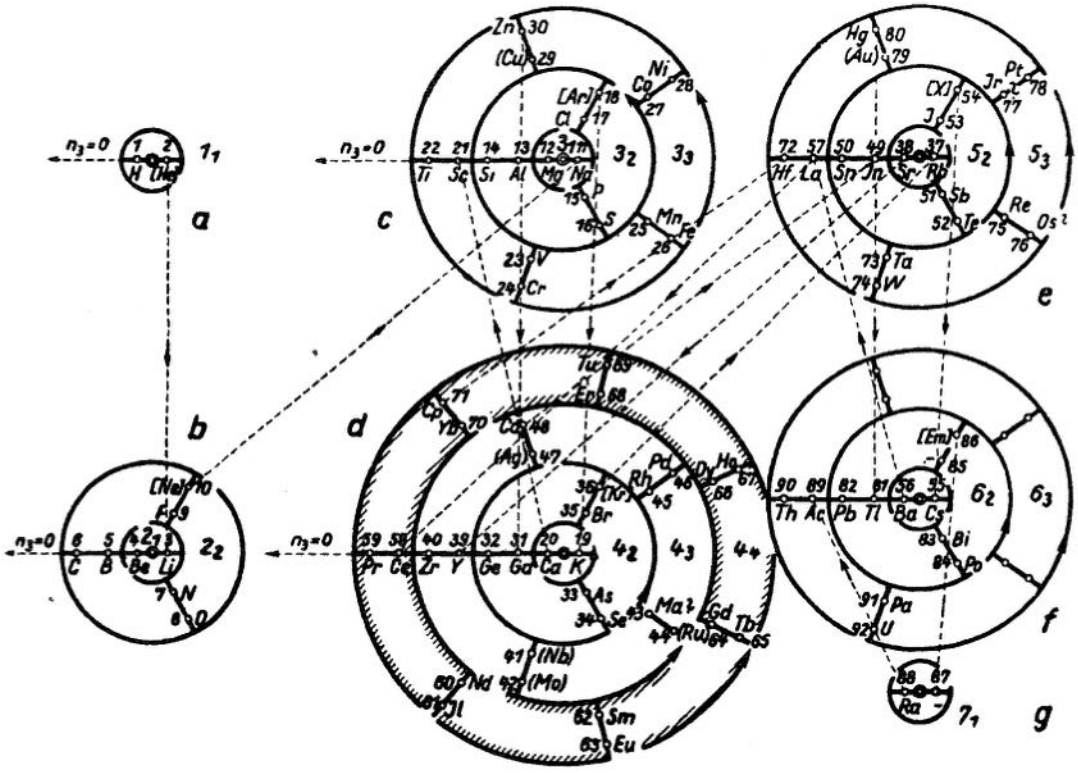

Fig. 3

Stellen der einzelnen Blätter, der Ausbau des äußersten Ringes ist in den *verschiedenen* Blättern dann gleichweit fortgeschritten. Die Kongruenz untereinander liegender Ringe aller Blätter entspricht der schon von Stoner und Main-Smith erhobenen Forderung[3]), daß die Elektronenanzahl der Nebenquantenzahl k von ihrer Hauptquantenzahl n unabhängig ist, sowie dem Bohrschen Postulat von der Invarianz und Permanenz der Quantenzahl[4]), nach dem die Bindung eines neuen Elektrons die n_k-Konfiguration aller vorher gebundenen Elektronen unverändert läßt.

2) N. Bohr, Drei Aufsätze über Spektren und Atombau, Braunschweig 1922. — I. Thomsen, Ztschr. f. anorganische Chemie **9** (1895), S. 190. — Die in den tabellarischen Darstellungen des periodischen Systems untereinanderstehenden Elemente liegen also in kongruenten Punkten der verschiedenen Blätter.

3) E. C. Stoner, Phil. Mag. **48** (1924), S. 719, I. D. Main-Smith, Chemistry and Atomic Structure, London 1924.

4) N. Bohr, Über die Anwendung der Quantentheorie auf den Atombau: I. Die Grundpostulate der Quantentheorie, Ztschr. f. Phys. **13** (1923), S. 133. — Linienspektren und Atombau, Annalen der Physik **71** (1923), S. 256.

c) Die Edelgase [2], [10], [18], [36], [54], [86] bilden (Fig. 3) wirklich den Abschluß der Ringe 1_1, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2, 6_2 und liegen mit Ausnahme von [2] an kongruenten Stellen der Blätter.

d) Wo gleiches Verhalten verschiedener Elemente durch übereinstimmende „Außenschale" erklärt wird, handelt es sich auf der Eigenwertfläche um übereinstimmende Platzbesetzung im *gleichen* obersten besetzten Blatt. Besonders zeigt das der Ring 4_4, in dem die 14 seltenen Erden 58—74 nacheinander ihre Plätze einnehmen, während in den darüber liegenden Blättern 5 und 6 die vorausgegangene Besetzung der Ringe 5_1, 5_2, 6_1 unverändert bleibt. Bekanntlich kommt das durch gleiches spektroskopisches und magnetisches Verhalten zum Ausdruck, während rein chemisch auch das Element 57 infolge seiner mit 58—71 gemeinsamen Dreiwertigkeit zu den seltenen Erden rechnet.

e) Die Häufigkeit der Elemente in der oberen Litosphäre, der Stern- und Sonnenatmosphäre und in den Meteoriten zeigt die bekannte Zweierperiodizität, nach der die Elemente gerader Ordnungszahl die stabileren sind, diese Harkinssche[5]) Regel wird von der gleichen Zweierperiodizität des größten Isotopenreichtums der geradzahligen Elemente begleitet. Auf der Eigenwertfläche kommt die Zweierperiodizität durch die paarweise Anordnung der Eigenwertpunkte zum Ausdruck. Jedoch handelt es sich um eine Frage der Kerntheorie, die im nächsten Abschnitt behandelt wird.

Die Eigenwertfläche vermittelt also eine neue Darstellung der Elemente, welche die Eigenschaften des periodischen Systems nach Mendelejeff oder Thomsen mit den Ergebnissen der Quanten- und Wellenmechanik vereinigt.

III. Die Kernfläche und ihre Bedeutung für die Kernphysik.

9. Die Eigenwertfläche werde an ihrer Ebene $n_1 = 1$ gespiegelt. Die gespiegelte Fläche besteht aus den Blättern

$$\bar{n}_1 = 1, 2, 3, \ldots \nu \qquad \text{mit den Ringgebieten.}$$
$$\bar{n}_2 = 0, 1, 2, \ldots (\nu - 1). \qquad \text{In ihnen sind die Richtungen}$$
$$\bar{n}_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm (\nu - 1) \qquad \text{ausgezeichnet.}$$

In jeder dieser Richtungen liegen zwei Punkte P, P' mit den vierten Quantenzahlen $\bar{n}_4 = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, so daß alle zulässigen Eigenwertquadrupel nochmals auftreten. Das System der charakteristischen Punkte soll das „*P-System*" der Fläche heißen, die Fläche selbst aber „*Kernfläche*", weil sie alle Atomkerne und ihre Eigenschaften angibt.

5) W. D. Harkins, Journ. Amer. Chem. Soc. 39 (1917), S. 856.

Auf den Mittelsenkrechten aller Strecken PP' (Fig. 4) werden im Abstande $\pm \frac{1}{2}$ vom Mittelpunkte je zwei neue charakteristische Punkte N, N' eingetragen. Die Gesamtheit dieser Punkte bilden das „*N-System*" der Kernfläche. Wir behalten uns vor, dem N-System noch einige weitere Punkte hinzuzufügen. Der Kern des Elementes der Ordnungszahl Z ist aus $N_p = Z$ Protonen und N_n Neutronen aufgebaut und es ist $N_p + N_n = M$ die Massenzahl. Die Elementekerne werden

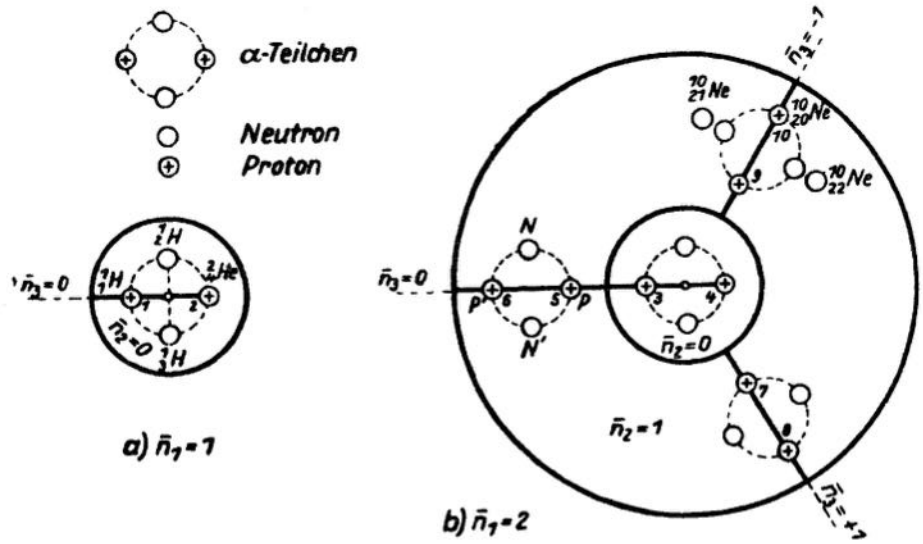

Fig. 4

nach der Zahl ihrer Protonen auf die Punkte des P-Systems verlegt. Da die Protonenzahl die Kernladungszahl Z ist, wird der Kern jedes Elementes dabei *auf den gleichen Punkt* (n_i) *der Kernfläche* gewiesen, den das Element wegen seiner *Elektronenkonfiguration auf der Eigenwertfläche* innehatte. Mit anderen Worten:

„*Zwei spiegelbildlich homologe Punkte der Kernfläche und der Eigenwertfläche stellen Kern und Elektronenbesetzung eines Elementes dar; die Ionen eines Elementes werden durch Paare nichthomologer Punkte beider Flächen wiedergegeben. Ein Element und seine Ionen ordnen einem bestimmten Punkte des P-Systems der Kernfläche mehrere Punkte der Eigenwertfläche zu.*"

10. Ein Kern enthält außer den seiner Ordnungszahl entsprechenden N_p Protonen N_n Neutronen. Die Neutronen besetzen die Punkte des N-Systems (9) der Kernfläche. Je zwei Protonen und zwei Neutronen bilden ein α-Teilchen. Zwei P-Punkte mit gleichen $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$ und $\bar{n}_4 = \pm \frac{1}{2}$ liegen aber mit zwei N-Punkten auf einem Kreise, er stellt bei voller Besetzung ein α-Partikel dar. Also:

„*Die Kerne der Elemente werden durch die PN-Konfigurationen der Kernfläche wiedergegeben. Zum Kern des Elementes mit der Ladungszahl* λ

gehören die Punkte Nr. 1—λ des P-Systems und eine der Neutronenzahl entsprechende Anzahl Punkte des N-Systems. Die Konfiguration zeigt den Kernaufbau nach α-Teilchen, Protonen und Neutronen und die Massenzahl. Isotope haben die gleiche P-Konfiguration bei verschiedenen N-Konfigurationen. Isotone Kerne haben gleichviel N-Punkte, aber verschiedene P-Konfigurationen."

Die Fig. 4 zeigt u. a. die Kerndarstellung des Elementes $^{10}_{20}$Ne (5α-Teilchen) und die seiner beiden Isotope $^{10}_{21}$Ne und $^{10}_{22}$Ne mit 5 α-Teilchen und einem bzw. zwei weiteren Neutronen.

11. *Die Wege auf der Kernfläche zwischen zwei PN-Konfigurationen stellen Kernumwandlungen dar.*

Folgende Fälle sind hervorzuheben:

A. Der Weg führe vom Punkte P_λ des Elementes der Ordnungszahl λ unmittelbar zum Punkt $P_{\lambda-1}$. Die Summen der P- und N-Punkte der beiden Konfigurationen seien gleich, die dargestellten Kerne sind isobar. Die Konfiguration P_λ besteht demnach aus λ Punkten des P-Systems und n Punkten des N-Systems, die Konfiguration P_{2-1} aus $\lambda-1$ Punkten des P-Systems und $n+1$ Punkten des N-Systems. Es geht unterwegs ein Proton in ein Neutron über. Dabei wird in der Umgebung des Kerns ein positives Elektron mit der Ladung des Protons und ein Neutrino, jedes von beiden mit dem Eigendrehimpuls $\frac{1}{2} \cdot h/2\pi$, geschaffen.[6]) Wird der Weg in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, so entsteht ein negatives Elektron und ein Neutrino. Demnach gilt der Satz:

„*Wege auf der Kernfläche zwischen Konfigurationen mit gleicher Punktezahl bedingen die Elektronenradioaktivität. Im Sinne steigender P-Nummern durchlaufen, sind sie mit der Ausstrahlung negativer Elektronen verbunden, in entgegengesetzter Richtung mit der Ausstrahlung von Positronen.*"

B. Wege auf der Kernfläche zwischen Konfigurationen, deren jede 2 P-Punkte und 2 N-Punkte weniger zählt als die vorhergehende, bedingen die α-Radioaktivität. Es gibt auf der Fläche vier Wege dieser Art:

a) Der Weg durch diejenigen P-N-Konfigurationen, deren Punktezahlen durch 4 teilbar sind, nämlich 232, 228, 224, ... Er entspricht der *Thoriumreihe* des radioaktiven Zerfalls.

6) Fermi, Ztschr. f. Phys. 88 (1934), S. 161. — Für beide Korpuskeln gelten Diracgleichungen und damit die geometrischen Ergebnisse von Abh. I und II. Bekanntlich entsteht das Neutrino zur Rettung des Impulsenergiesatzes.

b) Der Weg durch die P-N-Konfigurationen, deren Punktezahlen geradzahlig, aber nicht durch vier teilbar sind, nämlich 238, 234, 230,... Er entspricht der *Uranreihe.*

c) Der Weg durch solche P-N-Konfigurationen, deren ungerade Punktezahlen je um 1 unterhalb der Stationen der Thoriumreihe liegen, also 231, 227, ... Er entspricht der (bei 235 beginnenden) *Aktiniumreihe.*

d) Der Weg ungerader Punktezahlen, je um 1 unterhalb der Stationen der Uranreihe, also 233, 229, ... Er ist nur in einzelnen seiner Stationen künstlich realisiert. Zwischen die Wegstrecken der vier radioaktiven Zerfallsreihen lassen sich Wegstrecken der Elektronenradioaktivität ohne Störung dieser Vorschriften einschalten, wodurch die bekannte Gabelung und Wiedervereinigung der radioaktiven Zerfallsreihen entsteht.

C. Andere Wege auf der Kernfläche stellen die künstlichen Kernumwandlungen dar. Dabei sind zwei Arten von Wegen zu unterscheiden, je nachdem die Umwandlung von künstlicher Radioaktivität begleitet ist oder nicht. Wege der ersten Art sind weiter zu klassifizieren nach Charakter der ausgesandten Strahlen, beide Arten von Wegen können außerdem unterteilt werden nach der Form der Anregung, welche die Umwandlung hervorruft. (Beschießung mit α-Teilchen, Deuteronen, Protonen, Neutronen.)

D. Von jeder der Flächenstellen U^{235}_{92}, Pa^{231}_{91}, Th^{230}_{90}, Th^{231}_{90} im Blatt $n_1 = 6$ zeichnen wir je die Wege zu den Punktepaaren:

Br_{35}—La_{57}, Rb_{37}—Cs_{55}, Sr_{38}—Xe_{54}, Y_{39}—J_{53}, Zr_{40}—Te_{52}, Nb_{41}—Sb_{51} in den Blättern 4, 5, 6. Unter der Wirkung langsamer Neutronen werden die Kerne der an den Ausgangsstellen sitzenden schweren Elemente Uran, Protaktinium und Thorium je in die beiden Elementekerne an den Endpunkten dieser Wegepaare gespalten. Die eingezeichneten Wegepaare stellen auf der Fläche die *Kernspaltungen* dar. Die beiden Kerntrümmer, also die Elementekerne an den Endpunkten der Wegepaare, sind bekanntlich Betastrahler (A) und stoßen zum Teil auch Neutronen aus, so daß sich einzelne Wege von den Endstationen aus noch fortsetzen, bis ein stabiler Endkern erreicht ist. Vom Sitz des Uranhauptisotopes U^{238}_{92} führen entsprechende Wege nach Pd, Ag, Cd und Jn, da ersteres durch Bestrahlung mit schnellen Neutronen in zwei annähernd gleiche Teile gespalten wird, die diesen Elementen angehören.

Wird das System der Elemente durch weiteren Ausbau der Kern- und der Eigenwertfläche über das Uran hinaus extrapoliert, und zwar

unter Berücksichtigung der Gesichtspunkte, welche die Besetzung der Flächenpunkte Nr. 1—92 regelten, so kann man aus der Gestalt der Fläche zu der Vermutung kommen, daß die auf Nr. 92 folgenden Transurane eine ähnliche Gruppe bilden wie die seltenen Erden im dritten Ringe des vierten Blattes.

12. Mit Hilfe der Kernfläche können auch die einzelnen Energiestufen der Kernteile geordnet dargestellt werden. Die gesamte Wechselwirkung des einzelnen Protons oder Neutrons mit allen übrigen Kernteilen werde durch ein Potentialfeld beschrieben, in dem sich jeder Kernteil unabhängig von allen übrigen bewegt. Dann lassen sich die verschiedenen Energiezustände $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$ durch die Protonen und Neutronen des Kerns nach dem Pauliprinzip (7) besetzen. Vom Termaufbau der Elektronenhülle unterscheidet sich der des Kerns durch die (aus den beiden Arten von Kernteilen folgenden) doppelten Besetzungszahlen und durch eine teilweise andere Reihenfolge der Terme. Die nachfolgende Zusammenstellung zeigt die ideale Termbesetzung des Kerns für die unteren Stufen, die sich an den Blättern der Kernfläche ablesen läßt.

$n_1 =$	1	2		3			4				5				
$n_2 =$	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4
Protonen	2	2	6		6	10				14					18
Neutronen	2	2	6		6	10				14					18
Termbezeichnung	1*s*	2*s*	2*p*	3*s*	3*p*	3*d*	4*s*	4*p*	4*d*	4*f*	5*s*	5*p*	5*d*	5*f*	5*g*

Die Eigenwertfläche und die Kernfläche zusammen geben erst die Struktur der Atomphysik vollständig wieder. Daß die beiden unbesetzten Flächen zwar Spiegelbilder voneinander sind (9), für Elektronenhülle und Kern des Atoms aber zum Teil asymmetrische Rollen spielen, ist der geometrische Ausdruck dafür, daß die Naturgesetze zwar symmetrisch in bezug auf die positiven und negativen Ladungsträger sind, daß die positive Ladung aber den Kern, die negative die Elektronenhülle bevorzugt. Bei einer folgerichtigen Durchführung der geometrischen Symmetrie wäre nach Besetzung beider Flächen eine abermalige Spiegelung zulässig. Es gäbe auch Materie mit negativen Kernen und positiver Elektronenhülle.

(Eingegangen am 20. 11. 1941.)