Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz. IV.

Über algebraische Regelflächen vom Grade 2n mit zwei n-fachen Leitgeraden (n = 3, 4, 5, 6).

Von *G. Haenzel* und *F. Reutter* in Karlsruhe.

Die algebraischen Regelflächen von fünftem und höherem Grade sind der Untersuchung schwer zugänglich und eine einigermaßen vollständige Klassifikation reicht über die Regelflächen fünften[1]) und sechsten[2]) Grades nicht hinaus. Im folgenden werden Büschel von Regelflächen sechsten, achten, zehnten und zwölften Grades mit zwei (reellen oder konjugiert imaginären) windschiefen Leitgeraden behandelt. Ihre Regelscharen liegen in der (hyperbolischen oder elliptischen) linearen Kongruenz. Die Untersuchung dieser sehr komplizierten Objekte wird durch die Abbildung der elliptischen und der hyperbolischen Kongruenz auf die komplexe oder die dualkomplexe Ebene ermöglicht. Die Bildkurven der Regelscharen stehen in engen Beziehungen zu den kubischen und biquadratischen Funktionen einer (komplexen oder dualkomplexen) Veränderlichen und deren Kovarianten.

Im Abschnitt I A werden aus geometrischen Theoremen[3]) über die Kovariantensysteme kubischer und biquadratischer Funktionen einer komplexen Veränderlichen neue Sätze über Büschel algebraischer Kurven höherer Ordnung und ihre Orthogonalbüschel entwickelt als notwendige Basis für die späteren liniengeometrischen Resultate. Diese bisher unbekannten zirkularen Kurven fünfter, sechster, achter, neunter, zehnter und zwölfter Ordnung sind nämlich die Bildkurven algebraischer Regelflächen sechsten, achten, zehnten und zwölften Grades mit zwei konjugiert imaginären windschiefen Leitgeraden (Abschnitt II A). Die Teile I B und II B behandeln algebraische Regelflächen sechsten, achten, zehnten und zwölften Grades mit zwei reellen windschiefen Leitgeraden und ihre Bildkurven im Zusammenhang mit den Kovariantensystemen kubischer und biquadratischer Funktionen der dualkomplexen Ebene. Im Laufe der Untersuchung zeigt sich, daß die lineare Kongruenz Vierergruppen von Involutionen besitzt; diese haben die bemerkenswerte Eigenschaft, die ∞^1 Regelscharen zweier konjugierter Büschel von Regelflächen achten Grades invariant zu lassen.

---

[1]) H. A. Schwarz, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **67** (1867), S. 23.

[2]) V. Snyder, Am. Journ. of Math. **25** (1903) S. 59—96, 261—268, **27** (1905) S. 77—102, 173—188.

[3]) G. Haenzel, Über ganze rationale Funktionen, Sitz.-Ber. d. Berl. Math. Ges. **28** (1929), S. 41—45.

Die Abhandlung ist entstanden im Anschluß an eine Reihe von Arbeiten über die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz[4]), von deren Methoden und Ergebnissen hier häufig Gebrauch gemacht wird.

I. Büschel zirkularer Kurven höherer Ordnung.

A. Zirkulare Kurven der euklidischen Ebene.

1. Die kubische Funktion $w = f_3(z)$ hat eine Hessesche Kovariante $H(z)$ vom zweiten Grade und eine Jacobische Kovariante $J(z)$ vom dritten Grade. Wir setzen zwei voneinander verschiedene Nullstellen $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}$ von $H(z)$ voraus, so daß ein Kreis H^2 über $z_{\mathrm{I}} z_{\mathrm{II}}$ als Durchmesser bestimmt ist (Fig. 1). Die Inversion an diesem Kreise und die Spiegelung an der Geraden $z_{\mathrm{I}} z_{\mathrm{II}}$ vertauscht die Nullstellen z_1, z_2, z_3 von $f_3(z)$ mit den Nullstellen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$ von $J(z)$. Die Nullstellendreiecke von $f_3(z)$ und $J(z)$ haben einen gemeinsamen Umkreis R^2, der zum Kreisbüschel durch $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}$ orthogonal ist. Die apollonischen Kreise R_1^2, R_2^2, R_3^2 des Nullstellendreiecks $z_1 z_2 z_3$ von $f_3(z)$ schneiden den Umkreis R^2 rechtwinklig in den drei Nullstellen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$ von $J(z)$ und schneiden einander in den beiden Nullstellen $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}$ von $H(z)$. Die beiden Nullstellen $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}$ sind die isodynamischen Punkte des Dreiecks $z_1 z_2 z_3$.

2. Die drei Punkte z_1, z_2, z_3 bedingen aber nicht nur die beiden Punktegruppen $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}$ und $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$ elementargeometrisch, sondern sie bestimmen auch die drei Transformationen:

$$w = \frac{f_3(z)}{H(z)}, \quad w = \frac{J(z)}{z \cdot H(z)}, \quad w = \frac{f_3(z)}{J(z)}.$$

Werden die beiden Nullstellen von $H(z)$ nach $+1, -1$ verlegt, so ergeben sich die Darstellungen:

$$\begin{aligned} f_3(z) &= z^3 + 3(p + iq)z^2 + 3z + p + iq\,, \\ J(z) &= (p + iq)z^3 + 3z^2 + 3(p + iq)z + 1\,, \\ H(z) &= z^2 - 1\,. \end{aligned}$$

a) Die Transformation $w = \dfrac{f_3(z)}{H(z)}$ verwandelt die w-Geraden durch den Anfangspunkt 0 in einen Büschel B_1^5 von ∞^1 Kurven fünfter Ordnung und sie bildet die konzentrischen w-Kreise um den Anfangspunkt in einen Büschel B_2^6 von ∞^1 Kurven sechster Ordnung ab. Die Gleichungen der beiden Büschel lauten in Polarkoordinaten r, φ:

$$(1)\quad B_1^5 \begin{cases} [r^4 - 2r^2(1 + 2\cos^2\varphi) - 8pr\cos\varphi - 3]r\sin\varphi + (q + \lambda p)[3r^4 - 2r^2\cos 2\varphi - 1] \\ \qquad + \lambda[r^4 + 2r^2(1 + 2\sin^2\varphi) + 8qr\sin\varphi - 3]r\cos\varphi = 0 \end{cases}$$

$$(2)\quad B_2^6 \begin{cases} r^6 + 6r(r^4 + 1)(p\cos\varphi + q\sin\varphi) + 6r^2(r^2 + p^2 + q^2)\cos 2\varphi + 9r^4(p^2 + q^2) \\ \quad + 12r^3(p\cos\varphi - q\sin\varphi) + 8r^3(p\cos^3\varphi - q\sin^3\varphi) + 9r^2 + p^2 - q^2 \\ \qquad + \lambda[r^4 - 2r^2\cos 2\varphi + 1] = 0 \end{cases}$$

---

[4]) G. Haenzel, Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz. I., Journ. f. d. reine u. angew. Math. **173** (1935), S. 91—113; G. Haenzel, Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz. II., Journ. f. d. reine u. angew. Math. **175** (1936), S. 169—181; G. Haenzel u. F. Reutter, Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz. III., Journ. f. d. reine u. angew. Math. **178** (1938), S. 229—252; G. Haenzel, Eine analytische Theorie der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **166** (1932), S. 167—181.

oder

$$f(r, \varphi) + \lambda\, h(r, \varphi) = 0\,.$$

Die ∞^1 Kurven fünfter Ordnung des Büschels B_1^5 gehen je zweimal durch beide Kreispunkte und sie berühren einander in ihnen. Diese Punkte sind also sechsfache Knotenpunkte des Büschels. Der Büschel hat außerdem die drei Nullstellen von $f_3(z)$ und die beiden Nullstellen von $H(z)$ zu reellen einfachen Knotenpunkten. Seine übrigen acht Knotenpunkte sind imaginär und zählen i. a. einfach. Die ∞^1 Kurven sechster Ordnung des Orthogonalbüschels B_2^6 gehen je dreimal durch beide Kreispunkte. Der Büschel hat nur konjugiert imaginäre Knotenpunkte. Jede der ∞^1 Kurven fünfter Ordnung des Büschels B_1^5 hat eine Asymptote; die ∞^1 Asymptoten bilden den Strahlenbüschel erster Ordnung mit der Gleichung

$$y = -\lambda x - 3p\lambda - 3q\,.$$

b) Die Transformation $w = \dfrac{J(z)}{zH(z)}$ bildet die Geraden durch den Anfangspunkt 0 der w-Ebene auf die ∞^1 Kurven sechster Ordnung eines Büschels $B_1'^6$ ab und die konzentrischen w-Kreise um den Anfangspunkt auf die ∞^1 Kurven sechster Ordnung des orthogonalen Büschels $B_2'^6$. Ihre Gleichungen sind:

$$(3)\quad B_1'^6 \begin{cases} [3r^4 + 2r^2(1 + 2\cos^2\varphi) + 8pr^3\cos\varphi - 1]\, r\sin\varphi - (q + \lambda p) r^2\, [r^4 + 2r^2\cos 2\varphi - 3] \\ \qquad - \lambda[3r^4 - 2r^2(1 + 2\sin^2\varphi) - 8qr^3\sin\varphi - 1]\, r\cos\varphi = 0 \end{cases}$$

$$(4)\quad B_2'^6 \begin{cases} (p^2 + q^2) r^6 + 6r(r^4 + 1)(p\cos\varphi - q\sin\varphi) + 6r^2(p^2r^2 + q^2r^2 + 1)\cos 2\varphi + 9r^4 \\ \qquad + 12r^3(p\cos\varphi + q\sin\varphi) + 8r^3(p\cos^3\varphi + q\sin^3\varphi) + 9(p^2 + q^2) r^2 + 1 \\ \qquad\qquad + \lambda\, r^2[r^4 - 2r^2\cos 2\varphi + 1] = 0 \end{cases}$$

oder

$$j(r, \varphi) + \lambda r^2 h(r, \varphi) = 0\,.$$

Die ∞^1 Kurven sechster Ordnung des Büschels $B_1'^6$ gehen je dreimal durch beide Kreispunkte; die drei Nullstellen von $J(z)$, der Punkt $x = y = 0$ und die beiden Nullstellen von $H(z)$ sind die reellen Knotenpunkte des Büschels. Die ∞^1 Kurven sechster Ordnung des Orthogonalbüschels $B_2'^6$ sind gleichfalls dreifach zirkular. Der Büschel hat nur imaginäre Knotenpunkte.

c) Die Transformation $w = \dfrac{f_3(z)}{J(z)}$ verwandelt den Geradenbüschel durch den Anfangspunkt der w-Ebene und den Büschel konzentrischer Kreise in zwei zueinander orthogonale Büschel B_3^6, B_4^6 von dreifach zirkularen Kurven sechster Ordnung mit den Gleichungen:

$$(5)\quad B_3^6 \begin{cases} qr^6 + 3(p^2 + q^2 - 1) r(r^4 + 1)\sin\varphi - (9qr^2 - 6qr^2\cos 2\varphi)(r^2 - 1) \\ \qquad - (p^2 + q^2 - 1) r^3\sin\varphi\,(6 + 4\sin^2\varphi) - q \\ + \lambda[pr^6 + 3(p^2 + q^2 + 1)(r^4 + 1) r\cos\varphi + (9pr^2 + 6pr^2\cos 2\varphi)(r^2 + 1) \\ \qquad + (p^2 + q^2 + 1) r^3\cos\varphi(6 + 4\cos^2\varphi) + p] = 0 \end{cases}$$

$$(6)\quad B_4^6 \qquad f(r, \varphi) + \lambda j(r, \varphi) = 0\,,$$

$f(r,\varphi)$ siehe Gleichung (2), $j(r,\varphi)$ siehe Gleichung (4).

Die ∞^1 Kurven sechster Ordnung des Büschels B_3^6 sind dreifach zirkular; die drei

Nullstellen von $f_3(z)$ und die drei Nullstellen von $J(z)$ sind die reellen Knotenpunkte des Büschels B_3^6; seine restlichen Knotenpunkte sind imaginär. Der Büschel B_4^6 besteht gleichfalls aus dreifach zirkularen Kurven sechster Ordnung, hat aber nur paarweise konjugiert imaginäre Knotenpunkte. Die Kurven beider Büschel haben keine reellen Asymptoten.

3. Die Transformation $z' = \frac{1}{z}$ tauscht nach Nr. **1** die drei Nullstellen von $f_3(z)$ mit den drei Nullstellen von $J(z)$. Sie vertauscht $w = \frac{f_3(z)}{H(z)}$ mit $w = \frac{J(z)}{zH(z)}$ und $w = \frac{f_3(z)}{J(z)}$ mit $w = \frac{J(z)}{f_3(z)}$. Hieraus folgert man mit Hilfe von Nr. **2**:

Die Spiegelung am Einheitskreise und an der reellen Achse vertauscht die Kurvenbüschel B_1^5 und B_2^6 bzw. mit den Kurvenbüscheln $B_1'^6$ und $B_2'^6$. Sie führt den Büschel B_3^6 in sich über, indem sie seine ∞^1 Kurven untereinander vertauscht und in gleicher Weise tauscht sie die ∞^1 Kurven des Büschels B_4^6 untereinander aus. Im Büschel B_3^6 bleiben die beiden Kurven mit den Parameterwerten $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ einzeln fest, im Büschel B_4^6 die Kurven mit den Parameterwerten $\lambda = \pm 1$.

4. Die biquadratische Funktion

$$f_4(z) = a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4$$

hat die Hessesche Kovariante $H(z)$ vom vierten Grade und die Jacobische Kovariante $J(z)$ vom sechsten Grade sowie zwei Invarianten i, k. Mit Hilfe der Lösungen m_1, m_2, m_3 der kubischen Resolvente $m^3 - \frac{i}{2} m - k = 0$ wird $J(z)$ in drei quadratische Faktoren φ, χ, ψ gespalten:

$$(7) \quad \begin{cases} H(z) + m_1 f_4(z) = -2\varphi^2, \quad H(z) + m_2 f_4(z) = -2\chi^2, \quad H(z) + m_3 f_4(z) = -2\psi^2, \\ \qquad\qquad J(z) = 2\varphi\chi\psi. \end{cases}$$

Die sechs Nullstellen von $J(z)$ werden dadurch in drei Paare $\delta_1\delta_2$, $\delta_3\delta_4$, $\delta_5\delta_6$ geordnet. Sowohl die vier Nullstellen von $f_4(z)$ als auch die vier Nullstellen von $H(z)$ gehen je paarweise ineinander über durch Inversion an jedem der drei Kreise über der Verbindungsstrecke eines Nullstellenpaares von $J(z)$ als Durchmesser und durch Spiegelung an diesem Durchmesser[5]). Daraus ergibt sich eine elementargeometrische Konstruktion der sechs Nullstellen von $J(z)$ aus denen von $f_4(z)$ oder von $H(z)$. Die drei Nullstellenpaare von $J(z)$ sind die drei Schnittpunktepaare dreier einander senkrecht schneidender Kreise. Die drei durch $f_4(z)$ (mit Hilfe der drei Nullstellenpaare von $J(z)$) gegebenen Vertauschungstransformationen bilden mit der Identität die Vierergruppe.

5. Die vier Nullstellen von $f_4(z)$ bestimmen aber nicht nur die soeben geometrisch charakterisierten Punktegruppen der Nullstellen von $J(z)$ und $H(z)$, sondern auch die gebrochenen rationalen Transformationen, die sich durch Kombination von je zweien dieser Formen bilden lassen:

$$w = \frac{f_4(z)}{H(z)}, \quad w = \frac{J(z)}{f_4(z)}, \quad w = \frac{J(z)}{H(z)}.$$

a) Erhält $f_4(z)$ die „Normalform“:

$$f_4^0(z) = z^4 + 6(\alpha + i\beta)z^2 + 1,$$

[5]) G. Haenzel, Über ganze rationale Funktionen, Sitz.Ber. d. Berl. Math. Ges. **28** (1929), S. 31—45.

so liegen die drei Nullstellenpaare von $J(z)$ in $0, \infty; +1, -1; +i, -i$ mit

$$J(z) = z^5 - z \text{ und } H(z) = z^4 + \frac{1 - 3(\alpha + i\beta)^2}{\alpha + i\beta} z^2 + 1 .$$

Die durch die drei Nullstellenpaare von $J(z)$ bedingten drei Inversionen mit Spiegelungen sind dargestellt durch:

$$J_1\colon z' = \frac{1}{z}, \quad J_2\colon z' = -\frac{1}{z}, \quad J_3\colon z' = -z .$$

Die Transformation $w = \frac{f_4(z)}{H(z)}$ bildet den Büschel der w-Geraden durch den Anfangspunkt und den Büschel der konzentrischen Kreise um diesen Punkt in zwei orthogonale Büschel B_1^8, B_2^8 von Kurven achter Ordnung ab mit den Gleichungen:

$$(8)\quad B_1^8 \begin{cases} \beta(9\alpha^2 + 9\beta^2 + 1)(r^4 + 1)r^2 \cos 2\varphi - \alpha(9\alpha^2 + 9\beta^2 - 1)(r^4 - 1)r^2 \sin 2\varphi \\ + 12\alpha\beta r^4 + \lambda\{\alpha(1 + 3\alpha^2 + 3\beta^2)(r^4 + 1)r^2 \cos 2\varphi + \beta(3\alpha^2 + 3\beta^2 - 1)(r^4 - 1)r^2 \sin 2\varphi \\ + 6(\alpha^2 - \beta^2 - 3(\alpha^2 + \beta^2)^2)r^4 + (\alpha^2 + \beta^2)\,[(r^4 + 1)^2 - 4r^4 \sin^2 2\varphi]\} = 0 \end{cases}$$

$$(9)\quad B_2^8 \begin{cases} r^8 + 2(1 + 18\alpha^2 + 18\beta^2)r^4 + 12\alpha(r^4 + 1)r^2 \cos 2\varphi + 12\beta(r^4 - 1)r^2 \sin 2\varphi \\ - 4r^4 \sin^2 2\varphi + 1 + \lambda\Big\{r^8 + \frac{2}{(\alpha^2 + \beta^2)^3}(18 - 107\alpha^2 + 109\beta^2 + 162(\alpha^2 + \beta^2)^2)r^4 \\ + \frac{12\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}(1 - 3\alpha^2 - 3\beta^2)(r^4 + 1)r^2 \cos 2\varphi \\ - \frac{12\beta}{\alpha^2 + \beta^2}(1 + 3\alpha^2 + 3\beta^2)(r^4 - 1)\, r^2 \sin 2\varphi - 4r^4 \sin^2 2\varphi + 1\Big\} = 0 \end{cases}$$

oder

$$F(r, \varphi) + \lambda H(r, \varphi) = 0.$$

Die ∞^1 Kurven achter Ordnung des Büschels B_1^8 und ebenso die ∞^1 Kurven achter Ordnung des orthogonalen Büschels B_2^8 sind vierfach zirkular. Die reellen Knotenpunkte des Büschels B_1^8 sind die vier Nullstellen von $f_4(z)$ und die vier Nullstellen von $H(z)$. Seine übrigen Knotenpunkte sind paarweise konjugiert imaginär. Der Büschel B_2^8 hat keine reellen Knotenpunkte.

Durch jede der drei Inversionen und Spiegelungen J_1, J_2, J_3 geht jede Kurve achter Ordnung der Büschel B_1^8, B_2^8 in sich über.

b) Erhält die biquadratische Funktion die Form

$$f_4(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + az + 1 ,$$

so liegen die drei Nullstellenpaare von $J(z)$ in $+1, -1$; $A, \frac{1}{A}$; $B, \frac{1}{B}$. A, B hängen algebraisch von a, b ab. Die drei Inversionen und Spiegelungen J_i haben die Gleichungen:

$$z' = \frac{1}{z}, \quad z' = \frac{(1 + A^2)z - 2A}{2Az - (1 + A^2)}, \quad z' = \frac{2Az - (1 + A^2)}{(1 + A^2)z - 2A}.$$

Die Transformation $w = \frac{J(z)}{f_4(z)}$ bildet die Geraden und Kreise durch bzw. um den Anfangspunkt der w-Ebene auf zwei Orthogonalbüschel B_0^{10}, $B_0'^{12}$ von ∞^1 Kurven zehnter bzw. zwölfter Ordnung ab. Die Kurven des Büschels B_0^{10} sind fünffach zirkular, die des

Büschels $B_0'^{12}$ sechsfach zirkular. Der Büschel B_0^{10} hat die vier Nullstellen von $f_4(z)$ und die sechs Nullstellen von $J(z)$ zu reellen Knotenpunkten, alle übrigen vierzig Knotenpunkte sind konjugiert imaginär. Der Büschel $B_0'^{12}$ hat nur konjugiert imaginäre Knotenpunkte.

Durch die drei Inversionen und Spiegelungen J_i gehen die beiden orthogonalen Kurvenbüschel B_0^{10}, $B_0'^{12}$ in die drei Paare orthogonaler Büschel von Kurven zwölfter Ordnung über:

$$B_1^{12},\ B_1'^{12};\ B_2^{12},\ B_2'^{12};\ B_3^{12},\ B_3'^{12}.$$

Durch die drei Transformationen

$$w = -\frac{J(z)}{z^2 f_4(z)},\quad w = -\frac{J(z)(A^2-1)^2}{(2Az-(1+A^2)^2)f_4(z)},\quad w = \frac{J(z)(A^2-1)^2}{((1+A^2)z-2A)^2 f_4(z)}$$

werden diese drei Büschelpaare B_i^{12}, $B_i'^{12}$ von Kurven zwölfter Ordnung je als die Bilder der Geraden durch den Anfangspunkt und der Kreise um den Anfangspunkt der w-Ebene unmittelbar erhalten.

Die Kurven sämtlicher Büschel sind sechsfach zirkular. Die drei Kurvenbüschel B_i^{12} haben die vier Nullstellen von $f_4(z)$ und die sechs Nullstellen von $J(z)$ zu einfachen (reellen) Knotenpunkten. Die ∞^1 Kurven des Büschels B_1^{12} haben außerdem den Punkt $z = 0$ zum Doppelpunkt, die ∞^1 Kurven des Büschels B_2^{12} den Punkt $z = \frac{A^2+1}{2A}$ und die ∞^1 Kurven des Büschels B_3^{12} den Punkt $z = \frac{2A}{A^2+1}$. Die drei Kurvenbüschel $B_i'^{12}$ haben durchweg konjugiert imaginäre Knotenpunkte.

c) Tritt an Stelle von $w = \frac{J(z)}{f_4(z)}$ die Transformation

$$w = \frac{J(z)}{f_4(z)(z-a)(z-b)},\quad a \neq b,\ a, b \text{ komplex},$$

so entstehen aus den Geraden und Kreisen durch und um den Anfangspunkt der w-Ebene sofort zwei Büschel

$$B_0^{12},\ B_0'^{12}$$

zueinander orthogonaler, sechsfach zirkularer Kurven zwölfter Ordnung. Die reellen Knotenpunkte des Büschels B_0^{12} liegen in den Nullstellen von $f_4(z)$ und $J(z)$ sowie in $z = a$ und $z = b$. Die beiden Büschel werden durch die Inversionen und Spiegelungen J_i in drei weitere Paare von Büscheln

$$B_1^{12},\ B_1'^{12};\ B_2^{12},\ B_2'^{12};\ B_3^{12},\ B_3'^{12}$$

je zueinander orthogonaler, sechsfach zirkularer Kurven zwölfter Ordnung verwandelt. Die drei Kurvenbüschel B_i^{12} haben — wie B_0^{12} — die Nullstellen von $f_4(z)$ und $J(z)$ zu einfachen Knotenpunkten, dazu noch jeweils diejenigen beiden Punkte, die aus $z = a$ und $z = b$ vermöge der Inversion und Spiegelung J_i entstehen.

Schließlich werde die biquadratische Funktion wieder (wie in Nr. 5a) in der Form

$$f_4(z) = z^4 + 6(\alpha + i\beta)z^2 + 1$$

angesetzt, so daß $J(z)$ die Form

$$J(z) = z^5 - z \text{ mit einer Nullstelle in } \infty$$

annimmt. Außerdem sollen die beiden Punkte $z = a$, $z = b$ mit ein- und derselben Null-

stelle ($z = \infty$) von $J(z)$ zusammenfallen.

Unter diesen Umständen reduziert sich der Büschel B_0^{10} unter Abspaltung der uneigentlichen Geraden auf einen Büschel von Kurven neunter Ordnung B_0^9, der Büschel $B_0'^{12}$ auf einen solchen von Kurven zehnter Ordnung $B_0'^{10}$. Ihre Gleichungen lauten:

$$(10)\quad B_0^9 \begin{cases} r^9(\sin\varphi + \lambda\cos\varphi) + 6\alpha r^7(\lambda\cos^3\varphi - \sin^3\varphi + 3\sin\varphi\cos^2\varphi - 3\lambda\sin^2\cos\varphi) \\ -6\beta r^7(\cos^3\varphi + \lambda\sin^3\varphi - 3\sin^2\varphi\cos\varphi - 3\lambda\sin\varphi\cos^2\varphi) + 2r^5\sin 4\varphi(\cos\varphi + \lambda\sin\varphi) \\ \quad + 6r^3[\alpha(\sin\varphi - \lambda\cos\varphi) + \beta(\cos\varphi + \lambda\sin\varphi)] - r(\sin\varphi + \lambda\cos\varphi) = 0 \end{cases}$$

$$(11)\quad B_0'^{10} \qquad r^2 J(r, \varphi) + \lambda F(r, \varphi) = 0$$

mit

$$J(r, \varphi) = r^8 - r^6(2\cos^4\varphi + 2\sin^4\varphi - 3\sin^2 2\varphi) + 1, \quad F(r,\varphi) \text{ siehe Gleichung (9).}$$

Die drei Inversionen und Spiegelungen J_i (Nr. 5a) sind dargestellt durch:

$$J_1\colon z' = \frac{1}{z},\quad J_2\colon z' = -\frac{1}{z},\quad J_3\colon z' = -z.$$

Die beiden Kurvenbüschel B_0^9, $B_0'^{10}$ gehen durch J_3 in sich über; sowohl J_1 als auch J_2 verwandeln B_0^9 und $B_0'^{10}$ in zwei Büschel zueinander orthogonaler Kurven bzw. zehnter Ordnung B_1^9, $B_1'^{10}$. Ihre Gleichungen sind:

$$(12)\quad B_1^9 \begin{cases} r^9(\lambda\cos\varphi - \sin\varphi) - 6r^7[\alpha(\sin\varphi + \lambda\cos\varphi) - \beta(\cos\varphi - \lambda\sin\varphi)] \\ -2r^5\sin 4\varphi(\cos\varphi + \lambda\sin\varphi) - 6\alpha r^3(\lambda\cos^3\varphi - \sin^3\varphi + 3\sin\varphi\cos^2\varphi - 3\lambda\sin^2\varphi\cos\varphi) \\ -6\beta r^3(\cos^3\varphi - \lambda\sin^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + 3\lambda\sin\varphi\cos^2\varphi) + r(\sin\varphi - \lambda\cos\varphi) = 0 \end{cases}$$

$$(13)\quad B_1'^{10} \qquad \lambda r^2 F(r, \varphi) + J(r, \varphi) = 0\,.$$

Die Kurven der Kurvenbüschel B_0^9, B_1^9 haben die Geraden des Geradenbüschels $y = \lambda x$ zu Asymptoten. Die Kurve mit dem Parameterwert λ im Büschel B_0^9 hat die Gerade $y = -\lambda x$ zur Asymptote, die Kurve mit dem gleichen Parameterwert λ im Büschel B_1^9 besitzt die Asymptote $y = +\lambda x$. Mit Hilfe der Nr. 4 ist leicht einzusehen, daß die Verwendung der Transformation $w = \dfrac{J(z)}{H(z)}$ an der Stelle von $w = \dfrac{J(z)}{f_4(z)}$ nur dieselben Ergebnisse liefert.

Mit Rücksicht auf die Kovarianz der benutzten Transformationen und geometrischen Konfigurationen bleiben die angegebenen Eigenschaften der im Abschnitt I A erhaltenen zirkularen Kurven und Kurvenbüschel (abgesehen vom asymptotischen Verhalten) invariant gegenüber den linearen Substitutionen der komplexen Ebene.

B. Zirkulare Kurven der pseudoeuklidischen Ebene.

6. Die pseudoeuklidische oder dualkomplexe Ebene trägt ∞^2 Punkte $z = x + \varepsilon y$ mit $\varepsilon^2 = +1$. An die Stelle der euklidischen konjugiert imaginären Kreispunkte treten die pseudoeuklidischen Fundamentalpunkte bzw. Kreispunkte $L_1(1:1:0)$ und $L_2(1:-1:0)$. Die euklidischen Kreise aber sind durch die gleichseitigen Hyperbeln durch L_1, L_2 als pseudoeuklidische Kreise zu ersetzen. Dementsprechend ist eine Kurve der pseudoeuklidischen Ebene n-fach zirkular, wenn sie n-mal durch jeden der Punkte L_1, L_2 hindurchgeht.

Für ganze rationale Funktionen einer dualkomplexen Veränderlichen $z = x + \varepsilon y$ gilt der Fundamentalsatz der Algebra nicht in der üblichen Form. Die Funktion

$$w = u + \varepsilon v = f(z) = f(x + \varepsilon y)$$

der dualkomplexen Veränderlichen z verschwindet dann und nur dann, wenn $u(x, y)$ und $v(x, y)$ gleichzeitig Null sind. Insbesondere besitzt eine ganze rationale Funktion n-ten Grades n^2 (reelle oder konjugiert komplexe) Nullstellen. Die konjugiert komplexen Nullstellen finden in der pseudoeuklidischen Ebene keine Darstellung.

Die Kovarianten ganzer rationaler dualkomplexer Funktionen unterliegen denselben Bildungsgesetzen wie diejenigen der ganzen rationalen komplexen Funktionen, und sie bleiben gegenüber den linearen Substitutionen einer dualkomplexen Veränderlichen bis auf ganzzahlige Potenzen der Substitutionsdeterminante invariant.

So besitzt die kubische dualkomplexe Funktion

$$f_3(z) = a_0 z^3 + 3a_1 z^2 + 3a_2 z + a_3$$

eine Jacobische Kovariante $J(z)$ vom dritten und eine Hessesche Kovariante $H(z)$ vom zweiten Grade. Erhält $H(z)$ die Form

$$H(z) = z^2 - 1\,,$$

so läßt sich $f_3(z)$ auf die Form

$$f_3(z) = z^3 + 3(p + \varepsilon q)z^2 + 3z + (p + \varepsilon q)$$

bringen. Die Verbindungsstrecke der beiden Nullstellen $+1$, -1 von $H(z)$ bestimmt die gleichseitige Hyperbel h^2 durch L_1, L_2 mit der Gleichung

$$x^2 - y^2 = 1$$

als ihre reelle Hauptachsensehne, und es ergibt sich der Satz:

Durch Inversion an der gleichseitigen Hyperbel h^2 und Spiegelung an ihrer reellen Hauptachse werden die Nullstellen der dualkomplexen kubischen Funktion mit denen ihrer Jacobischen Kovariante vertauscht.

7. Die Funktion $w = \dfrac{f_3(z)}{H(z)}$ verwandelt die ∞^1 Geraden durch den Anfangspunkt der w-Ebene und die ∞^1 (mit L_1, L_2 inzidenten) gleichseitigen Hyperbeln mit diesem Mittelpunkt in zwei pseudoeuklidisch orthogonale Büschel B_1^5, B_2^6 von Kurven fünfter bzw. sechster Ordnung. Die Gleichungen der beiden Büschel lauten in pseudoeuklidischen Polarkoordinaten ϱ, t ($x = \varrho\,\mathfrak{Cos}\,t$, $y = \varrho\,\mathfrak{Sin}\,t$):

$$(14)\quad B_1^5 \left\{ \begin{aligned} &[\varrho^4 - 2\varrho^2(1 + 2\,\mathfrak{Cos}^2 t) - 8p\varrho\,\mathfrak{Cos}\,t - 3]\varrho\,\mathfrak{Sin}\,t + (q + \lambda p)[3\varrho^4 - 2\varrho^2\mathfrak{Cos}\,2t - 1] \\ &\quad + \lambda[\varrho^4 + 2\varrho^2(1 - 2\,\mathfrak{Sin}^2 t) - 8q\varrho\,\mathfrak{Sin}\,t - 3]\varrho\,\mathfrak{Cos}\,t = 0 \end{aligned} \right.$$

$$(15)\quad B_2^6 \left\{ \begin{aligned} &\varrho^6 + 6\varrho(\varrho^4 + 1)(p\,\mathfrak{Cos}\,t - q\,\mathfrak{Sin}\,t) + 6\varrho^2(\varrho^2 + p^2 - q^2)\,\mathfrak{Cos}\,2t + 9\varrho^4(p^2 - q^2) \\ &\quad + 12\varrho^3(p\,\mathfrak{Cos}\,t + q\,\mathfrak{Sin}\,t) + 8\varrho^3(p\,\mathfrak{Cos}^3 t - q\,\mathfrak{Sin}^3 t) + 9\varrho^2 + p^2 - q^2 \\ &\quad + \lambda[\varrho^4 - 2\varrho^2\,\mathfrak{Cos}\,2t + 1] = 0 \end{aligned} \right.$$

oder

$$f(\varrho, t) + \lambda\, h(\varrho, t) = 0\,.$$

Die Transformation $w = \dfrac{1}{z}$, d. h. die Inversion an der Hyperbel h^2 und die Spiegelung an ihrer reellen Hauptachse verwandelt nach dem letzten Satz der Nr. **6** die Transformation $w = \dfrac{f_3(z)}{H(z)}$ in $w = \dfrac{J(z)}{z\,H(z)}$. Dabei gehen die beiden Kurvenbüschel B_1^5, B_2^6 in

zwei zueinander pseudoeuklidisch orthogonale Büschel $B_1'^6$, $B_2'^6$ von Kurven sechster Ordnung über mit den Gleichungen:

$$(16)\quad B_1'^6 \begin{cases} [3\varrho^4 + 2\varrho^2(1 + 2\,\mathfrak{Cof}^2 t) + 8p\varrho^3\,\mathfrak{Cof}\,t - 1]\varrho\,\mathfrak{Sin}\,t - (q + \lambda p)\varrho^2(\varrho^4 + 2\varrho^2\mathfrak{Cof}\,2t - 3) \\ \qquad - \lambda[3\varrho^4 - 2\varrho^2(1 - 2\,\mathfrak{Sin}^2 t) - 8q\varrho^3\,\mathfrak{Sin}\,t - 1]\varrho\,\mathfrak{Cof}\,t = 0 \end{cases}$$

$$(17)\quad B_2'^6 \begin{cases} (p^2 - q^2)\varrho^6 + 6\varrho(\varrho^4 + 1)(p\,\mathfrak{Cof}\,t + q\,\mathfrak{Sin}\,t) + 6\varrho^2(p^2\varrho^2 - q^2\varrho^2 + 1)\,\mathfrak{Cof}\,2t + 9\varrho^4 \\ \quad + 12\varrho^3(p\,\mathfrak{Cof}\,t - q\,\mathfrak{Sin}\,t) + 8\varrho^3(p\,\mathfrak{Cof}^3 t + q\,\mathfrak{Sin}^3 t) + 9(p^2 - q^2)\varrho^2 + 1 \\ \qquad + \lambda\varrho^2[\varrho^4 - 2\varrho^2\,\mathfrak{Cof}\,2t + 1] = 0 \end{cases}$$

oder

$$j(\varrho, t) + \lambda\varrho^2 h(\varrho, t) = 0\,.$$

Die ∞^1 Kurven fünfter Ordnung des Büschels B_1^5 haben Spitzen in beiden Fundamentalpunkten L_1, L_2 und sie berühren alle einander in diesen Spitzen; sie haben vier gemeinsame Asymptoten mit den Gleichungen

$$y = x + 1,\ y = -x + 1,\ y = x - 1,\ y = -x - 1\,.$$

Außerdem besitzt jede Kurve des Büschels B_1^5 eine eigene Asymptote mit der Gleichung $y = -\lambda x - 3p\lambda - 3q$; diese ∞^1 fünften Asymptoten bilden also einen Strahlenbüschel erster Ordnung. Die beiden Fundamentalpunkte zählen als Knotenpunkte des Büschels B_1^5 je sechsfach. Zu ihnen treten als weitere Knotenpukte die neun Nullstellen von $f_3(z)$ — ihre Realitätsverhältnisse hängen von den Koeffizienten p und q ab — und die vier Nullstellen von $H(z)$.

Die ∞^1 Kurven sechster Ordnung des orthogonalen Büschels B_2^6 sind dreifach zirkular, sie haben zwei Tripel gemeinsamer (reeller oder konjugiert imaginärer) je paralleler Asymptoten mit den Gleichungen $y = \pm x + \mu_i$, $(i = 1, 2, 3)$. Außer den beiden Fundamentalpunkten, deren jeder neunfacher Knotenpunkt ist, hat der Büschel achtzehn weitere Knotenpunkte, deren Realitätsverhältnisse von den Koeffizienten p, q abhängen.

Die ∞^1 Kurven sechster Ordnung des Büschels $B_1'^6$ besitzen zwei Tripel gemeinsamer, je paralleler Asymptoten mit den Gleichungen $y = \pm x + \mu_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Die Knotenpunkte des Büschels $B_1'^6$ sind die beiden je neunfach zählenden Fundamentalpunkte, die neun Nullstellen von $J(z)$, deren Realitätsverhältnisse von p und q abhängen und die neun Nullstellen von $zH(z)$, nämlich fünf reelle und zwei Paare konjugiert imaginäre.

Die ∞^1 Kurven sechster Ordnung des orthogonalen Büschels B'^6_2 sind dreifach zirkular. Ihre gemeinsamen Asymptoten und Knotenpunkte bilden gleiche Konfigurationen wie beim Büschel B_2^6.

8. Die n Größen

$$z_\nu = x_\nu + \varepsilon y_\nu,\quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

sollen n reelle oder paarweise konjugiert imaginäre Punkte der dualkomplexen (pseudoeuklidischen) Ebene bezeichnen; für die x_ν und die y_ν sind also gewöhnliche komplexe Zahlen zugelassen. Eine ganze rationale Funktion n-ten Grades kann dann in der dualkomplexen Ebene als Produkt von n Linearfaktoren dargestellt werden:

$$f_n(z) = \prod_{\nu=1}^{n}(z - z_\nu) = u(x, y) + \varepsilon\, v(x, y)\,.$$

Durch n Nullstellen einer Funktion n-ten Grades sind ihre $n(n-1)$ übrigen Nullstellen bestimmt als die restlichen Schnittpunkte der beiden Kurven $u(x, y) = 0$ und $v(x, y) = 0$. Der Kurvenbüschel B_1^5 (Nr. 7) und sein pseudoeuklidischer Orthogonalbüschel B_2^6 sind

somit durch drei Punkte als Nullstellen von $f_3(z)$ bestimmt; mindestens einer der drei Punkte muß reell sein. Sie bedingen die übrigen sechs Nullstellen von $f_3(z)$ und damit auch diejenigen von $H(z)$. Die involutorische Transformation J, bestehend aus der Inversion an der Hyperbel h^2 und der Spiegelung an ihrer Hauptachse, hat die Nullstellen von $H(z)$ zu Fixpunkten.

Die Transformation

$$w = \frac{f_3(z)}{J(z)}$$

verwandelt die ∞^1 Geraden durch den Anfangspunkt der w-Ebene und die ∞^1 (mit L_1, L_2 inzidenten) gleichseitigen Hyperbeln mit diesem Mittelpunkte in zwei zueinander pseudoeuklidisch orthogonale Büschel B_3^6 und B_4^6 von Kurven sechster Ordnung. Die Gleichungen dieser Kurvenbüschel lauten:

$$(18)\quad B_3^6 \left\{ \begin{aligned} & q\varrho^6 + 3(p^2 - q^2 - 1)(\varrho^4 + 1)\varrho\,\mathfrak{Sin}\,t - (9q\varrho^2 - 6q\varrho^2\,\mathfrak{Cos}\,2t)(\varrho^2 - 1) \\ & \quad + (p^2 - q^2 - 1)\varrho^3\,\mathfrak{Sin}\,t(6 - 4\,\mathfrak{Sin}^2 t) - q \\ & + \lambda[p\varrho^6 + 3(p^2 - q^2 + 1)(\varrho^4 + 1)\varrho\,\mathfrak{Cos}\,t + (9p\varrho^2 + 6p\varrho^2\,\mathfrak{Cos}\,2t)(\varrho^2 + 1) \\ & \quad + (p^2 - q^2 + 1)\varrho^3\,\mathfrak{Cos}\,t(6 + 4\,\mathfrak{Cos}^2 t) + p] = 0 \end{aligned} \right.$$

$$(19)\quad B_4^6 \qquad f(\varrho, t) + \lambda j(\varrho, t) = 0\,,$$

$f(\varrho,t)$ siehe Gleichung (15), $j(\varrho,t)$ siehe Gleichung (17).

Die ∞^1 Kurven sechster Ordnung des Büschels B_3^6 und des Büschels B_4^6 sind dreifach zirkular. Jede Kurve besitzt zwei Tripel von je drei einander parallelen Asymptoten mit den Gleichungen $y = \pm x + \mu_i$ $(i = 1, 2, 3)$. In jedem Tripel ist mindestens eine Asymptote reell.

Jeder der beiden Fundamentalpunkte L_1, L_2 ist neunfacher Knotenpunkt des Büschels B_3^6. Die übrigen Knotenpunkte dieses Büschels sind die neun Nullstellen von $f_3(z)$ und die neun Nullstellen von $J(z)$; ihre Realitätsverhältnisse hängen von den Koeffizienten p, q ab. Der Büschel B_4^6 hat außer den beiden je neunfach zählenden Fundamentalpunkten keine reellen Knotenpunkte.

Die Inversion an der gleichseitigen Hyperbel h^2 nebst der Spiegelung an ihrer Hauptachse führt jeden der beiden Büschel B_3^6, B_4^6 in sich über, wobei die Kurven jedes Büschels untereinander vertauscht werden. Dagegen werden die beiden Kurven B_1^5, B_2^6 bzw. mit den beiden Kurvenbüscheln $B_1'^6$, $B_2'^6$ vertauscht.

9. Die biquadratische Funktion $w = f_4(z)$ der dualkomplexen Ebene hat die Hessesche Kovariante $H(z)$ vom vierten und die Jacobische Kovariante $J(z)$ vom sechsten Grade. Es ergeben sich drei Nullstellenpaare $\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2$, $\mathfrak{z}_3\mathfrak{z}_4$, $\mathfrak{z}_5\mathfrak{z}_6$ von $J(z)$, die zu drei verschiedenen quadratischen Faktoren von $J(z)$ gehören. Stets ist eines von diesen Punktepaaren imaginär, die beiden anderen reell. Die drei Verbindungsstrecken der drei Punktepaare bestimmen drei mit L_1, L_2 inzidente gleichseitige Hyperbeln als deren Achsensehnen. Die drei Inversionen an den drei Hyperbeln nebst den Spiegelungen an den zugehörigen Hyperbelachsen stellen drei involutorische Transformationen J_1, J_2, J_3 der dualkomplexen Ebene dar. Sie bilden mit der Identität eine Vierergruppe. Jede der drei Transformationen J_1, J_2, J_3 führt $f_4(z)$ und $H(z)$ je durch Vertauschung ihrer Nullstellen in sich über und sie verwandelt $J(z)$ in sich, indem sie zwei seiner Nullstellen fest läßt und die anderen vertauscht. Wegen $f_4(z) = \prod_{\nu=1}^{4} (z - z_\nu)$ ist die Gesamtkonfiguration durch vier Punkte der dualkomplexen Ebene bestimmt. Als biquadratische dualkomplexe Normalform bezeichnen

wir

$$f_4(z) = z^4 + 6(\alpha + \varepsilon\beta)z^2 + 1$$

und erhalten

$$H(z) = z^4 + \frac{1 - (\alpha + \varepsilon\beta)^2}{\alpha + \varepsilon\beta} z^2 + 1,\ J(z) = z^5 - z,$$

$$J_1\colon z' = \frac{1}{z},\ \text{Fixpunkte in } +1,\ -1;$$

$$J_2\colon z' = -\frac{1}{z},\ \text{Fixpunkte in } +i\varepsilon,\ -i\varepsilon;$$

$$J_3\colon z' = -z,\ \text{Fixpunkte in } 0, \infty.$$

Die vier gegebenen Nullstellen z_ν von $f_4(z)$ bedingen aber nicht nur die beschriebene Konfiguration, sondern auch die drei gebrochenen rationalen Transformationen der dualkomplexen Ebene, die sich durch Kombination von je zweien der drei Formen $f_4(z)$, $H(z)$, $J(z)$ bilden lassen:

$$w = \frac{f_4(z)}{H(z)},\quad w = \frac{J(z)}{f_4(z)},\quad w = \frac{J(z)}{H(z)}.$$

a) Die Transformation $w = \dfrac{f_4(z)}{H(z)}$ verwandelt den Geradenbüschel durch den Anfangspunkt $w = 0$ und den Büschel der (mit L_1, L_2 inzidenten) gleichseitigen Hyperbeln mit diesem Mittelpunkte in zwei zueinander (pseudoeuklidisch) orthogonale Büschel B_1^8, B_2^8 von Kurven achter Ordnung mit den Gleichungen:

$$(20)\quad B_1^8 \begin{cases} \beta(9\alpha^2 - 9\beta^2 + 1)(\varrho^4 + 1)\varrho^2 \mathfrak{Cof}\, 2t - \alpha(9\alpha^2 - 9\beta^2 - 1)(\varrho^4 - 1)\varrho^2 \mathfrak{Sin}\, 2t + 12\alpha\beta\varrho^4 \\ \quad + \lambda[\alpha(1 + 3\alpha^2 - 3\beta^2)(\varrho^4 + 1)\varrho^2 \mathfrak{Cof}\, 2t - \beta(3\alpha^2 - 3\beta^2 - 1)(\varrho^4 - 1)\varrho^2 \mathfrak{Sin}\, 2t \\ \quad + 6(\alpha^2 + \beta^2 - 3(\alpha^2 - \beta^2)^2)\varrho^4 + (\alpha^2 - \beta^2)(\{\varrho^4 + 1\}^2 + 4\varrho^4 \mathfrak{Sin}^2 2t)] = 0 \end{cases}$$

$$(21)\quad B_2^8 \begin{cases} \varrho^8 + 12\alpha(\varrho^4 + 1)\varrho^2 \mathfrak{Cof}\, 2t - 12\beta(\varrho^4 - 1)\varrho^2 \mathfrak{Sin}\, 2t \\ \quad + 2(1 + 18\alpha^2 - 18\beta^2)\varrho^4 + 4\varrho^4 \mathfrak{Sin}^2 2t + 1 \\ + \lambda\Big[\varrho^8 + \dfrac{2}{(\alpha^2 - \beta^2)^3}(18 - 107\alpha^2 - 109\beta^2 + 162(\alpha^2 - \beta^2)^2)\varrho^4 \\ + \dfrac{12\alpha}{\alpha^2 - \beta^2}(1 - 3\alpha^2 + 3\beta^2)(\varrho^4 + 1)\,\varrho^2 \mathfrak{Cof}\, 2t \\ + \dfrac{12\beta}{\alpha^2 - \beta^2}(1 + 3\alpha^2 - 3\beta^2)\,(\varrho^4 - 1)\varrho^2 \mathfrak{Sin}\, 2t + 4\varrho^4 \mathfrak{Sin}^2 2t + 1\Big] = 0 \end{cases}$$

oder

$$F(\varrho, t) + \lambda H(\varrho, t) = 0.$$

Die ∞^1 Kurven achter Ordnung des Büschels B_1^8 und ebenso die ∞^1 Kurven achter Ordnung des pseudoeuklidischen Orthogonalbüschels B_2^8 sind vierfach zirkular. Jede Kurve beider Büschel besitzt zwei Quadrupel untereinander je paralleler Asymptoten mit den Gleichungen $y = \pm x + \mu_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, deren Realität von den Koeffizienten von $f_4(z)$ und vom Büschelparameter λ abhängt. Durch jede der drei Inversionen und Spiegelungen J_1, J_2, J_3 geht jede Kurve achter Ordnung beider Büschel in sich über.

b) Die Transformation $w = \dfrac{J(z)}{f_4(z)}$ bildet den Geradenbüschel $w = 0$ und den Büschel gleichseitiger Hyperbeln durch L_1, L_2 mit diesem Mittelpunkte auf einen Büschel von

fünffach zirkularen Kurven zehnter Ordnung B_0^{10} und auf einen Büschel von sechsfach zirkularen Kurven zwölfter Ordnung $B_0'^{12}$ ab. Durch die drei Inversionen nebst Spiegelungen J_i gehen die beiden zueinander pseudoeuklidisch orthogonalen Kurvenbüschel B_0^{10}, $B_0'^{12}$ in die drei Paare von Büscheln pseudoeuklidisch orthogonaler, sechsfach zirkularer Kurven zwölfter Ordnung über:

$$B_1^{12},\ B_1'^{12};\ B_2^{12},\ B_2'^{12};\ B_3^{12},\ B_3'^{12}.$$

Die Substitution J_i führe den Punkt ∞ in z_i über und es bezeichne Δ_i die zugehörige Substitutionsdeterminante. Dann werden durch die drei Transformationen

$$w = \frac{\Delta_i\, J(z)}{z_i^2\, f_4(z)},\quad i = 1, 2, 3,$$

die drei Büschelpaare B_i^{12}, $B_i'^{12}$ von Kurven zwölfter Ordnung unmittelbar als die Bilder des Geradenbüschels $w = 0$ und des Büschels gleichseitiger Hyperbeln durch L_1, L_2 mit diesem Mittelpunkte erhalten.

c) Tritt an die Stelle von $w = \dfrac{J(z)}{f_4(z)}$ die Transformation

$$w = \frac{J(z)}{f_4(z)(z-a)(z-b)},$$

so entstehen aus den Geraden und gleichseitigen Hyperbeln durch und um den Anfangspunkt unmittelbar zwei Büschel

$$B_0^{12},\ B_0'^{12}$$

zueinander pseudoeuklidisch orthogonaler sechsfach zirkularer Kurven zwölfter Ordnung. Sie besitzen 36-fache Knotenpunkte in den Fundamentalpunkten L_1, L_2 und einfache Knotenpunkte in den 36 Nullstellen von $J(z)$ und den 36 Nullstellen von $f_4(z)(z-a)(z-b)$. Sie werden durch die drei Inversionen und Spiegelungen J_i wie oben unter b) in die drei weiteren Paare von Büscheln

$$B_1^{12},\ B_1'^{12};\ B_2^{12},\ B_2'^{12};\ B_3^{12},\ B_3'^{12}$$

zueinander pseudoeuklidisch orthogonaler sechsfach zirkularer Kurven zwölfter Ordnung verwandelt. Während die Nullstellen von $f_4(z)$ und $J(z)$ ihre Rolle als Knotenpunkte auch für diese Kurvenbüschel beibehalten, gehen die Punkte a und b durch J_i in die neuen Knotenpunkte a_i, b_i dieser Büschel über.

Die biquadratische Funktion habe — wie vorhin — die Form

$$f_4(z) = z^4 + 6(\alpha + \varepsilon\beta)z^2 + 1 \quad \text{mit} \quad J(z) = z^5 - z.$$

Dabei sei jetzt $a = b$ und falle mit einer Nullstelle ($z = \infty$) von $J(z)$ zusammen. Unter diesen Umständen reduziert sich der Büschel B_0^{12} auf einen Büschel von Kurven neunter Ordnung B_0^9 und $B_0'^{12}$ auf einen Büschel von Kurven zehnter Ordnung $B_0'^{10}$. Ihre Gleichungen lauten:

$$(22)\quad B_0^9 \begin{cases} \varrho^9(\mathfrak{Sin}\,t + \lambda\,\mathfrak{Cos}\,t) + 6\alpha\varrho^7(\mathfrak{Sin}^3 t + \lambda\,\mathfrak{Cos}^3 t + 3\,\mathfrak{Sin}\,t\,\mathfrak{Cos}^2 t + 3\lambda\,\mathfrak{Sin}^2 t\,\mathfrak{Cos}\,t) \\ -6\beta\varrho^7(\mathfrak{Cos}^3 t + \lambda\,\mathfrak{Sin}^3 t + 3\,\mathfrak{Sin}^2 t\,\mathfrak{Cos}\,t + 3\lambda\,\mathfrak{Sin}\,t\,\mathfrak{Cos}^2 t) + 2\varrho^5\,\mathfrak{Sin}\,4t(\mathfrak{Cos}\,t + \lambda\,\mathfrak{Sin}\,t) \\ +6\varrho^3[\alpha(\mathfrak{Sin}\,t - \lambda\,\mathfrak{Cos}\,t) + \beta(\mathfrak{Cos}\,t - \lambda\,\mathfrak{Sin}\,t)] - \varrho(\mathfrak{Sin}\,t + \lambda\,\mathfrak{Cos}\,t) = 0 \end{cases}$$

$$(23)\quad B_0'^{10} \qquad \varrho^2 J(\varrho, t) + \lambda F(\varrho, t) = 0$$

mit

$$J(\varrho, t) = \varrho^8 - \varrho^4(2\,\mathfrak{Cos}^4 t + 2\,\mathfrak{Sin}^4 t + 3\,\mathfrak{Sin}^2 2t) + 1,\ F(\varrho, t) \text{ siehe Gleichung (21).}$$

Jeder dieser beiden Kurvenbüschel geht durch J_3 in sich über. Sowohl J_1 als J_2 verwandeln B_0^9 und $B_0'^{10}$ in zwei Büschel zueinander pseudoeuklidisch orthogonaler Kurven neunter bzw. zehnter Ordnung B_1^9 bzw. $B_1'^{10}$. Ihre Gleichungen sind:

$$(24)\quad B_1^9 \begin{cases} \varrho^9(\lambda\,\mathfrak{Cos}\,t - \mathfrak{Sin}\,t) - 6\varrho^7[\alpha(\mathfrak{Sin}\,t + \lambda\,\mathfrak{Cos}\,t) - \beta(\mathfrak{Cos}\,t + \lambda\,\mathfrak{Sin}\,t)] \\ - 2\varrho^5\,\mathfrak{Sin}\,4t(\mathfrak{Cos}\,t - \lambda\,\mathfrak{Sin}\,t) - 6\alpha\varrho^3(\mathfrak{Sin}^3 t + \lambda\,\mathfrak{Cos}^3 t + 3\,\mathfrak{Sin}\,t\,\mathfrak{Cos}^2 t + 3\lambda\,\mathfrak{Sin}^2 t\,\mathfrak{Cos}\,t) \\ - 6\beta\varrho^3(\mathfrak{Cos}^3 t - \lambda\,\mathfrak{Sin}^3 t + 3\,\mathfrak{Cos}\,t\,\mathfrak{Sin}^2 t - 3\lambda\,\mathfrak{Sin}\,t\,\mathfrak{Cos}^2 t) + \varrho\,(\mathfrak{Sin}\,t - \lambda\,\mathfrak{Cos}\,t) = 0 \end{cases}$$

$$(25)\quad B_1'^{10} \qquad \varrho^2 F(\varrho, t) + \lambda J(\varrho, t) = 0\,.$$

Die ∞^1 Kurven neunter Ordnung des Kurvenbüschels B_0^9 haben zwei Quadrupel je untereinander paralleler gemeinsamer Asymptoten mit den Gleichungen $y = \pm x + \mu_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Die Realitätsverhältnisse der Asymptoten hängen von den Koeffizienten von $f_4(z)$ ab. Daneben besitzt jede Kurve des Büschels eine weitere eigene Asymptote mit der Gleichung $y = -\lambda x$, wo λ der Parameterwert der Kurve ist.

Die ∞^1 Kurven zehnter Ordnung des Kurvenbüschels $B_0'^{10}$ haben sechs gemeinsame reelle Asymptoten, die sich auf zwei Tripel je paralleler Geraden mit den Gleichungen $y = \pm x + \mu_i$ verteilen, und vier paarweise parallele konjugiert imaginäre Asymptoten.

Die ∞^1 Kurven neunter Ordnung des Büschels B_1^9 haben zwei Quadrupel je untereinander paralleler paarweise konjugiert imaginärer Asymptoten gemein. Daneben besitzt jede Kurve des Büschels B_1^9 eine eigene Asymptote $y = \lambda x$.

Die ∞^1 Kurven des Büschels $B_i'^{10}$ besitzen zwei Quintupel je untereinander paralleler gemeinsamer Asymptoten, deren Realitätsverhältnisse von den Koeffizienten von $f_4(z)$ abhängen.

Aus Nr. **9** ist leicht zu folgern, daß die Verwendung der Transformation $w = \dfrac{J(z)}{H(z)}$ an der Stelle von $w = \dfrac{J(z)}{f_4(z)}$ nur die gleichen Ergebnisse liefert.

10. Die im Abschnitt I behandelten dreifach zirkularen Kurven sechster Ordnung (Nr. **2, 3, 7, 8**) der komplexen wie der dualkomplexen Ebene sind vom Geschlechte vier; außer den Fundamentalpunkten haben sie i. a. keine Doppelpunkte oder mehrfachen Punkte. Nun enthält ein Büschel von Kurven n-ter Ordnung $3(n-1)^2$ Kurven mit Doppelpunkten[6]). Durch jeden s-fachen Basispunkt, in dem die Kurven einander nicht berühren, wird diese Zahl um $(s-1)(3s+1)$ verringert[7]). Hieraus folgt:

Die behandelten dreifach zirkularen Kurven sechster Ordnung sind i. a. vom Geschlecht vier. In jedem Büschel B^6 solcher Kurven liegen jedoch eine Anzahl Kurven C_{λ_i} niederen Geschlechts. Die sie kennzeichnenden Werte λ_i des Büschelparameters λ genügen einer algebraischen Gleichung vom 35. Grade $R(\lambda) = 0$. Die Kurven mit diesen Parameterwerten λ_i sind i. a. vom Geschlecht drei mit je einem Doppelpunkt außerhalb der Fundamentalpunkte; jedoch können auch Kurven mit 2, 3 oder 4 solchen Doppelpunkten auftreten[8]) bis herunter zum Geschlecht Null.

---

[6]) Steiner, Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Kurven, Journal f. d. reine u. angew. Math. **47** (1848), S. 1—6, Ges. Werke Bd. II, S. 495.

[7]) Cremona, Annal. di mat. (1) **6**, (1864), S. 153.

[8]) Die Bedingungen für das Auftreten von Kurven mit mehreren Doppelpunkten in einem Büschel von Kurven n-ter Ordnung wurden von Cayley aufgestellt, Cambr. Transactions **11** (1863), S. 21.

Enthält die Büschelgleichung nur gerade Potenzen von x und y, so haben die Kurven mit den ausgezeichneten Parameterwerten λ_i je vier Doppelpunkte außerhalb der Knotenpunkte des Büschels, sind also rational. Die Wurzeln der Gleichung $R(\lambda) = 0$ können teilweise zusammenfallen oder der Grad kann infolge Ausfalls einzelner Koeffizienten sinken.

II. Konjugierte Büschel von Regelflächen sechsten, achten, zehnten und zwölften Grades in der linearen Kongruenz.

11. Die *elliptische* lineare Kongruenz sei durch die Gleichungen dargestellt:

$$p_2 - p_5 = 0, \; p_3 - p_6 = 0 .$$

Die Plückersche Fundamentalbeziehung der Plückerschen Linienkoordinaten

$$p_i \, (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

nimmt dann die Form

$$p_5^2 + p_6^2 + p_1 p_4 = 0$$

an und verwandelt sich durch $p_1 = x_3 + x_4$, $p_4 = x_3 - x_4$, $p_5 = x_2$, $p_6 = x_1$ und $\frac{x_1}{x_4} = \xi$, $\frac{x_2}{x_4} = \eta$, $\frac{x_3}{x_4} = \zeta$ in die Kugel

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 .$$

Bei nachfolgender stereographischer Projektion der letzteren aus dem Projektionszentrum $\xi = \eta = 0$, $\zeta = 1$ werden insgesamt die ∞^2 Strahlen der elliptischen linearen Kongruenz auf die ∞^2 Punkte der euklidischen (komplexen) Ebene umkehrbar eindeutig abgebildet, nämlich

$$-\frac{p_6}{p_4} = \frac{x_1}{x_3} = x, \quad -\frac{p_5}{p_4} = \frac{x_2}{x_3} = y .$$

Soll umgekehrt der einem Punkte $P(x, y)$ zugeordnete Kongruenzstrahl bestimmt werden, so sind die beiden Kongruenzgleichungen und die Plückerschen Fundamentalbeziehungen heranzuziehen. Dem unendlichfernen Kongruenzstrahle $p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6 = 1:0:0:0:0:0$ entspricht die uneigentliche Gerade $x_3 = 0$ der Bildebene. Ihre imaginären Kreispunkte $J_1(1:i:0)$, $J_2(1:-i:0)$ sind die singulären Punkte der Abbildung; ihnen entsprechen je die ∞^1 Strahlen zweier konjugiert imaginärer Kongruenzstrahlenbüschel erster Ordnung. Im übrigen werden die einscharig in der Kongruenz enthaltenen Regelflächen zweiten Grades auf die Kreise der Ebene abgebildet, die Strahlenparaboloide auf die Geraden.

Die hyperbolische lineare Kongruenz sei durch die Gleichungen gegeben:

$$p_2 - p_5 = 0, \; p_3 + p_6 = 0 .$$

Die Plückersche Fundamentalbeziehung ergibt hier:

$$p_5^2 - p_6^2 - p_1 p_4 = 0 .$$

Die hyperbolische Kongruenz verwandelt sich daher in das Strahlenhyperboloid

$$\xi^2 - \eta^2 + \zeta^2 = 1 .$$

Bei anschließender stereographischer Projektion wird die hyperbolische Kongruenz auf die pseudoeuklidische (dualkomplexe) Ebene mit den Fundamentalpunkten $L_1(1:1:0)$, $L_2(1:-1:0)$ abgebildet, so daß — wie bekannt — die gleichseitigen Hyperbeln durch L_1, L_2 an die Stelle der Kreise treten.

12. Eine nicht durch den unendlichfernen Kongruenzstrahl gehende Regelschar n-ter Ordnung der Kongruenz entspricht umkehrbar eindeutig einer ebenen Kurve n-ter Ordnung. Sie geht α-mal durch den Fundamentalpunkt J_1, β-mal durch den Fundamentalpunkt J_2, wobei $\alpha + \beta = n$ ist, und enthält keine weiteren Punkte der uneigentlichen Geraden. Geht eine Regelschar der Kongruenz k-mal durch den unendlichfernen Kongruenzstrahl, so zerfällt ihr Bild in eine Kurve $(n-k)$-ter Ordnung und die k-fache uneigentliche Gerade. Die Kurve geht α-mal durch J_1, β-mal durch J_2 mit $\alpha + \beta = n - k$ und schneidet die uneigentliche Gerade in k weiteren (reellen oder konjugiert imaginären) Punkten. Mittels einer automorphen Kollineation der Kongruenz läßt sich der unendlichferne Kongruenzstrahl durch jeden anderen Strahl a ersetzen. Jede Regelschar n-ter Ordnung, für die $\alpha = \beta = \frac{n}{2}$ ist, läßt sich als vollständiger Schnitt der linearen Kongruenz mit einem Strahlenkomplex vom Grade $\frac{n}{2}$ darstellen.

Es gibt zwei verschiedene Arten von Involutionen auf der linearen Kongruenz; konjugierte Strahlen solcher Involutionen sind reziproke Polaren im polaren Raume einer Fläche zweiten Grades. Ist die Fläche zweiten Grades einscharig in der linearen Kongruenz enthalten, so heißt die Involution eine *primäre*. Liegt die Fläche zweiten Grades dagegen beidscharig involutorisch im geschart involutorischen Raume der Kongruenz, so ist die Involution eine sekundäre[9]). In der (euklidischen oder pseudoeuklidischen) Bildebene der (elliptischen oder hyperbolischen) Kongruenz entsprechen den primären und sekundären Involutionen der Kongruenz die beiden Arten involutorischer Cremonatransformationen[10]). Konjugierte Strahlen einer primären Involution sind abgebildet auf inverse Punkte bzgl. eines (euklidischen oder pseudoeuklidischen) Kreises. Füreinander polarinvariante Regelflächen zweiten Grades der Kongruenz entsprechen zueinander orthogonalen Kreisen der Bildebene. Die ∞^1 Kongruenzrichtungen durch einen gegebenen Kongruenzstrahl s sind paarweise konjugiert und bilden in dieser Anordnung eine Involution konjugierter Richtungen. Zwei konjugierte Kongruenzrichtungen entsprechen zwei zueinander senkrechten Richtungen in der Bildebene. Führen zwei Regelscharen $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ der linearen Kongruenz in zwei konjugierten Richtungen durch s, so ist jede die Regelschar $\mathfrak{R}_1$ längs s berührende Regelschar zweiter Ordnung für jede die Regelschar $\mathfrak{R}_2$ längs s berührende Regelschar zweiter Ordnung polarinvariant[11]).

Zwei primäre Involutionen, bedingt durch zwei für einander polarinvariante Regelscharen zweiter Ordnung, haben eine sekundäre Involution zur Resultierenden[10]). In der Bildebene resultiert aus den beiden entsprechenden Inversionen an zwei zueinander orthogonalen Kreisen eine involutorische Cremonatransformation zweiter Art. Die Inversion an einem Kreise h^2 und die Spiegelung an einem Durchmesser stellen also eine solche sekundäre Involution dar, als die Resultierende aus einer primären Involution bedingt durch ein Strahlenhyperboloid H^2 und einer zweiten primären Involution bedingt durch ein für H^2 polarinvariantes Strahlenparaboloid.

A. Die elliptische lineare Kongruenz.

13. Die Fig. 1 gibt unter dem Gesichtspunkt der Abbildung der Kongruenz zu folgenden Überlegungen Anlaß:

---

[9]) S. Jolles, Die Involutionen auf einer linearen Strahlenkongruenz, Math. Ztschr. **27** (1928), S. 427.

[10]) G. Haenzel, Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz. I., Abschn. I, insbes. A u. B, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **173** (1935), S. 91.

[11]) G. Haenzel, Die Geometrie der lin. Strahlenkongruenz. II., Abschn. IV, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **175** (1936), S. 169.

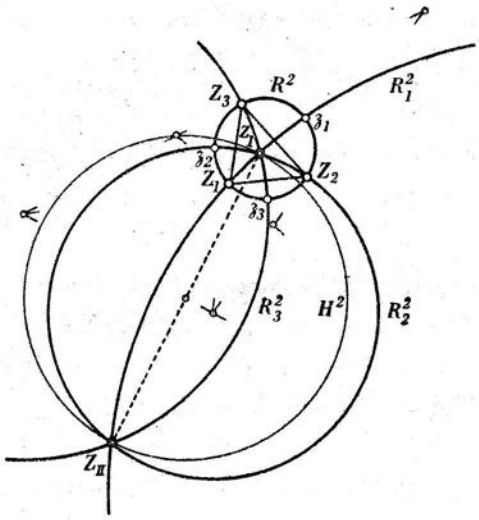

Fig. 1.

Zwei windschiefe Kongruenzstrahlen $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}$ bestimmen einen Büschel R' von Regelscharen zweiter Ordnung der Kongruenz. (Bild: Der Kreisbüschel durch $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}$.) Die Basiskurve des Büschels besteht aus $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}$ und den Leitgeraden der Kongruenz. Für die ∞^1 Flächen des Büschels R' sind die ∞^1 Regelscharen zweiter Ordnung des konjugierten Büschels R'' der Kongruenz polarinvariant. (Bild: Der orthogonale Kreisbüschel.) Eine herausgegriffene Regelschar $\mathfrak{R}^2$ (Bild: Der Kreis R^2) des Büschels R'' wird von irgend drei Regelscharen $\mathfrak{R}_1^2, \mathfrak{R}_2^2, \mathfrak{R}_3^2$ des konjugierten Büschels R' in den Strahlenpaaren $z_1, \mathfrak{z}_1$; $z_2, \mathfrak{z}_2$; $z_3, \mathfrak{z}_3$ geschnitten. Offensichtlich entsprechen die Kongruenzstrahlen z_1, z_2, z_3 den Nullstellen einer kubischen Funktion $f_3(z)$, die Kongruenzstrahlen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$ den Nullstellen ihrer Jacobischen Kovariante $H(z)$ (Nr. **1**). Die Regelscharen $\mathfrak{R}_1^2, \mathfrak{R}_2^2, \mathfrak{R}_3^2$ haben die drei apollonischen Kreise des Dreiecks $z_1 z_2 z_3$ zu Bildern, die Regelschar $\mathfrak{R}^2$ den Umkreis dieses Dreiecks. Die Inversion am Kreise R^2 und die Spiegelung an seinem Durchmesser $P = z_{\mathrm{I}} z_{\mathrm{II}}$ stellen eine sekundäre Involution J dar als Resultierende einer primären Involution bedingt durch ein Strahlenhyperboloid H^2 und einer zweiten primären Involution bedingt durch das für H^2 polarinvariante Strahlenparaboloid P^2 durch $z_{\mathrm{I}} z_{\mathrm{II}}$. Die analytische Darstellung der sekundären Involution J lautet in Linienkoordinaten[12]):

$$\varrho p_1' = -p_4, \quad \varrho p_4' = -p_1, \quad \varrho p_5' = -p_5, \quad \varrho p_6' = p_6 .$$

Die sekundäre Involution J hat die beiden reellen Geraden

$$z_{\mathrm{I}}(1:0:1:-1:0:1), \quad z_{\mathrm{II}}(1:0:-1:-1:0:-1)$$

mit den Bildpunkten $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}$ und die beiden konjugiert imaginären

$$j_1(1:i:0:1:i:0), \quad j_2(1:-i:0:1:-i:0)$$

zu Doppelstrahlen.

Nach Nr. **12** sind die beiden Paare zueinander orthogonaler Kurvenbüschel (Nr. **2** a, b) B_1^5, B_2^6 und $B_1'^6, B_2'^6$ (Gleichungen (1)—(4)) die Bilder zweier Paare von Büscheln konjugierter Regelscharen sechster Ordnung. Die z-Achse des kartesischen Koordinaten-

---

[12]) G. Haenzel, Eine analytische Theorie der Involutionen auf der lin. Strahlenkongruenz, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **166** (1932), S. 161. Die Abhandlung enthält die analytische Klassifikation aller Involutionen auf der linearen Kongruenz sowie ihre Normaldarstellungen.

systems falle mit dem Hauptstrahl, die xy-Ebene mit der Fluchtebene der Kongruenz zusammen. Die vier Büschel von Flächen sechsten Grades haben dann die Gleichungen:

$$(26)\quad B_1^6\begin{cases}[xz-y][3(1+z^2)^2+2(xz-y)^2+6(x+yz)^2-(x^2+y^2)^2-8p(x+yz)(1+z^2)]\\ +\lambda(x+yz)[3(1+z^2)^2-6(xz-y)^2-2(x+yz)^2-(x^2+y^2)^2+8q(xz-y)(1+z^2)]\\ +(\lambda p+q)(1+z^2)[3(x^2+y^2)^2-(1+z^2)^2+2(xz-y)^2-2(x-yz)^2]=0\end{cases}$$

$$(27)\quad B_2^6\begin{cases}(x^2+y^2)^3+(p^2+q^2)(1+z^2)^3-8p(x+yz)^3+8q(xz-y)^3\\ +9(x^2+y^2)(1+z^2)[(p^2+q^2)(x^2+y^2)+(1+z^2)]\\ -6[p(x+yz)+q(xz-y)][(x^2+y^2)^2+(1+z^2)^2]\\ +6[(x^2-y^2)(1-z^2)+4xyz][(p^2+q^2)(1+z^2)+(x^2+y^2)]\\ -12(x^2+y^2)(1+z^2)[p(x+yz)-q(xz-y)]\\ +\lambda\{(x^2+y^2)^2+2(xz-y)^2-2(x+yz)^2+(1+z^2)^2\}(1+z^2)=0\end{cases}$$

oder

$$f(x,y,z)+\lambda(1+z)^2h(x,y,z)=0\,,$$

$$(28)\quad B_1'^6\begin{cases}(xz-y)[3(x^2+y^2)^2-(1+z^2)^2+2(xz-y)^2+6(x+yz)^2-8p(x^2+y^2)(x+yz)]\\ -\lambda(x+yz)[3(x^2+y^2)^2-(1+z^2)^2-6(xz-y)^2-2(x+yz)^2-8q(x^2+y^2)(xz-y)]\\ +(q-\lambda p)(x^2+y^2)[(x^2+y^2)^2-3(1+z^2)^2-2(xz-y)^2+2(x+yz)^2]=0\end{cases}$$

$$(29)\quad B_2'^6\begin{cases}(p^2+q^2)(x^2+y^2)^3-8p(x+yz)^3-8q(xz-y)^3+(1+z^2)^3\\ +9(x^2+y^2)(1+z^2)[(p^2+q^2)(1+z^2)+(x^2+y^2)]\\ -6[p(x+yz)-q(xz-y)][(x^2+y^2)^2+(1+z^2)^2]\\ +6[(x^2-y^2)(1-z^2)+4xyz][(1+z^2)+(p^2+q^2)(x^2+y^2)]\\ -12(x^2+y^2)(1+z^2)[p(x+yz)+q(xz-y)]\\ +\lambda\{(x^2+y^2)^2+2(xz-y)^2+(1+z^2)^2\}(x^2+y^2)=0\end{cases}$$

oder

$$j(x,y,z)+\lambda(x^2+y^2)\,h(x,y,z)=0\,.$$

Die Koeffizienten p und q hängen rational von den Koordinaten der Kongruenzstrahlen z_1, z_2, z_3 ab.

14. Die Ausführungen der Nr. **1—3, 11—13** führen jetzt ohne Schwierigkeit auf folgende Theoreme der elliptischen linearen Kongruenz:

Drei windschiefe Kongruenzstrahlen z_1, z_2, z_3 bestimmen — zusammen mit dem unendlichfernen Strahl der Kongruenz — einen Büschel B_1^6 von ∞^1 Regelflächen sechsten Grades (Gleichung (26)). Die Flächen haben die Leitgeraden der Kongruenz zu (konjugiert imaginären) dreifachen Leitgeraden. Auf jeder Leitgeraden hat jede Fläche zwölf imaginäre Kuspidalpunkte. Die Regelscharen der Flächen gehen durch die Kongruenzstrahlen z_1, z_2, z_3, durch die reellen Deckstrahlen $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}$ der sekundären Involution J und durch den unendlichfernen Kongruenzstrahl. Diese Strahlen sind die sechs reellen Knotenstrahlen des Büschels. Achtzehn Knotenstrahlen entfallen auf die beiden Leitgeraden. Die übrigen zwölf Knotenstrahlen sind sechs Paare konjugiert imaginärer Kongruenzstrahlen zweiter Art, darunter die konjugiert imaginären Deckstrahlen j_1, j_2 der sekundären Involution J. Jede Fläche des Büschels B_1^6 hat ein (in der Kongruenz einscharig enthaltenes) Strahlenparaboloid zur Asymptotenfläche. Diese ∞^1 Asymptotenflächen bilden einen Büschel von Strahlenparaboloiden; sein Basisvierseit besteht aus den Leitgeraden, dem unendlichfernen Kongruenzstrahle und einem weiteren Kongruenzstrahle k, der im Falle $p=q=0$ mit dem Hauptstrahle der Kongruenz zusammenfällt.

Jede der ∞^1 Regelflächen des Büschels B_1^6 wird von den ∞^1 Regelflächen sechsten Grades eines zweiten Büschels B_2^6 längs ihrer Regelstrahlen in konjugierten Richtungen geschnitten. Jede Fläche des Büschels B_2^6 hat gleichfalls die beiden Leitgeraden der Kongruenz zu dreifachen Leitgeraden und besitzt auf jeder von ihnen zwölf imaginäre Kuspidalpunkte. Im übrigen hat der Büschel B_2^6 neun Paare konjugiert imaginärer Kongruenzstrahlen zweiter Art zu Knotenstrahlen.

Durch $\frac{n}{2}(n+3)-1$ Punkte P_i der Ebene gehen ∞^1 algebraische Kurven n-ter Ordnung; sie schneiden einander in $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ weiteren Punkten Q_i und bilden einen Büschel mit n^2 Knotenpunkten $P_i + Q_i$. Die Punkte P_i heißen die *bestimmenden* Punkte, die Q_i die *notwendigen*[13]). Für die lineare Kongruenz ist in diesem Zusammenhange zu folgern:

$3 \cdot \frac{n}{2} - 1$ *Kongruenzstrahlen bestimmen bei geradem n einen Büschel von ∞^1 Regelflächen n-ten Grades der Kongruenz. Die Flächen haben beide Leitgeraden der Kongruenz zu $\frac{n}{2}$-fachen Leitgeraden mit je $\frac{n}{2}(n-2)$ Kuspidalpunkten. Sie haben außerdem $\frac{n}{2}(n-3)+1$ reelle oder konjugiert imaginäre Kongruenzstrahlen gemein, so daß der Büschel außer den beiden Leitgeraden, deren jede einen Knotenstrahl vom Gewicht $\frac{n^2}{4}$ darstellt, $\frac{n^2}{2}$ Kongruenzstrahlen als Knotenstrahlen besitzt. Durch jeden anderen reellen Kongruenzstrahl geht eine Regelschar des Büschels.*

Ein Büschel von Regelflächen sechsten Grades mit zwei dreifachen Leitgeraden ist also durch acht Regelstrahlen bestimmt. In dem obigen Satze reichen die drei Regelstrahlen z_1, z_2, z_3 zusammen mit dem unendlichfernen Kongruenzstrahl aus, weil die vier Deckstrahlen der sekundären Involution J, nämlich $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}, j_1, j_2$ als die übrigen bestimmenden Knotenstrahlen des Büschels B_1 festliegen.

Die Fig. 2 zeigt den Schnitt der Fluchtebene $z = 0$ mit dem Büschel B_1^6 von Regel-

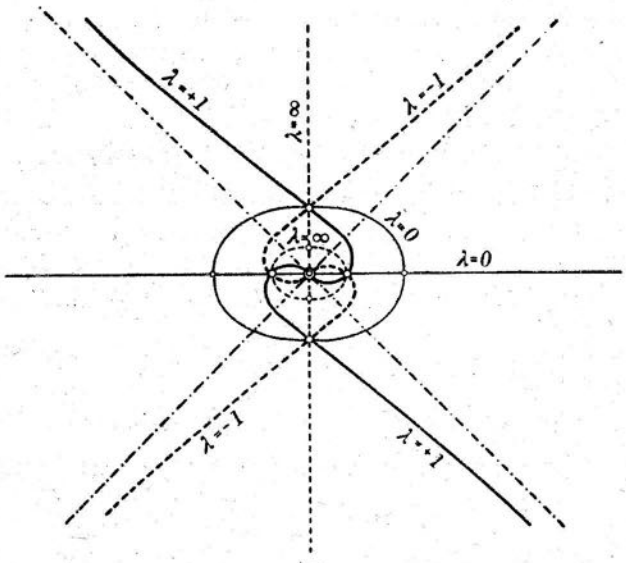

Fig. 2.

[13]) J. Steiner, Allg. Eigenschaften der alg. Kurven, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **47** (1848), S. 1—6 = Ges. Werke Bd. II, S. 495.

flächen sechsten Grades in der elliptischen linearen Kongruenz unter der Annahme $p = q = 0$. Die Schnittkurven des Büschels mit dieser Ebene bestehen aus dem unendlichfernen Kongruenzstrahle und ∞^1 Kurven fünfter Ordnung. Die beiden Flächen mit den Parameterwerten $\lambda = \pm 1$ besitzen je drei reelle Wenderegelstrahlen und haben je ein Strahlenparaboloid zur Asymptotenfläche. Ihre Schnittkurven mit der Fluchtebene sind die unendlichferne Gerade und die beiden Kurven mit den Parameterwerten $\lambda = \pm 1$ mit je drei reellen Wendepunkten und je einer Asymptote. Der Büschel B_1^6 enthält ferner zwei Flächen sechsten Grades ($\lambda = 0, \infty$), die je in eine Regelfläche vierten Grades vom Geschlecht eins und ein Strahlenparaboloid zerfallen. Ihre Schnittkurven sind die beiden Kurven vierter Ordnung mit den Parameterwerten $\lambda = 0, \infty$ (Cartesische Ovale) und die beiden Geradenpaare, welche die x- und die y-Achse mit der unendlichfernen Geraden bilden. Diese Geradenpaare sind die Schnitte mit den beiden zu den Flächen rechnenden Strahlenparaboloiden.

15. Die in Nr. **3** auftretende Substitution $z' = \frac{1}{z}$ ist das Bild der sekundären Involution J. Aus Nr. **2b** und dem ersten Teil des Theorems Nr. **3** ist daher zu folgern:

Die beiden Büschel B_1^6, B_2^6 von Regelflächen sechsten Grades werden durch die sekundäre Involution J mit den beiden Büscheln $B_1'^6$, $B_2'^6$ von Regelflächen sechsten Grades (Gleichungen (28), (29)) *vertauscht. Die ∞^1 Regelflächen sechsten Grades dieser beiden Büschel schneiden einander überall — abgesehen von den dreifachen Leitgeraden — längs Kongruenzstrahlen in konjugierten Richtungen. Die Knotenstrahlen der Büschel $B_1'^6$, $B_2'^6$ gehen bzw. aus denen der Büschel B_1^6, B_2^6 durch die sekundäre Involution J hervor. Der Büschel $B_1'^6$ hat demnach die reellen Knotenstrahlen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}$ (Fig.* 1) *sowie den Hauptstrahl, der dem unendlichfernen Kongruenzstrahl vermöge J entspricht; außerdem hat er sechs Paare konjugiert imaginärer Strahlen zweiter Art zu Knotenstrahlen, darunter die beiden konjugiert imaginären Deckstrahlen j_1, j_2 der sekundären Involution J. Der Büschel $B_2'^6$ hat neun Paare konjugiert imaginärer Strahlen zweiter Art zu Knotenstrahlen.*

16. Aus Nr. **2c** und **3** ergibt sich auf dem gleichen Wege folgendes:

Drei windschiefe Kongruenzstrahlen z_1, z_2, z_3 bestimmen einen weiteren Büschel B_3^6 von ∞^1 Regelflächen sechsten Grades. Die Flächen haben die Leitgeraden der Kongruenz zu dreifachen Leitgeraden und auf jeder von ihnen zwölf imaginäre Kuspidalpunkte. Die drei Strahlen z_1, z_2, z_3 und die ihnen durch die sekundäre Involution J zugeordneten Strahlen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$ (Fig. 1) *sind die reellen Knotenstrahlen des Büschels B_3^6. Die übrigen Knotenstrahlen sind sechs Paare konjugiert imaginärer Strahlen zweiter Art.*

Jede Regelfläche des Büschels B_3^6 wird längs ihrer ∞^1 Regelstrahlen von den ∞^1 Regelflächen sechsten Grades eines zweiten Büschels B_4^6 in konjugierten Richtungen geschnitten. Der Büschel B_4^6 hat keine reellen Knotenstrahlen, seine Flächen haben die Leitgeraden der Kongruenz zu dreifachen Leitgeraden und auf jeder von ihnen zwölf imaginäre Kuspidalpunkte.

Die Gleichungen der beiden Flächenbüschel lauten:

$$(30)\quad B_3^6 \begin{cases} (q-\lambda p)[(1+z^2)^3-(x^2+y^2)^3]+3[A(xz-y)-\lambda B(x+yz)][(x^2+y^2)^2+(1+z)^2] \\ \quad -9(x^2+y^2)(1+z^2)\{[(1+z^2)-(x^2+y^2)]\,q-[(1+z^2)+(x^2+y^2)]\lambda p\} \\ +6[(x^2-y^2)(1-z^2)+4xyz]\{[(1+z^2)-(x^2+y^2)]q+[(1+z^2)+(x^2+y^2)]\lambda p\} \\ \qquad -6(x+yz)(xz-y)[A(x+yz)+\lambda B(xz-y)] \\ \qquad\quad -10A(xz-y)^3-10\lambda B(x+yz)^3=0 \end{cases}$$

mit

$$A = p^2+q^2-1\,,\quad B = p^2+q^2+1\,,$$

(31) B_4^6 $$f(x, y, z) + \lambda j(x, y, z) = 0\,,$$

wo $f(x, y, z)$, $j(x, y, z)$ dieselbe Bedeutung wie in Gleichung (27) und (29) haben.

Die sekundäre Involution J führt den Flächenbüschel B_3^6 in sich über und ebenso den Flächenbüschel B_4^6. Die ∞^1 Regelflächen jedes der beiden Büschel werden dabei involutorisch untereinander vertauscht. Die Doppelelemente der Involution im Büschel B_3^6 sind die beiden Regelflächen mit den Parameterwerten $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, im Büschel B_4^6 sind es die Regelflächen mit den Parameterwerten $\lambda = \pm 1$.

17. Aus Nr. **10** und den benutzten Abbildungsmethoden folgt weiter:

Die Regelflächen sechsten Grades der Büschel B_1^6, $B_1'^6$, B_2^6, $B_2'^6$, B_3^6, B_4^6 haben i. a. das Geschlecht vier und daher keine Doppelregelstrahlen, isolierte Regelstrahlen oder Rückkehrregelstrahlen. Jedoch liegen in jedem Büschel eine endliche Anzahl Flächen niederen Geschlechts. Ihre Parameterwerte λ_i sind die Wurzeln einer algebraischen Gleichung $R(\lambda) = 0$ vom 35. Grade. Sind deren Wurzeln alle verschieden, so enthält der Büschel 35 Flächen vom Geschlechte drei mit je einem Doppelregelstrahl.

Ausnahmen treten ein, wenn mehrere Wurzeln der Gleichung $R(\lambda) = 0$ zusammenfallen oder der Grad der Gleichung sich erniedrigt. So enthält z. B. der Büschel B_4^6 unter der Annahme $p = q = 0$ zwei rationale Regelflächen sechsten Grades, die eine ($\lambda = +1$) mit zwei Paaren konjugiert imaginärer Strahlen zweiter Art als Doppelregelstrahlen, die andere ($\lambda = -1$) mit vier reellen Doppelregelstrahlen. Der Büschel enthält ferner zwei Flächen sechsten Grades ($\lambda = 0, \infty$), die je in eine Regelfläche vierten Grades vom Geschlecht eins und ein Paar konjugiert imaginärer Kongruenzstrahlenbüschel erster Ordnung zerfallen. Die Gleichung $R(\lambda) = 0$ reduziert sich hier auf die Form $\lambda^3 - \lambda = 0$.

18. Aus dem Inhalt der Nr. **4** folgern wir für die elliptische lineare Kongruenz:

Vier reelle Kongruenzstrahlen z_1, z_2, z_3, z_4 bestimmen drei sekundäre Involutionen J_1, J_2, J_3 auf der elliptischen linearen Kongruenz. Die drei sekundären Involutionen bilden mit der Identität die Vierergruppe; aus je zweien von ihnen resultiert die dritte und aus allen dreien die Identität. Jede von ihnen vollzieht eine der drei möglichen Paarvertauschungen zwischen den vier Strahlen z_1, z_2, z_3, z_4. Es vertauschen:

J_1 *die Strahlen* $z_1 z_2$ *mit* $z_3 z_4$
J_2 *die Strahlen* $z_1 z_3$ *mit* $z_2 z_4$
J_3 *die Strahlen* $z_1 z_4$ *mit* $z_2 z_3$.

Jede der drei Involutionen besitzt ein Paar reeller Doppelstrahlen $\mathfrak{z}_i, \mathfrak{z}_k$ und ein Paar konjugiert imaginärer windschiefer Doppelstrahlen s_i, s_k. Die vier Doppelstrahlen jeder Involution werden durch die Leitgeraden der Kongruenz zu einem Tetraeder ergänzt. Die drei Paare reeller Doppelstrahlen

$$\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2,\ \mathfrak{z}_3\mathfrak{z}_4,\ \mathfrak{z}_5\mathfrak{z}_6$$

sind die drei Schnittstrahlenpaare dreier einscharig in der Kongruenz enthaltenen reellen Flächen zweiten Grades; jede der drei Regelflächen ist für die beiden übrigen polarinvariant.

Die drei sekundären Involutionen J_1, J_2, J_3 lassen sich analytisch auf folgende Normaldarstellung bringen[14]):

$$\begin{array}{lll}
J_1:\ \varrho p_1' = -p_4 & J_2:\ \varrho p_1' = -p_4 & J_3:\ \varrho p_1' = p_1 \\
\quad\ \varrho p_4' = -p_1 & \quad\ \varrho p_4' = -p_1 & \quad\ \varrho p_4' = p_4 \\
\quad\ \varrho p_5' = -p_5 & \quad\ \varrho p_5' = \ \ p_5 & \quad\ \varrho p_5' = -p_5 \\
\quad\ \varrho p_6' = \ \ p_6 & \quad\ \varrho p_6' = -p_6 & \quad\ \varrho p_6' = -p_6\,.
\end{array}$$

[14]) G. Haenzel, Eine analytische Theorie der Involutionen auf der lin. Strahlenkongruenz, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **166** (1932), S. 167—181.

Ihre Deckstrahlenquadrupel haben die Koordinaten:

$\mathfrak{z}_1)$ $1:0:1:-1:0:1$	$\mathfrak{z}_3)$ $-1:1:0:1:1:0$	$\mathfrak{z}_5)$ $0:0:0:1:0:0$
$\mathfrak{z}_2)$ $1:0:-1:-1:0:-1$	$\mathfrak{z}_4)$ $-1:-1:0:1:-1:0$	$\mathfrak{z}_6)$ $1:0:0:0:0:0$
$s_1)$ $1:i:0:1:i:0$	$s_3)$ $1:0:i:1:0:i$	$s_5)$ $0:1:i:0:1:i$
$s_2)$ $1:-i:0:1:-i:0$	$s_4)$ $1:0:-i:1:0:-i$	$s_6)$ $0:-1:i:0:-1:i.$

19. Aus Nr. **5**a läßt sich nun mit Leichtigkeit folgern:

Drei sekundäre Involutionen J_1, J_2, J_3 der elliptischen linearen Kongruenz, die mit der Identität die Vierergruppe bilden, führen zwei konjugierte Büschel B_1^8, B_2^8 von Regelflächen achten Grades der Kongruenz in sich über, indem sie jede Fläche achten Grades einzeln in sich transformieren. Jede Regelfläche beider Büschel hat die Leitgeraden der Kongruenz zu vierfachen Leitgeraden, sie enthält auf jeder Leitgeraden vierundzwanzig (imaginäre) Kuspidalpunkte. Ihre Regelstrahlen werden durch jede der drei sekundären Involutionen involutorisch gepaart.

Der Flächenbüschel B_1^8 hat acht reelle einfache Knotenstrahlen und zwar die beiden Quadrupel

$$z_1, z_2, z_3, z_4 \text{ und } z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}, z_{\mathrm{III}}, z_{\mathrm{IV}}.$$

Die Strahlen jedes Quadrupels werden durch die drei sekundären Involutionen paarweise vertauscht. Jede der beiden konjugiert imaginären Leitgeraden rechnet als Knotenstrahl des Büschels sechzehnfach. Die restlichen Knotenstrahlen des Büschels B_1^8 sind zwölf Paare konjugiert imaginärer Strahlen zweiter Art.

Jede Fläche achten Grades des Büschels B_1^8 wird in ihren ∞^1 Regelstrahlen von den ∞^1 Regelflächen achten Grades des Büschels B_2^8 in konjugierten Richtungen geschnitten. Die ∞^1 Flächen des Büschels B_2^8 haben die Leitgeraden der Kongruenz zu vierfachen Leitgeraden mit vierundzwanzig (imaginären) Kuspidalpunkten auf jeder von ihnen. Der Büschel B_2^8 besitzt keine reellen Knotenstrahlen.

Die Gleichungen der beiden Büschel von Regelflächen achten Grades lauten:

$$(32)\ B_1^8 \left\{ \begin{aligned} &(a+\lambda d)[(x^2+y^2)^2+(1+z^2)^2][(x^2-y^2)(1-z^2)+4xyz] \\ &+(b+\lambda e)[(x^2+y^2)^2-(1+z^2)^2](xz-y)(x+yz) \\ &+(c+\lambda f)(x^2+y^2)^2(1+z^2)^2 \\ &+\lambda g[((x^2+y^2)^2+(1+z^2)^2)^2-16(xz-y)^2(x+yz)^2]=0 \end{aligned} \right.$$

$$(33)\ B_2^8 \left\{ \begin{aligned} &[(x^2+y^2)^4+(1+z^2)^4-16(xz-y)^2(x+yz)^2](1+\lambda) \\ &+(a+\lambda d)(x^2+y^2)^2(1+z^2)^2 \\ &+(b+\lambda e)[(x^2+y^2)^2+(1+z^2)^2][x^2-y^2)(1-z^2)+4xyz] \\ &+(c+\lambda f)[(x^2+y^2)^2-(1+z^2)^2](xz-y)(x+yz)=0. \end{aligned} \right.$$

Die $a, b, \ldots, g$ hängen rational von den Koordinaten der Kongruenzstrahlen $z_1, \ldots, z_4$ ab.

20. Aus Nr. **5**a, b folgt ganz entsprechend:

Vier Kongruenzstrahlen z_1, z_2, z_3, z_4, welche die drei sekundären Involutionen J_1, J_2, J_3 der Vierergruppe bedingen, bestimmen mit zwei gegebenen weiteren Kongruenzstrahlen a, b vier Paare Büschel von Regelflächen zwölften Grades:

$$B_0^{12}, B_0'^{12};\ B_1^{12}, B_1'^{12};\ B_2^{12}, B_2'^{12};\ B_3^{12}, B_3'^{12}.$$

Jede Fläche eines Büschels B_i^{12} wird von den ∞^1 Flächen des Büschels $B_i'^{12}$ längs ihrer ∞^1 Regelstrahlen in konjugierten Richtungen geschnitten. Die Regelflächen aller Büschel haben die Leitgeraden der Kongruenz zu sechsfachen Leitgeraden und enthalten auf jeder Leitgeraden sechzig imaginäre Kuspidalpunkte.

Aus den Flächen der beiden konjugierten Büschel B_0^{12}, $B_0'^{12}$ gehen die Flächen der drei übrigen Büschelpaare bzw. durch die drei sekundären Involutionen J_1, J_2, J_3 hervor.

Jede der beiden Leitgeraden ist ein sechsunddreißigfacher Knotenstrahl für alle Flächenbüschel. Der Büschel B_0^{12} hat die vier Strahlen z_1, z_2, z_3, z_4, die sechs reellen Doppelstrahlen $\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3\mathfrak{z}_4, \mathfrak{z}_5\mathfrak{z}_6$ der drei sekundären Involutionen J_i, und die beiden Strahlen a, b zu reellen einfachen Knotenstrahlen. Die drei Büschel B_i^{12} $(i = 1, 2, 3)$ haben die gleichen reellen Knotenstrahlen, nur treten an die Stelle von a, b je die beiden ihnen durch die sekundäre Involution J_i zugeordneten Kongruenzstrahlen a_i, b_i. Außerdem besitzt jeder der Büschel $B_0^{12}, \ldots, B_3^{12}$ sechzig paarweise konjugiert imaginäre Strahlen zweiter Art zu Knotenstrahlen. Die vier Flächenbüschel $B_0'^{12}, \ldots, B_3'^{12}$ haben (außer den Leitgeraden) je zweiundsiebzig paarweise konjugiert imaginäre Strahlen zweiter Art zu Knotenstrahlen.

Fallen die beiden Knotenstrahlen a, b mit einem der sechs reellen Knotenstrahlen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_6$ zusammen, so reduzieren sich die vier Paare von Flächenbüscheln auf zwei Paare Büschel von Regelflächen zehnten Grades

$$B_0^{10}, B_0'^{10} \text{ und } B_1^{10}, B_1'^{10}.$$

Die eine sekundäre Involution führt dann B_0^{10} und $B_0'^{10}$ je in sich über, die beiden anderen sekundären Involutionen verwandeln B_0^{10} und $B_0'^{10}$ in $B_1^{10}, B_1'^{10}$.

Jede Fläche des Büschels B_0^{10} und des Büschels B_1^{10} hat ein Strahlenparaboloid zur Asymptotenfläche; diese ∞^1 Asymptotenflächen erfüllen zweimal einen Büschel von Strahlenparaboloiden. Sein Basisvierseit besteht aus den Leitgeraden, dem Hauptstrahl und dem unendlichfernen Kongruenzstrahle.

Die Schnittkurven der in Nr. **13—19** behandelten Regelflächen mit der Fluchtebene der Kongruenz (xy-Ebene) sind mit den in I A behandelten Bildkurven dieser Regelflächen identisch und alle übrigen Schnitte senkrecht zum Hauptstrahl der Kongruenz ergeben Kurven vom gleichen affinen Typus.

B. Die hyperbolische lineare Kongruenz.

21. Bei der Untersuchung von Regelflächen des Grades $2n$ in der hyperbolischen linearen Kongruenz beginnen wir sogleich mit den Regelflächen achten Grades. Die Regelflächen sechsten Grades lassen sich mit Hilfe von Nr. **6—8** in Analogie zu den Theoremen der elliptischen linearen Kongruenz in Nr. **13—17** unter Berücksichtigung der andersgearteten Realitätsverhältnisse in der hyperbolischen Kongruenz behandeln.

Der Inhalt der Nr. **9** führt auf folgende Theoreme:

Vier Strahlen z_1, z_2, z_3, z_4 der hyperbolischen Kongruenz bestimmen die drei sekundären Involutionen J_1, J_2, J_3, die jene vier Strahlen paarweise untereinander vertauschen. Die vier z_i können reelle oder konjugiert imaginäre Strahlen erster oder zweiter Art sein. Die drei sekundären Involutionen J_1, J_2, J_3 bilden mit der Identität die Vierergruppe und gestatten in Plückerschen Linienkoordinaten die Normaldarstellungen[14]):

$$\begin{array}{lll}
J_1\colon \varrho p_1' = p_4 & J_2\colon \varrho p_1' = p_4 & J_3\colon \varrho p_1' = p_1 \\
\quad\;\; \varrho p_4' = p_1 & \quad\;\; \varrho p_4' = p_1 & \quad\;\; \varrho p_4' = p_4 \\
\quad\;\; \varrho p_5' = -p_5 & \quad\;\; \varrho p_5' = p_5 & \quad\;\; \varrho p_5' = -p_5 \\
\quad\;\; \varrho p_6' = p_6 & \quad\;\; \varrho p_6' = -p_6 & \quad\;\; \varrho p_6' = -p_6.
\end{array}$$

Jede der drei sekundären Involutionen hat vier Deckstrahlen, die je ein windschiefes Vierseit bilden und von den Leitgeraden der Kongruenz je zu einem Tetraeder ergänzt werden; ihre Linienkoordinaten sind:

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{z}_1)\ -1:0:1:-1:0:-1 & \mathfrak{z}_3)\ 1:i:0:1:i:0 & \mathfrak{z}_5)\ 0:0:0:1:0:0 \\
\mathfrak{z}_2)\ -1:0:-1:-1:0:1 & \mathfrak{z}_4)\ 1:-i:0:1:-i:0 & \mathfrak{z}_6)\ 1:0:0:0:0:0 \\
s_1)\ \ 1:1:0:-1:1:0 & s_3)\ -1:0:i:1:0:-i & s_5)\ 0:1:1:0:1:-1 \\
s_2)\ \ 1:-1:0:-1:-1:0 & s_4)\ -1:0:-i:1:0:i & s_6)\ 0:-1:1:0:-1:-1.
\end{array}$$

Aus jedem der drei Quadrupel läßt sich ein Paar herausgreifen, so daß die drei Paare Kongruenzstrahlen

$$\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2,\ \mathfrak{z}_3\mathfrak{z}_4,\ \mathfrak{z}_5\mathfrak{z}_6$$

die drei Schnittstrahlenpaare dreier füreinander polarinvarianter Regelscharen zweiter Ordnung der Kongruenz sind. (In der dualkomplexen Bildebene (Nr. 9) entsprechen den Strahlen z_1, z_2, z_3, z_4 vier Nullstellen einer biquadratischen Funktion, den Kongruenzstrahlen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_6$ sechs Nullstellen ihrer Jacobischen Kovariante, den drei sekundären Involutionen J_i die drei dualkomplexen Inversionen nebst Spiegelungen. Die drei polarinvarianten Regelscharen haben drei gleichseitige Hyperbeln durch L_1, L_2 zu Bildern.) Umgekehrt erhält man den Satz:

Drei füreinander polarinvariante Regelscharen zweiter Ordnung der hyperbolischen linearen Kongruenz schneiden einander in drei Paar Regelstrahlen $\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3\mathfrak{z}_4, \mathfrak{z}_5\mathfrak{z}_6$; zwei Paare sind reelle Kongruenzstrahlen, das dritte Paar besteht aus konjugiert imaginären Kongruenzstrahlen zweiter Art. Die drei Strahlenpaare sind Doppelstrahlenpaare dreier sekundärer Involutionen J_1, J_2, J_3, die mit der Identität die Vierergruppe bilden. Jedes der drei Strahlenpaare $\mathfrak{z}_i\mathfrak{z}_k$ bildet mit dem zweiten Paar Doppelstrahlen $s_i s_k$ seiner sekundären Involution ein windschiefes Vierseit, das die Leitgeraden der Kongruenz zu einem Tetraeder ergänzen.

22. Im Anschluß an Nr. 9a, b, c entstehen nunmehr folgende Theoreme für die hyperbolische lineare Strahlenkongruenz:

Vier Kongruenzstrahlen z_i bestimmen einen Büschel von Regelflächen achten Grades B_1^8. Jede Regelfläche achten Grades des Büschels hat die Leitgeraden der Kongruenz zu vierfachen Leitgeraden und enthält auf jeder Leitgeraden vierundzwanzig reelle Kuspidalpunkte. Sie ist gegen die drei sekundären Involutionen der durch die z_i bedingten Vierergruppe invariant; ihre Regelstrahlen werden dabei durch jede der drei sekundären Involutionen involutorisch vertauscht.

Jede der beiden Leitgeraden ist ein sechzehnfacher Knotenstrahl des Büschels B_1^8. Die übrigen zweiunddreißig Knotenstrahlen können reelle oder konjugiert imaginäre Strahlen erster oder zweiter Art sein. Sie zerfallen in zwei Gruppen zu je sechzehn; die sechzehn Strahlen jeder Gruppe werden durch die drei sekundären Involutionen J_i untereinander vertauscht.

Die ∞^1 Flächen des Büschels B_1^8 werden von den ∞^1 Regelflächen achten Grades eines zweiten Büschels B_2^8 längs ihrer Regelstrahlen in konjugierten Richtungen geschnitten. Die Flächen des Büschels B_2^8 haben gleichfalls die Leitgeraden der Kongruenz zu vierfachen Leitgeraden mit je vierundzwanzig reellen Kuspidalpunkten, jedoch besitzt B_2^8 keine weiteren reellen Knotenstrahlen. Die drei sekundären Involutionen J_i der Vierergruppe führen jede Regelfläche achten Grades des Büschels B_2^8 in sich über.

Die Gleichungen der beiden Flächenbüschel sind:

$$(34)\ B_1^8 \left\{ \begin{aligned} &(a+\lambda d)[(x^2-y^2)^2+(1-z^2)^2][(x^2+y^2)(1+z^2)+4xyz] \\ &+(b+\lambda e)[(x^2-y^2)^2-(1-z^2)^2](xz+y)(x+yz) \\ &+(c+\lambda f)(x^2-y^2)^2(1-z^2)^2 \\ &+\lambda g[((x^2-y^2)^2+(1-z^2)^2)^2+16(xz+y)^2(x+yz)^2]=0 \end{aligned} \right.$$

$$(35)\ B_2^8 \left\{ \begin{aligned} &[(x^2-y^2)^4+(1-z^2)^4+16(xz+y)^2(x+yz)^2](1+\lambda) \\ &+(a+\lambda d)(x^2-y^2)^2(1-z^2)^2 \\ &+(b+\lambda e)[(x^2+y^2)(1+z^2)+4xyz][(x^2-y^2)^2+(1-z^2)^2] \\ &+(c+\lambda f)[(x^2-y^2)^2-(1-z^2)^2](xz+y)(x+yz)=0\,. \end{aligned} \right.$$

Die $a, \ldots, g$ hängen rational von den Koordinaten der Kongruenzstrahlen $z_1, \ldots, z_4$ ab.

Die Betrachtung der Funktion $w = \dfrac{J(z)}{f_4(z)(z-a)(z-b)}$ in Nr. 9c liefert uns folgende Sätze:

Vier Kongruenzstrahlen z_1, z_2, z_3, z_4, die drei sekundäre Involutionen J_1, J_2, J_3 einer Vierergruppe bedingen, bestimmen mit zwei gegebenen weiteren Kongruenzstrahlen a, b vier Paare Büschel von Regelflächen zwölften Grades:

$$B_0^{12}, B_0'^{12};\ B_1^{12}, B_1'^{12};\ B_2^{12}, B_2'^{12};\ B_3^{12}, B_3'^{12}.$$

Jede Fläche eines Büschels B_i^{12} wird von den ∞^1 Flächen des Büschels $B_i'^{12}$ längs ihrer ∞^1 Regelstrahlen in konjugierten Richtungen geschnitten. Die Flächen aller Büschel haben die Leitgeraden der Kongruenz zu sechsfachen Leitgeraden mit sechzig reellen Kuspidalpunkten auf jeder von ihnen.

Aus den Flächen der konjugierten Büschel $B_0^{12}, B_0'^{12}$ gehen die Flächen der drei übrigen Büschelpaare bzw. durch die drei sekundären Involutionen J_1, J_2, J_3 hervor.

Jede der beiden Leitgeraden ist ein sechsunddreißigfacher Knotenstrahl für alle Flächenbüschel. Außerdem hat jeder Büschel B_i^{12} $(i = 0, 1, 2, 3)$ zweiundsiebzig Knotenstrahlen und zwar reelle oder konjugiert imaginäre Strahlen erster oder zweiter Art. Unter ihnen befinden sich die vier Strahlen $z_1, \ldots, z_4$ und die zwölf Doppelstrahlen der drei sekundären Involutionen J_1, J_2, J_3. Zu den reellen einfachen Knotenstrahlen des Büschels B_0^{12} gehören die Strahlen a, b. Die drei anderen Büschel B_i^{12} haben an Stelle von a, b die diesen durch die sekundären Involutionen J_i zugeordneten Kongruenzstrahlen zu Knotenstrahlen. Die vier Flächenbüschel $B_i'^{12}$ besitzen außer den beiden reellen Leitgeraden zweiundsiebzig Knotenstrahlen, deren Realitätsverhältnisse von z_1, z_2, z_3, z_4 abhängen.

Fallen die beiden Strahlen a, b mit einem der Doppelstrahlen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_6$ der sekundären Involutionen J_1, J_2, J_3 zusammen, so reduzieren sich die vier Paare von Flächenbüscheln auf zwei Büschelpaare von Regelflächen zehnten Grades:

$$B_0^{10}, B_0'^{10} \text{ und } B_1^{10}, B_1'^{10}.$$

Die eine sekundäre Involution führt $B_0^{10}, B_0'^{10}$ in sich über, jede der beiden anderen verwandelt $B_0^{10}, B_0'^{10}$ in $B_1^{10}, B_1'^{10}$. Jede Fläche der vier Büschel hat die Leitgeraden der Kongruenz zu fünffachen Leitgeraden mit je vierzig reellen Kuspidalpunkten.

Die Schnittkurven der behandelten Regelflächen mit der Fluchtebene der Kongruenz (xy-Ebene) sind mit ihren Bildkurven im Abschnitt I B identisch und alle übrigen Schnitte senkrecht zum Hauptstrahl der Kongruenz ergeben Kurven vom gleichen affinen Typus.

Eingegangen 3. November 1941.