Sonderdruck aus
„Zeitschrift für technische Physik".
Vierundzwanzigster Jahrgang. Nr. 4. 1943.
Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

Die de Broglie sche Theorie des Photons in geometrischer Darstellung

Von G. Haenzel, Karlsruhe
(Technische Hochschule Karlsruhe)

Mit 1 Abbildung im Text

Die Elementarteile der modernen Atomlehre sind weniger materielle Gebilde in Raum und Zeit als vielmehr Symbole und Träger mathematischer Strukturen, die mit Hilfe von Systemen partieller Differentialgleichungen, Matrizen und Operatoren die Ergebnisse einer subtilen experimentellen Erfahrung beschreiben. Wenn somit jede Möglichkeit entfällt, Modelle von Elementarteilen wie von realen Raumgebilden herzustellen, so erscheint es um so dringender, Modelle jener mathematischen Strukturen selbst aufzuzeigen. Die geometrische Formulierung dürfte diese Theorie auf eine besonders einfache und unmittelbare Gestalt zurückführen.

In früheren Abhandlungen[1]) wurde eine geometrische Theorie für das Einelektronensystem und

[1]) G. Haenzel, Geometrie und Wellenmechanik, Jahresber. d. Deutsch. Mathematiker-Vereinig. **49** (1939), 215—242. — Geometrie und Wellenmechanik II, ebenda **50** (1940), 121—129. — Geometrie und Wellenmechanik III, ebenda **52** (1942), 103—117. — Die Diracsche Wellengleichung und das Ikosaeder, Journ. f. reine u. angew. Math. **183** (1941), 232—242. — Die Polygonfläche und das periodische System der Elemente, ZS. f. Phys. **1943**, 283—300.

das Zweielektronensystem mit geometrischer Darstellung der Unschärfe- und Vertauschbarkeitsrelationen entwickelt. Im Anschluß daran wird im folgenden die Theorie des Photons und des lichtelektrischen Effektes von de Broglie[2]) durch geometrische Theoreme und Konstruktionen dargestellt.

1. Das Photon stellt nach de Broglie ein System von 2 komplementären Korpuskeln dar. Jede hat die Masse $\frac{\mu_0}{2}$ und ihr Verhalten ist durch je eine Diracsche Gleichung geregelt. Die beiden Gleichungen lassen sich mit $\varkappa = \frac{2\pi i}{h}$ in der Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial \psi_i}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\sum_l (\alpha_1)_{il}\psi_l + \frac{\partial}{\partial y}\sum_l (\alpha_2)_{il}\psi_l + \frac{\partial}{\partial z}\sum_l (\alpha_3)_{il}\psi_l + \varkappa\frac{\mu_0}{2}c\sum_l (\alpha_4)_{il}\psi_l, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\sum_m (\alpha_1)_{km}\varphi_m - \frac{\partial}{\partial y}\sum_m (\alpha_2)_{km}\varphi_m + \frac{\partial}{\partial z}\sum_m (\alpha_3)_{km}\varphi_m - \varkappa\frac{\mu_0}{2}c\sum_m (\alpha_4)_{km}\varphi_m . \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die verwendeten Matrizen sind:

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \alpha_4 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2)$$

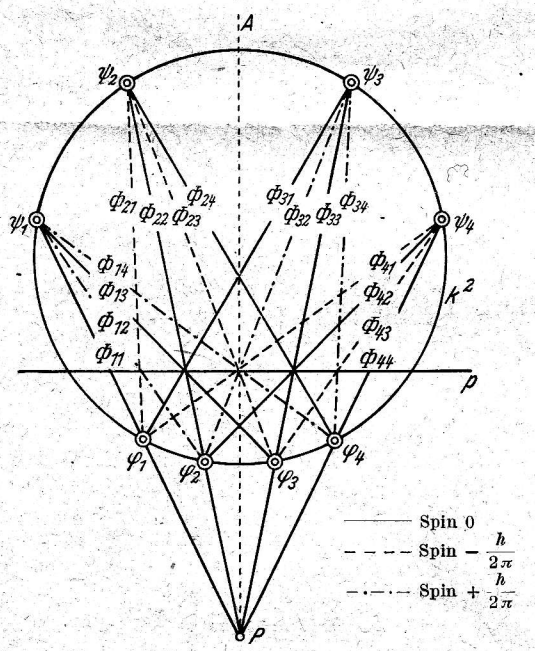

Abb. 1

Geometrisch liegt nach früheren Abhandlungen ein System von zwei Brianchonschen Sechsseiten des gleichen Kegelschnittes k^2 vor, die durch eine perspektive Involution von k^2 miteinander vertauscht werden. Das Zentrum P und die Achse p der perspektiven Involution sind Pol und Polare bezüglich des Kegelschnittes k^2. In Abb. 1 sind jetzt die vier Komponenten ψ_i der Lösungsfunktion ψ der ersten Diracschen Gleichung (1) auf vier der sechs Berührungspunkte des ersten Brianchonschen Sechsseits zu verlegen. Das kann auf 15 verschiedene Arten geschehen. Die vier Komponenten φ_k der Lösungsfunktion φ der zweiten Diracschen Gleichung (1) sind dann den perspektiv involutorisch entsprechenden vier Berührungspunkten des anderen Brianchonschen Sechsseites zuzuordnen. Die acht Punkte erhalten die Bezeichnungen ψ_i und φ_i ($i = 1 \ldots 4$). Die vier Punkte ψ_i werden mit den vier Punkten φ_k durch 16 Geraden $\Phi_{ik} = \psi_i \varphi_k$ verbunden.

Gleichzeitig werden die Lösungsfunktionen ψ, φ der beiden Gleichungen zu einer einzigen Lösungsfunktion Φ verschmolzen. Ihre Komponenten sind definiert durch

$$\Phi_{ik} = \psi_i \varphi_k . \quad (3)$$

Mit Hilfe der bekannten Symbole $\delta_{km} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right\}$ für $k \left\{\begin{matrix} \neq m \\ = m \end{matrix}\right\}$ werden aus den 4 Matrizen α_λ 8 neue Matrizen A_λ und B_λ von je 16 Elementen nach der Vorschrift gebildet:

$$\left.\begin{aligned} (A_1)_{ik,\,lm} &= (\alpha_1)_{il}\cdot\delta_{km}, \quad (A_2)_{ik,\,lm} = (\alpha_2)_{il}\cdot\delta_{km}, \\ (A_3)_{ik,\,lm} &= (\alpha_3)_{il}\cdot\delta_{km}, \quad (A_4)_{ik,\,lm} = (\alpha_4)_{il}\cdot\delta_{km}, \\ (B_1)_{ik,\,lm} &= (\alpha_1)_{km}\cdot\delta_{il}, \\ (B_2)_{ik,\,lm} &= -(\alpha_2)_{km}\cdot\delta_{il}, \\ (B_3)_{ik,\,lm} &= (\alpha_3)_{km}\cdot\delta_{il}, \\ (B_4)_{ik,\,lm} &= -(\alpha_4)_{km}\cdot\delta_{il}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Durch Multiplikation der ersten Gl. (1) mit φ_k, der zweiten mit ψ_i entstehen 2 simultane Gleichungssysteme von je 16 Gleichungen für die 16 Komponenten Φ_{ik} der Wellenfunktion des Photons:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial t} = \Big(A_1\frac{\partial}{\partial x} + A_2\frac{\partial}{\partial y} + A_3\frac{\partial}{\partial z} \\ + \varkappa\mu_0 c A_4\Big)\Phi_{ik}, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

[2]) L. de Broglie, Nouvelles recherches sur la lumière. Actualités scientifiques et industrielles, Paris 1936, S. 411. — Continu et discontinu en physique moderne, Paris 1941, S. 204 ff.

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial t} = \left(B_1 \frac{\partial}{\partial x} + B_2 \frac{\partial}{\partial y} + B_3 \frac{\partial}{\partial z} + \varkappa \mu_0 c B_4\right) \Phi_{ik}. \tag{6}$$

Es läßt sich zeigen, daß keine Überbestimmung stattfindet. Aus (5) und (6) gehen durch Summen- und Differenzbildung die gleichwertigen Gleichungssysteme hervor:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial t} = \left[\frac{(A_1+B_1)}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(A_2+B_2)}{2}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{(A_3+B_3)}{2}\frac{\partial}{\partial z} + \varkappa \mu_0 c \frac{(A_4+B_4)}{2}\right] \Phi_{ik}, \tag{7}$$

$$0 = \left[\frac{(A_1-B_1)}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(A_2-B_2)}{2}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{(A_3-B_3)}{2}\frac{\partial}{\partial z} + \varkappa \mu_0 c \frac{(A_4-B_4)}{2}\right] \Phi_{ik}. \tag{8}$$

Die Gleichungen (7) bestimmen als Entwicklungsgleichungen den Verlauf der Wellenfunktion des Photons durch die 16 Komponenten Φ_{ik} von einem gegebenen Anfangszustande ab. Ihnen entsprechen in der Theorie des Elektromagnetismus die Gleichungen für $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$ und $\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$. Die 16 Gleichungen (8) müssen jederzeit erfüllt sein und entsprechen den Gleichungen für div $\mathfrak{E}$ und div $\mathfrak{H}$ der elektromagnetischen Theorie. Im Hinblick auf die Abb. 1 erhält man:

„Die Matrix der 16 Komponenten Φ_{ik} der Wellenfunktion des ganzen Photons entspricht der Konfiguration von 16 Verbindungsgeraden von vier Berührungspunkten ψ_i des ersten Sechsseites mit vier Berührungspunkten φ_k des zweiten Sechsseites. Die vier Φ_{ik} der i-ten Zeile sind durch die vier Geraden des Punktes ψ_i, die vier Φ_{ik} der k-ten Spalte sind durch die vier Geraden des Punktes φ_k dargestellt, die vier Elemente der Hauptdiagonalen entsprechen den vier Geraden durch den Pol P. Die Transformation durch die perspektive Involution gibt das Vertauschen von Zeilen und Spalten wieder. Bei Vertauschung beider Halbphotonen bleibt das Lösungssystem der Φ_{ik} unverändert."

2. Die 16 Komponenten teilen sich nach den zugehörigen Spinwerten längs der z-Achse in drei Gruppen (Abb. 1):

$$\Phi_{11}, \Phi_{22}, \Phi_{33}, \Phi_{44}, \quad \Phi_{13}, \Phi_{31}, \quad \Phi_{24}, \Phi_{42}.$$

Beide Indizes haben gleiche Teilbarkeit. Spin = 0.

$$\Phi_{21}, \Phi_{23}, \quad \Phi_{41}, \Phi_{43}.$$

Beide Indizes haben verschiedene Teilbarkeit, der vordere ist gerade. Spin $= -\frac{h}{2\pi}$.

$$\Phi_{12}, \Phi_{14}, \quad \Phi_{32}, \Phi_{34}.$$

Beide Indizes haben verschiedene Teilbarkeit, der vordere ist ungerade. Spin $= \frac{+h}{2\pi}$.

Die 16 Komponenten bilden weiter zwei Gruppen. Bei denen der Gruppe A:

$$\Phi_{11}, \Phi_{22}, \Phi_{33}, \Phi_{44}, \quad \Phi_{12}, \Phi_{21}, \Phi_{34}, \Phi_{43}$$

haben beide Indizes entweder die Werte 1 oder 2 oder sie haben beide die Werte 3 oder 4. Bei den Komponenten der Gruppe B:

$$\Phi_{13}, \Phi_{14}, \Phi_{31}, \Phi_{41}, \quad \Phi_{23}, \Phi_{24}, \Phi_{42}, \Phi_{32}$$

gehört der eine Index dem Zahlenpaar 1, 2, der andere dem Paar 3, 4 an.

In Abb. 1 sind die vier Komponenten der Gruppe A durch die acht Strecken Φ_{ik} dargestellt, die die Gerade PA nicht kreuzen, sondern entweder rechts oder links vor ihr liegen, die 8 Komponenten der Gruppe B durch die 8 die Gerade PA kreuzenden Strecken Φ_{ik}.

Mit Hilfe der Φ_{ik} und bekannter Konstanten lassen sich folgende 16 neue Größen linear darstellen (Gl. 9).

$$\begin{aligned}
A_x &= -K[\Phi_{41} + \Phi_{32} + \Phi_{23} + \Phi_{14}] \\
A_y &= -iK[\Phi_{41} - \Phi_{32} + \Phi_{23} - \Phi_{14}] \\
A_z &= -K[\Phi_{31} - \Phi_{42} + \Phi_{13} - \Phi_{24}] \\
V &= K[\Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33} + \Phi_{44}] \\
E_x &= K\varkappa\mu_0 c[-\Phi_{41} - \Phi_{32} + \Phi_{23} + \Phi_{14}] \\
E_y &= K\varkappa\mu_0 c\, i[-\Phi_{41} + \Phi_{32} + \Phi_{23} - \Phi_{14}] \\
E_z &= K\varkappa\mu_0 c[-\Phi_{31} + \Phi_{42} + \Phi_{13} - \Phi_{24}] \\
J_1 &= -\Phi_{11} - \Phi_{22} + \Phi_{33} + \Phi_{44}.
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= i[\Phi_{12} + \Phi_{21} + \Phi_{34} + \Phi_{43}] \\
\sigma_y &= \Phi_{12} - \Phi_{21} + \Phi_{34} - \Phi_{43} \\
\sigma_z &= i[\Phi_{11} - \Phi_{22} + \Phi_{33} - \Phi_{44}] \\
\sigma_t &= -i[\Phi_{13} + \Phi_{24} + \Phi_{31} + \Phi_{42}] \\
X_x &= K\varkappa\mu_0 c\, i[-\Phi_{21} - \Phi_{12} + \Phi_{34} + \Phi_{43}] \\
H_y &= K\varkappa\mu_0 c[-\Phi_{21} + \Phi_{12} + \Phi_{43} - \Phi_{34}] \\
H_z &= -K\varkappa\mu_0 c\, i[-\Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33} - \Phi_{44}] \\
J_2 &= i(\Phi_{13} + \Phi_{24} - \Phi_{31} - \Phi_{42})
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Die Determinante der 16 Bestimmungsgleichungen ist nicht Null, so daß umgekehrt die Φ_{ik} aus den 16 neuen Größen bestimmbar sind. Von ihnen stellen $A_x, A_y, A_z, V, E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ bekannte elektromagnetische Größen dar.

3. Im lichtelektrischen Effekt wird das Photon von einem gegebenen Anfangszustande aus liquidiert. Energie, Bewegungsgröße und Spin werden Null. Umgekehrt kann das liquidierte Photon durch Energieabgabe (seitens eines Elektrons) aus dem Liquidationszustande wieder erhoben werden. Die in diesem Sinne den lichtelektrischen Effekt beschreibenden Lösungen des Gleichungssystems (7)

werden von de Broglie nach zwei Gesichtspunkten ausgesucht:

A. Die für die Liquidation des Photons maßgeblichen Lösungen müssen von x, y, z, t unabhängig sein, daher im Hinblick auf (7) der Gleichung

$$(A_4 + B_4)\,\Phi_{ik} = 0 \qquad (10)$$

genügen, oder mit Rücksicht auf die Entstehung von A_4 und B_4 nach (4) der Gleichung

$$[(\alpha_4)_{ii} - (\alpha_4)_{kk}]\,\Phi_{ik} = 0\,. \qquad (11)$$

Wegen der Form der Matrix α_4 in (2) ergibt sich daraus, daß die 8 Komponenten der Gruppe B in Nr. 2 Null sein müssen, während die Komponenten der Gruppe A konstante Werte besitzen können. Da auch der Spin verschwinden soll, so folgt wegen der Zuordnung der Spinwerte zu den Φ_{ik} in Nr. 2, daß von der Gruppe A noch die Komponenten Φ_{12}, Φ_{21}, Φ_{34}, Φ_{43} verschwinden müssen.

Der Beschreibung des lichtelektrischen Effekts dient also eine Lösung, deren 4 Hauptdiagonalkomponenten konstant sind, während alle übrigen Komponenten verschwinden. Setzt man die 4 Konstanten gleich eins, so lautet die Liquidationslösung

$$\Phi_{ik} = \delta_{ik}\,, \quad \text{andernfalls} \quad \Phi_{ik} = C_i\,\delta_{ik}\,. \qquad (12)$$

Ein Mangel dieser Lösung ist es, daß die Annahme $C_i = 1$ eine unbegründete Willkür darstellt, während $C_i \neq 1$ auf Schwierigkeiten bei der Konstruktion des elektromagnetischen Feldes führt. Ferner genügt die Lösung (12) dem Gleichungssystem (7), aber nicht (8), solange $\mu_0 \neq 0$. Als Grundlage der Theorie hätte man (7) allein anzusehen, (8) nur für die von x, y, z, t abhängigen Lösungen hinzuzufügen. Dem widerspricht die enge Koppelung von (7) und (8) hinsichtlich ihrer Invarianz gegen Lorentztransformationen.

B. Die für die Liquidation maßgeblichen Lösungen sollen Invarianz gegen Lorentztransformationen besitzen. Da wieder Orts- und Zeitunabhängigkeit bestehen soll, können nur die Komponenten der Hauptdiagonale von Null verschieden sein. Von den 16 Größen in Gl. (9) gilt also

$$J_1 \neq 0\,, \quad V \neq 0, \quad H_z \neq 0, \quad \sigma_z = 0\,.$$

Die übrigen verschwinden, weil sie aus Komponenten Φ_{ik} außerhalb der Hauptdiagonale gebildet sind. Die Forderung der Invarianz gegen Lorentztransformationen aber verlangt, daß auch V, H_z und σ_z als Komponenten von Tensoren oder Vektoren Null sind. Für eine diagonale und invariante Lösung sind daher die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:

$$\left.\begin{array}{ll} V = \Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33} + \Phi_{44} = 0 & J_1 \neq 0 \\ H_z = -\Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33} - \Phi_{44} = 0 & \Phi_{ik} = 0 \\ \sigma_z = \Phi_{11} - \Phi_{22} + \Phi_{33} - \Phi_{44} = 0 & \text{für } i \neq k \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Sie werden erfüllt von:

$$\Phi^0 = \Phi_0 = C\,, \quad \Phi = \Phi^0_{22} = -C\,. \qquad (14)$$

Da die elektromagnetischen Größen einen Faktor K enthalten, kann $C = 1$ gesetzt werden, so daß die Liquidationslösung lautet:

$$\Phi^0_{ik} = (\alpha_4)_{ik}\,, \quad \text{d. h.} \quad \Phi^0 = \alpha_4\,. \qquad (15)$$

In beiden Fällen A und B gilt daher:

„Für die Darstellung des lichtelektrischen Effektes sind in Abb. 1 nur die vier Geraden durch den Pol P mit konstanten von Null verschiedenen Werten zu belegen."

Die gesamte geometrische Konfiguration ist gegenüber der perspektiven Involution mit dem Zentrum P und der Achse p invariant (Vertauschbarkeit); ferner sind die ∞^3 linaren Transformationen des Kegelschnittes k^2 in sich zulässig entsprechend den früheren geometrischen Ausführungen zur Unbestimmtheitsrelation (vgl. die zweite der in Anm. 1 genannten Abhandlungen).

(Eingegangen am 23. März 1943)