Differentialgleichungen erster Ordnung und Berührungstransformationen im Linienraum mit Anwendungen auf die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz

---

Von der
Technischen Hochschule „Fridericiana" Karlsruhe
zur Erlangung der Würde
eines Doktors der technischen Wissenschaften
genehmigte

Dissertation

vorgelegt von

Fritz Reutter
Lehramtsreferendar
aus Karlsruhe

Referent: Professor Dr.-Ing. habil. G. Haenzel
Korreferent: Dozent Dr.-Ing. habil. H. Roßbach

Tag der mündlichen Prüfung: 30. September 1937

Spezialbetrieb für Dissertationsdruck von Robert Noske in Borna-Leipzig
1938

Meinen lieben Eltern

gewidmet

Inhalt.

Seite

Einleitung und Überblick 1

I. Die Differentialgleichung erster Ordnung in Linienkoordinaten 3

II. Die Diskriminantenfläche — Das oskulierende Hyperboloid — Singuläre Strahlen 10

III. Konjugierte Systeme von Regelscharen in der linearen Strahlenkongruenz und ihre Differentialgleichung 15

IV. Die Trajektorflächen der elliptischen linearen Strahlenkongruenz 19

V. Die Trajektorflächen der hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz 37

VI. Berührungstransformationen in der Liniengeometrie, insbesondere in der linearen Strahlenkongruenz 47

Einleitung und Überblick.

Durch eine Differentialgleichung erster Ordnung in zwei Veränderlichen wird — falls die Bedingungen des Existenztheorems erfüllt sind — ein System von ∞^1 ebenen Kurven definiert. Das Analogon dieses Vorgangs in der Liniengeometrie, die Definition von Systemen von ∞^1 Regelscharen der linearen Strahlenkongruenz durch gewisse Differentialgleichungen in Plückerschen Linienkoordinaten, ist auf dem in der vorliegenden Arbeit eingeschlagenen Weg jedoch bisher nicht untersucht, obwohl Differentialgleichungen anderer Art schon lange in liniengeometrischen Untersuchungen benutzt werden[1]). Diese Frage ist zum ersten Male in einer Arbeit von Herrn Haenzel[2]) aufgeworfen worden.

In der genannten Abhandlung wird zur Untersuchung der Geometrie der linearen Strahlenkongruenz häufig von einer Abbildung der ∞^2 Kongruenzstrahlen auf die ∞^2 Punkte einer Bildebene Gebrauch gemacht. Vermöge dieser Abbildung sind zahlreiche Gebiete der Geometrie der linearen Strahlenkongruenz isomorph zu bestimmten Gebieten der ebenen Geometrie. Daher führt die Diskussion von Differentialgleichungen in der Bildebene und der Systeme ihrer Integralkurven zur Definition entsprechender Systeme von Regelscharen der linearen Strahlenkongruenz.

Die vorliegende Arbeit behandelt in ihren ersten Kapiteln das Problem unmittelbar in Linienkoordinaten. Es ergibt sich, daß eine Differentialgleichung erster Ordnung in Linienkoordinaten, die der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in zwei Veränderlichen entspricht, durch eine exakte Differentialgleichung in Linienkoordinaten dargestellt wird. Die geometrische Bedeutung

---

[1]) Felix Klein: Über gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen, ges. Abhandlungen, 1. Bd. Nr. IX; K. Zindler: Liniengeometrie II, 1906, §§ 28, 51, 52.

[2]) G. Haenzel: Die Geometrie der linaren Strahlenkongruenz I, Journal f. d. reine u. angew. Math. 173 (1935), S. 110 ff.

dieses Ansatzes ist die folgende: Jede der ∞^1 Integralregelscharen ist Einhüllende von ∞^1 Büscheln berührender Regelscharen zweiter Ordnung der linearen Strahlenkongruenz. Durch die Koeffizienten der Differentialgleichung ist für jeden Strahl $\mathfrak{q}$ einer Integralregelschar ein Büschel von ∞^1 die Integralregelschar längs $\mathfrak{q}$ berührender Regelscharen zweiter Ordnung bestimmt. Die Ansätze lassen sich auf Differentialgleichungen in beliebigen Strahlenkongruenzen und Komplexen sowie im Linienraum überhaupt und auf Systeme solcher Differentialgleichungen ausdehnen. Die Integration der vorgegebenen Differentialgleichung in der Kongruenz läßt sich durchführen, indem man mittels der Gleichungen der Kongruenz und der Plückerschen Fundamentalrelation drei der Koordinaten eliminiert. Die resultierende Differentialgleichung ist in eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in zwei inhomogenen Veränderlichen überführbar. — Die singulären Strahlen der Integralregelscharen gehören der Diskriminantenfläche der Differentialgleichung an. Ihre nähere Untersuchung erfolgt, sofern nicht Singularitäten höherer Ordnung vorliegen, mit Hilfe des oskulierenden Hyperboloids, dessen Koeffizienten sich aus denen der Differentialgleichung allein ermitteln lassen. — Den Abschluß dieser allgemeinen Untersuchungen bildet die Ermittlung der Differentialgleichung von Systemen konjugierter Regelscharen der linearen Kongruenz.

Im IV. und V. Kapitel werden diese Ergebnisse zur analytischen Untersuchung einer neuen Klasse transzendenter Regelscharen der linearen Strahlenkongruenz herangezogen, die kürzlich erstmalig von Herrn Haenzel behandelt wurden[3]). Diese Regelscharen sind zu den ∞^1 Regelscharen zweiter Ordnung eines Ringsystems konjugiert. Ihre Trägerflächen werden im folgenden kurz als „Trajektorflächen" bezeichnet. Hierbei ergeben sich zahlreiche geometrische Sätze über diese Trajektorflächen.

Schließlich erfolgt im VI. Kapitel in Anlehnung an die Liesche Theorie der Berührungstransformationen eine kurze Behandlung der Berührungstransformationen im Linienraum. Es wird die allgemeine Form der „Leitgleichungen" der endlichen Berührungstransformationen des Linienraums angegeben. Die Spezialisierung der erhaltenen Ergebnisse auf die lineare Strahlenkongruenz ermöglicht die Behandlung zweier besonderer Berührungstransformationen in der linearen Strahlenkongruenz. Die Aufeinanderfolge dieser beiden Berührungstransformationen führt einen Kongruenzstrahl in seine reziproke Polare bezüglich einer einscharig der Kongruenz angehörigen Regelfläche zweiten Grades über.

[3]) G. Haenzel und F. Reutter: Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz III, Abschnitt II, Journal f. d. reine u. angew. Math. 178 (1938), Heft 4.

Für die geometrischen Untersuchungen werden zahlreiche Sätze und Begriffe aus der Geometrie der linearen Strahlenkongruenz benötigt, die in der Hauptsache einigen Arbeiten von Herrn Haenzel entnommen sind[4]).

I. Die Differentialgleichung erster Ordnung in Linienkoordinaten.

1. Die folgenden Untersuchungen bedienen sich durchweg der Plückerschen Linienkoordinaten p_i, die sich aus den homogenen Punktkoordinaten x_i, y_i zweier Punkte einer Geraden in der folgenden Weise ergeben:

$$p_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad p_2 = x_1 y_3 - x_3 y_1, \quad p_3 = x_2 y_3 - x_3 y_2,$$
$$p_4 = x_3 y_4 - x_4 y_3, \quad p_5 = x_4 y_2 - x_2 y_4, \quad p_6 = x_1 y_4 - x_4 y_1.$$

Sie unterliegen der Plückerschen Fundamentalrelation

$$R(p_i) = \sum_{i=1}^{6} p_{i+3} p_i = 0. \quad (i = 1, \ldots, 6 \bmod 6)$$

Ein linearer Komplex A wird dann durch eine Gleichung

$$A = \sum_{i=1}^{6} a_{i+3} p_i = 0,$$

eine lineare Strahlenkongruenz durch zwei Gleichungen

$$A = \sum_{i=1}^{6} a_{i+3} p_i = 0, \qquad B = \sum_{i=1}^{6} b_{i+3} p_i = 0$$

dargestellt.

Im folgenden wird zunächst von einem allgemeinen Ansatz für die Differentialgleichung erster Ordnung in Linienkoordinaten ausgegangen und untersucht, unter welchen Bedingungen durch

[4]) Haenzel: Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz I, Journal f. d. reine u. angew. Math. 173 (1935), S. 91—113; Haenzel: Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz II, Journal f. d. reine u. angew. Math. 175 (1936), S. 169—181.

diesen Ansatz zusammen mit den Gleichungen der Kongruenz Systeme von Regelscharen der linearen Kongruenz definiert sind.

2. Der allgemeinste Ansatz für eine Differentialgleichung erster Ordnung in Linienkoordinaten ist durch die Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{6} \varphi_{i+3}(p_k)\, dp_i = 0 \tag{1}$$

gegeben.

Die $\varphi_{i+3}(p_k)$ seien in den sechs Veränderlichen $p_1, \ldots, p_6$ homogene Funktionen vom gleichen Grade. Sie sollen in einem gewissen Bereich der p_k eindeutig definiert sein, stückweise stetige partielle erste Ableitungen nach den p_k besitzen und außerdem höchstens für einzelne singuläre Strahlen sämtlich verschwinden.

Unter welchen Bedingungen stellt nun die Differentialgleichung (1) zusammen mit den Gleichungen der Kongruenz

$$A = \sum_{i=1}^{6} a_{i+3} p_i = 0 \quad \text{und} \quad B = \sum_{i=1}^{6} b_{i+3} p_i = 0 \tag{2}$$

und

$$R(p_i) = \sum_{i=1}^{6} p_{i+3} p_i = 0 \tag{3}$$

die Differentialgleichung eines Systems von ∞^1 Regelscharen der linearen Strahlenkongruenz dar?

3. Wenn durch die Differentialgleichung (1) in *homogenen* Linienkoordinaten ein System von ∞^1 Regelscharen der Kongruenz bestimmt wird, so muß sich dasselbe System von ∞^1 Regelscharen auch durch die der Gleichung (1) entsprechende Differentialgleichung in *inhomogenen* Linienkoordinaten bestimmen lassen (abgesehen davon, daß in inhomogenen Linienkoordinaten ein bestimmter Kongruenzstrahl als unendlichferner ausgezeichnet ist). Daher soll untersucht werden, wann die Differentialgleichung (1) in eine äquivalente Differentialgleichung in inhomogenen Linienkoordinaten $x_1, \ldots, x_5$

$$\sum_{j=1}^{5} X_j(x_k)\, dx_j = 0 \tag{4}$$

übergeführt werden kann. Die allgemeinste Beziehung zwischen den homogenen Koordinaten p_i und den inhomogenen Koordinaten x_j ist:

$$x_j = \frac{\sum_{m=1}^{6} a_{jm} p_m}{\sum_{n=1}^{6} a_{6n} p_n}. \tag{5}$$

Dann ergibt sich:

$$\sum_{j=1}^{5} X_j(x_k)\, dx_j = \frac{1}{\sum_n (a_{6n} p_n)^2} \sum_{j=1}^{5} \Big\{ X_j \sum_{n=1}^{6} \sum_{m=1}^{6} (a_{6n} a_{jm} - a_{jn} a_{6m}) p_n\, dp_m \Big\}.$$

Soll

$$\sum_{j=1}^{5} X_j(x_k)\, dx_j = \sum_{m=1}^{6} \varphi_{m+3}(p_k)\, dp_m$$

sein, so muß gelten:

$$\varphi_{m+3} = \frac{1}{\sum_n (a_{6n} p_n)^2} \sum_{j=1}^{5} \Big\{ X_j \sum_{n=1}^{6} (a_{6n} a_{jm} - a_{jn} a_{6m}) p_n \Big\} \tag{6}$$

$$(m = 1, \ldots, 6 \bmod 6).$$

Durch Auflösung der Gleichungen (6) nach X_j erhält man die Funktionen X_j der Differentialgleichung (4). Da die Gleichungen (6) ein System von sechs Gleichungen für nur fünf unbekannte Funktionen X_j darstellen, muß eine in p_k identische Beziehung zwischen den sechs Gleichungen (6) bestehen, damit diese miteinander verträglich sind. Multipliziert man die Gleichungen (6) mit p_m und addiert, so ergibt sich als zusätzliche Bedingung:

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{m=1}^{6} \varphi_{m+3} p_m = \\ \frac{1}{\sum_n (a_{6n} p_n)^2} \sum_{j=1}^{5} \Big\{ X_j \sum_{m=1}^{6} \sum_{n=1}^{6} (a_{6n} a_{jm} p_n p_m - a_{6m} a_{jn} p_n p_m) \Big\} \equiv 0 . \end{array} \right. \tag{7}$$

Umgekehrt kann man auch von der inhomogenen Differentialgleichung (4) ausgehen: Aus den gegebenen Funktionen X_j lassen sich die sechs Funktionen φ_{m+3} so bestimmen, daß sie der Relation (7) genügen. Also folgt:

Eine Differentialgleichung in homogenen Linienkoordinaten p_i

$$\sum_{i=1}^{6} \varphi_{i+3}(p_k)\, dp_i = 0$$

ist dann und nur dann in eine äquivalente Differentialgleichung in inhomogenen Linienkoordinaten x_j

$$\sum_{j=1}^{5} X_j(x_k)\, dx_j = 0$$

überführbar, wenn die Funktionen $\varphi_{i+3}(p_k)$ die identische Relation

$$\sum_{i=1}^{6} \varphi_{i+3}(p_k)\, p_i = 0 \tag{7}$$

erfüllen.

4. Wir untersuchen zunächst die geometrische Bedeutung der Relation (7): Durch die Differentialgleichung (1) werden aus der Mannigfaltigkeit der von einem Strahle $\mathfrak{q}\,(q_k)$ des Linienraums ausgehenden ∞^3 Fortschreitungsrichtungen[5]) dp_i diejenigen ∞^2 herausgegriffen, die einer linearen Mannigfaltigkeit mit der Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{6} \varphi_{i+3}(q_k)\,(p_i - q_i) = 0$$

angehören. Diese Gleichung stellt bei beliebigen q_i dann und nur dann einen linearen Komplex dar, wenn identisch in den q_k gilt:

$$\sum_{i=1}^{6} \varphi_{i+3}(q_k)\, q_i = 0\,. \tag{7}$$

Der durch die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{6} \varphi_{i+3}(q_k)\, p_i = 0 \tag{8}$$

bestimmte lineare Berührkomplex Γ_t schneidet aus der linearen Kongruenz mit den Gleichungen (2) eine Regelschar zweiter Ordnung aus. Diese hat längs des Regelstrahls $\mathfrak{q}\,(q_k)$ die durch die Differentialgleichung (1) vorgeschriebene Richtung. Aus den ∞^2 Fortschreitungsrichtungen durch den Strahl $\mathfrak{q}$ im Berührkomplex Γ_t wird also durch die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{6} a_{i+3}\, dp_i = 0\,, \qquad \sum_{i=1}^{6} b_{i+3}\, dp_i = 0$$

eine einzige „Kongruenzrichtung" ausgewählt.

[5]) K. Zindler: Liniengeometrie II, 1906, S. 70 u. 140.

(Die ∞^1 Kongruenzrichtungen durch einen Kongruenzstrahl $\mathfrak{q}$ können in folgender Weise mittels der den Strahl $\mathfrak{q}$ enthaltenden Regelscharen zweiter Ordnung definiert werden[6]): Durch einen gegebenen Kongruenzstrahl $\mathfrak{q}$ gehen ∞^2 Regelscharen zweiter Ordnung. Diese lassen sich auf ∞^1 Büschel einander je längs $\mathfrak{q}$ berührender Regelscharen verteilen; jedem Büschel gehört eine parabolische Regelschar an. Die ∞^1 durch $\mathfrak{q}$ gehenden parabolischen Regelscharen zweiter Ordnung geben die ∞^1 Kongruenzrichtungen durch den Kongruenzstrahl $\mathfrak{q}$ an.)

5. Wenn die Beziehung (7) erfüllt ist, sind also die Funktionen $\varphi_{i+3}\,(p_k)$ in der Differentialgleichung (1) für jeden Kongruenzstrahl $\mathfrak{q}\,(q_k)$ proportional den Koeffizienten einer die Integralregelschar durch $\mathfrak{q}$ berührenden Regelschar zweiter Ordnung. Es sei $A=0, B=0, F(p_k,\sigma)=0$ die Darstellung der ∞^1 Integralregelscharen mittels eines Parameters σ. Dann gilt nach Elimination von σ aus den partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial p_i}$ für jeden Kongruenzstrahl des Definitionsbereichs der Differentialgleichung (1):

$$\varphi_{i+3}(p_k) = \mu(p_k)\frac{\partial F(p_k)}{\partial p_i}\,.$$

$\mu(p_k)$ ist eine homogene Funktion der p_k. Infolgedessen läßt sich die Differentialgleichung (1) auch in der Form schreiben:

$$\sum_{i=1}^{6} \varphi_{i+3}\, dp_i = \mu \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial F}{\partial p_i}\, dp_i = \mu\, dF. \tag{9}$$

Die Differentialgleichung (9) ist also eine exakte Differentialgleichung. Umgekehrt erfüllen die Funktionen $\varphi_{i+3}\,(p_k)$ in einer exakten Differentialgleichung $\sum_{i=1}^{6} \varphi_{i+3}\, dp_i = 0$ immer die Beziehung (7). Damit ist nachgewiesen:

Die Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{6} \varphi_{i+3}(p_k)\, dp_i = 0$$

[6]) Haenzel: Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz II Nr. 10 S. 178.

bestimmt dann und nur dann ein System von ∞^1 Regelscharen der linearen Kongruenz, wenn sie eine exakte Differentialgleichung ist, so daß die Bedingung (7) von selbst erfüllt wird.

6. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (9) bzw. (1) kann sofort angegeben werden, wenn der Multiplikator $\frac{1}{\mu}$ in der Gleichung (9) bekannt ist. Die Integration erfolgt dann ohne Heranziehung der Gleichungen der Kongruenz, denn die Differentialgleichung (1) ist eine Differentialgleichung für ein System von ∞^1 Strahlenkomplexen, die aus der linearen Kongruenz die Integralregelscharen ausschneiden.

Läßt sich der Multiplikator $\frac{1}{\mu}$ nicht bestimmen, so kann man zunächst mittels der Gleichungen (2) und (3) drei der Variabeln p_i, etwa p_4, p_5, p_6, und deren Differentiale eliminieren. Die verbleibende Differentialgleichung in drei Variabeln

$$\sum_{i=1}^{3} \psi_{i+3}(p_k)\, dp_i = 0 \qquad k = 1, 2, 3$$

läßt sich dann mittels der reduzierten Gleichung (7)

$$\sum_{i=1}^{3} \psi_{i+3}(p_k)\, p_i = 0 \tag{7a}$$

auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in zwei Veränderlichen x, y

$$X(x,y)\, dx + Y(x,y)\, dy = 0$$

zurückführen. In Worten:

Die Integration der Differentialgleichung erster Ordnung in der linearen Kongruenz

$$\sum_{i=1}^{6} \varphi_{i+3}(p_k)\, dp_i = 0$$

ist durch die Integration der ihr zugeordneten Differentialgleichung in zwei inhomogenen Veränderlichen x, y

$$X(x,y)\, dx + Y(x,y)\, dy = 0$$

gesichert.

7. Exakte Differentialgleichungen in Linienkoordinaten sind auch für den linearen Komplex und den Linienraum von Bedeutung. Eine einzige solche Gleichung definiert im linearen Komplex ein in diesem enthaltenes System von ∞^1 (algebraischen oder transzendenten) Strahlenkongruenzen, im Linienraum ein System von ∞^1 (algebraischen oder transzendenten) Strahlenkomplexen. Ein System von zwei derartigen Gleichungen definiert im linearen Komplex ein System von ∞^2 Regelscharen, im Linienraum ein System von ∞^2 Strahlenkongruenzen. Ein System von drei exakten Differentialgleichungen hat dagegen nur im Linienraum seine Bedeutung. Seine Integrale stellen ein System von ∞^3 (algebraischen oder transzendenten) Regelscharen dar.

Diese Überlegungen geben die Möglichkeit, die zunächst nur für die lineare Kongruenz, den linearen Komplex und den Linienraum gesicherte Bedeutung einer exakten Differentialgleichung auf beliebige (algebraische oder transzendente) Kongruenzen und Komplexe auszudehnen: Eine exakte Differentialgleichung definiert dann zusammen mit dem System der linearen Berührkongruenzen der (algebraischen oder transzendenten) Strahlenkongruenz ein System von ∞^1 Regelscharen einer beliebigen Strahlenkongruenz. Ebenso ergibt sich die Differentialgleichung eines Systems von ∞^1 Strahlenkongruenzen, die einem vorgegebenen Komplex angehören, und eines Systems von ∞^2 Regelscharen in einem vorgegebenen Komplex.

8. In der Theorie der Differentialgleichungen untersucht man neben exakten Differentialgleichungen ersten Grades Gleichungen höheren Grades. Entsprechend gilt für exakte Differentialgleichungen in homogenen Linienkoordinaten:

Es sei in homogenen Linienkoordinaten eine Differentialgleichung

$$\sum_i \sum_k \sum_l \dots \sum_s \Phi_{ikl\dots s}\, dp_i dp_k dp_l \dots dp_s = 0 \tag{10}$$

vorgelegt. Die Funktionen $\Phi_{ikl\dots s}(p_t)$ seien sämtliche in p_t homogen vom gleichen Grade und die linke Seite dieser Differentialgleichung lasse sich in ein Produkt von n i. a. irrationalen Linearfaktoren in der Form

$$\sum_{m=1}^{6} \varphi^{(1)}_{m+3}\, dp_m \sum_{m=1}^{6} \varphi^{(2)}_{m+3}\, dp_m \cdots \sum_{m=1}^{6} \varphi^{(n)}_{m+3}\, dp_m$$

zerlegen, so daß die Funktionen $\varphi^{(r)}_{m+3}(p_t)$ für jeden Wert von r für sich homogen vom gleichen Grade in den p_t werden. Sind die Bedingungen

$$\sum_{m=1}^{6} \varphi^{(r)}_{m+3} p_m = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllt, so stellt die Gleichung (10) eine Differentialgleichung erster Ordnung n^{ten} Grades für ein System von ∞^1 Strahlenkomplexen dar. Das allgemeine Integral dieser (exakten) Differentialgleichung ist gegeben durch

$$\prod_{r=1}^{n} f^{(r)}(p_i, \sigma) = 0 . \qquad (\sigma \text{ Parameter des Systems})$$

Dabei bedeutet $f^{(r)}(p_i, \sigma) = 0$ das System der Integralkomplexe der Gleichung

$$\sum_{m=1}^{6} \varphi^{(r)}_{m+3} \, dp_m = 0 .$$

II. Die Diskriminantenfläche — Das oskulierende Hyperboloid — Singuläre Strahlen.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf Differentialgleichungen erster Ordnung in der linearen Strahlenkongruenz, die ein System von ∞^1 Regelscharen der linearen Kongruenz definieren.

9. Die ∞^1 Integralkomplexe der Differentialgleichung (1) werden nicht nur durch die Gleichung $F(p_k, \sigma) = 0$ mit dem Parameter σ dargestellt, sondern auch durch die Gleichung

$$\Phi(p_k, \sigma) = F(p_k, \sigma) + G(p_k) \cdot R = 0 , \quad R = \sum_{i=1}^{6} p_i p_{i+3} ,$$

mit demselben Parameter σ dargestellt. Dabei ist $G(p_k)$ in den p_k homogen vom Grade $n - 2$, wenn F in den p_k homogen vom Grade n ist. Infolgedessen ist der Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{6} \varphi_{i+3} \, dp_i = 0$$

gleichwertig die Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{6} (\varphi_{i+3} + \lambda p_{i+3}) \, dp_i = 0 , \qquad -\infty \cdots \lambda \cdots +\infty .$$

Es ist also i. a. jedem Strahle $\mathfrak{q}(q_k)$ des Definitionsbereichs der Differentialgleichung ein Büschel linearer Berührkomplexe der Integralregelscharen zugeordnet mit der Gleichung

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{6} (\varphi_{i+3} + \lambda q_{i+3}) \, p_i = 0 , \qquad -\infty \cdots \lambda \cdots +\infty .$$

Nur wenn für einen Strahl $\mathfrak{q}(q_k)$ sämtliche[7]) Funktionen $\varphi_{i+3}(p_k)$ verschwinden, entartet der Berührungsbüschel in einen einzigen speziellen Komplex

$$\sum_{i=1}^{6} q_{i+3} \, p_i = 0 .$$

Der Strahl $\mathfrak{q}(q_k)$ ist dann ein singulärer Strahl für das durch die Differentialgleichung (1) in der Kongruenz bedingte Richtungsfeld. Solche „singuläre Stellen" der Differentialgleichung (1) sind zugleich singuläre Stellen der der Differentialgleichung (1) zugeordneten gewöhnlichen Differentialgleichung in zwei Veränderlichen $X\,dx + Y\,dy = 0$, da dann auch X und Y verschwinden. Die Differentialgleichung erster Ordnung ersten Grades in zwei Veränderlichen hat vier Typen von Singularitäten (Sattelpunkt — mit zwei voneinander verschiedenen Lösungen —, Knotenpunkt, Wirbelpunkt, Strudelpunkt oder asymptotischer Punkt). Entsprechend muß die exakte Differentialgleichung (1) in der linearen Strahlenkongruenz vier Arten singulärer Strahlen aufweisen[8]): Sattelstrahl, Knotenstrahl, Wirbelstrahl, asymptotischer Strahl. In einem Sattelstrahl schneiden sich zwei verschiedene Integralregelscharen, durch einen Knotenstrahl gehen ∞^1 i. a. einander berührender Integralregelscharen, ein Wirbelstrahl wird als isolierter Strahl von den Integralregelscharen umschlossen, einem asymptotischen Regelstrahl nähern sich die Integralregelscharen in unendlich vielen Umläufen.

10. Das durch die Differentialgleichung erster Ordnung ersten Grades in der Kongruenz bedingte Richtungsfeld besitzt also nur

[7]) Wenn fünf der Funktionen φ_i Null werden, verschwindet wegen der Beziehung (7) immer auch die sechste Funktion φ_k.

[8]) Haenzel: Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz I, S. 111.

einzelne singuläre Strahlen. Diese singulären Strahlen des Richtungsfeldes der Differentialgleichung sind zu unterscheiden von den singulären Strahlen der einzelnen Integralregelscharen. So ist zwar der Berührkomplex eines Torsalstrahls q ein spezieller, seine Achse s fällt aber nicht mit q zusammen, so daß durch q und s immer die Torsalebene bestimmt bleibt.

11. Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung zweiten Grades (und höheren Grades) haben eine Diskriminantenkurve mit der bekannten Bedeutung.

Sei in Linienkoordinaten vorgelegt die Differentialgleichung erster Ordnung zweiten Grades (Nr. 8):

$$\sum_{i=1}^{6} \varphi_{i+3}\, dp_i \cdot \sum_{i=1}^{6} \psi_{i+3}\, dp_i = 0 . \tag{12}$$

Die Invarianten der Büschel der Berührkomplexe, die durch die Differentialgleichungen

$$\sum_{i=1}^{6} \varphi_{i+3}\, dp_i = 0 , \qquad \sum_{i=1}^{6} \psi_{i+3}\, dp_i = 0 \tag{13}$$

bestimmt werden, sind

$$\Omega(\varphi) = 2 \sum_{i=1}^{3} \varphi_i \varphi_{i+3}, \qquad \Omega(\psi) = 2 \sum_{i=1}^{3} \psi_i \psi_{i+3},$$

deren Simultaninvariante ist

$$\Omega(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{6} \varphi_i \psi_{i+3} .$$

Dann wird durch den Strahlenkomplex

$$\Delta(p_i) \equiv \omega(\varphi, \psi) = \Omega(\varphi) \cdot \Omega(\psi) - \Omega^2(\varphi, \psi) = 0 \tag{14}$$

die *„Diskriminantenregelschar" der Differentialgleichung* aus der Kongruenz ausgeschnitten. Deren Trägerfläche werde die „Diskriminantenfläche" genannt. Für die Strahlen $\mathfrak{p}(p_k)$ der Diskriminantenregelschar fallen entweder

die beiden durch die Gleichung (12) definierten Kongruenzrichtungen zusammen

oder

die beiden Büschel von Berührkomplexen werden unbestimmt, indem alle φ_i, ψ_i verschwinden bzw. proportional p_i sind.

Zerfällt die Gleichung der Diskriminantenregelschar in

$$\Delta(p_k) \equiv \omega(\varphi, \psi) = \omega_1(p_k) \cdot \omega_2(p_k)$$

und hat der Teil $\omega_1 = 0$ überall die durch die Differentialgleichung vorgeschriebene Richtung, so liegt ein singuläres Integral $\omega_1(p_k) = 0$ vor[9]).

12. Die singulären Strahlen der einzelnen Integralregelscharen lassen sich mit Hilfe des eine Integralregelschar $\mathfrak{R}$ längs eines Regelstrahls $\mathfrak{q}(q_k)$ oskulierenden Hyperboloids ermitteln. Dessen Gleichung soll jetzt bestimmt werden.

Die Integralregelschar wird längs des Strahles $\mathfrak{q}(q_k)$ von einem Büschel linearer Komplexe berührt mit der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{6} (\varphi_{i+3} + \lambda q_{i+3}) p_i = 0 .$$

Einer von ihnen berührt längs $\mathfrak{q}$ von zweiter Ordnung. Außer seiner Gleichung

$$\sum_{i=1}^{6} (\varphi_{i+3} + \tilde{\lambda} q_{i+3}) p_i = 0$$

bzw. der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{6} (\varphi_{i+3} + \tilde{\lambda} p_{i+3})\, dp_i = 0$$

muß daher noch die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{6} \sum_{k=1}^{6} \left(\frac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial p_k} dp_k + \tilde{\lambda}\, dp_{i+3} \right) dp_i = 0$$

erfüllt sein. Hieraus folgt:

$$\tilde{\lambda} = - \frac{\sum_{i=1}^{6} \sum_{k=1}^{6} \frac{\partial \varphi_{i+3}(q_k)}{\partial p_k} dp_i\, dp_k}{\sum_{i=1}^{6} dp_i\, dp_{i+3}} . \tag{15}$$

---

[9]) Hierzu muß für je ein λ_1, λ_2 gelten:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial p_i} = \varphi_{i+3}(p_k) + \lambda_1 p_{i+3} = \psi_{i+3}(p_k) + \lambda_2 p_{i+3} .$$

Also ist

$$(16)\quad \sum_{i=1}^{6}\left(\varphi_{i+3}-\frac{\sum_{i=1}^{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial\,\varphi_{i+3}(q_k)}{\partial\,p_k}\,dp_i\,dp_k}{\sum_{i=1}^{6}dp_i\,dp_{i+3}}\,q_{i+3}\right)p_i=0$$

die Gleichung des oskulierenden linearen Komplexes. Hier sind für die dp_i die Werte einzusetzen, die die Richtung der durch den Strahl $\mathfrak{q}(q_k)$ gehenden Integralregelschar angeben. Zur Festlegung ihrer Verhältnisse ist außer den vier Gleichungen

$$(17)\quad \sum_{i=1}^{6}\varphi_{i+3}\,dp_i=0\,,\qquad \sum_{i=1}^{6}a_{i+3}\,dp_i=0\,,\qquad \sum_{i=1}^{6}b_{i+3}\,dp_i=0\,,$$

$$(18)\quad \sum_{i=1}^{6}p_{i+3}\,dp_i=0$$

noch eine willkürliche Beziehung

$$(19)\quad \sum_{i=1}^{6}k_{i+3}\,dp_i=0\ ^{10})$$

heranzuziehen.

(Aus den Gleichungen (17)—(19) läßt sich leicht ein System von Differentialgleichungen $\dot{p}_i(t)=P_i(t)$ für eine Parameterdarstellung $p_i=p_i(t)$ des zu bestimmenden Regelscharsystems angeben.)

13. Verschwinden nun für einen Strahl $\mathfrak{q}(q_k)$ die sämtlichen Funktionen φ_i gleichzeitig, so wird die Gleichung (16) erfüllt:

1. von den Koordinaten der Treffgeraden des Strahles $\mathfrak{q}(q_k)$.

2. durch den Ansatz $\sum_{i=1}^{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial\,\varphi_{i+3}(q_k)}{\partial\,p_k}\,dp_i\,dp_k=0\,.$

Zur Bestimmung der dp_i kann demnach an Stelle der ersten der Gleichungen (17) die aus der Gleichung (16) folgende Beziehung

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial\,\varphi_{i+3}}{\partial\,p_k}\,dp_i\,dp_k=0$$

herangezogen werden, die in den dp_i vom zweiten Grade ist. Je nach dem Verhalten der Diskriminante Δ der quadratischen Form

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial\,\varphi_{i+3}}{\partial\,p_k}\,dp_i\,dp_k$$

liegt ein Doppelregelstrahl, ein Rückkehrregelstrahl oder ein isolierter Regelstrahl vor. Die Diskriminantenfläche ist dann Ort solcher singulärer Strahlen für das System der ∞^1 Integralregelscharen. Knotenstrahl, Wirbelstrahl und asymptotischer Strahl dagegen sind singuläre Strahlen, die ∞^1 Integralregelscharen gemeinsam sind. Zu ihrer Bestimmung kann natürlich das oskulierende Hyperboloid nicht herangezogen werden.

Mit Hilfe der Koeffizienten des oskulierenden Hyperboloids lassen sich außerdem die übrigen Arten singulärer Regelstrahlen der einzelnen Integralregelscharen untersuchen.

III. Konjugierte Systeme von Regelscharen der linearen Strahlenkongruenz und ihre Differentialgleichung.

14. Die lineare Strahlenkongruenz, gegeben durch die Gleichungen

$$A=\sum_{i=1}^{6}a_{i+3}p_i=0\,,\qquad B=\sum_{i=1}^{6}b_{i+3}p_i=0$$

enthält ∞^3 Regelscharen zweiter Ordnung. Diese bilden das $\mathfrak{R}^2$-Gebüsch der Kongruenz. Andererseits gehen durch die lineare Strahlenkongruenz die ∞^1 linearen Komplexe eines Komplexbüschels dargestellt durch

$$A+\lambda B=0.$$

Die ∞^3 linearen Komplexe, die für diesen Komplexbüschel nullinvariant sind, bilden das Γ-Gebüsch der Kongruenz. Das Γ-Gebüsch der Kongruenz ist perspektiv zu ihrem $\mathfrak{R}^2$-Gebüsch, indem jede Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$ der Kongruenz von einem und

---

[10]) Zindler: Liniengeometrie II, S. 143. Insbesondere kann die Beziehung $\sum_{i=1}^{3}p_i\,dp_i=0$ benutzt werden.

nur einem Komplex des Γ-Gebüschs aus der Kongruenz ausgeschnitten wird[11]).

Ein gegebener linearer Komplex mit der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{6} c_{i+3} p_i = 0$$

gehört dem Γ-Gebüsch der Kongruenz an, wenn die beiden Beziehungen

$$\sum_{i=1}^{6} c_{i+3} a_i = 0\,, \qquad \sum_{i=1}^{6} c_{i+3} b_i = 0 \tag{20}$$

erfüllt sind.

Für die folgenden Untersuchungen sollen die linearen Berührkomplexe der Integralregelscharen der Differentialgleichung $\sum_{i=1}^{6} \varphi_{i+3}\, dp_i = 0$ durchweg dem Γ-Gebüsch der Kongruenz angehören. Wegen $A=0$, $B=0$ wird durch den Komplex mit der Gleichung

$$\widetilde{\Phi} = \sum_{i=1}^{6} (\varphi_{i+3} + \lambda_1 a_{i+3} + \lambda_2 b_{i+3})\, q_i = 0$$

dieselbe Regelschar zweiter Ordnung aus der Kongruenz ausgeschnitten wie durch den Komplex

$$\sum_{i=1}^{6} \varphi_{i+3}\, q_i = 0\,.$$

Man hat daher nur gemäß den Beziehungen (20) die beiden Parameter $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_2$ aus dem Gleichungssystem

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{6} \varphi_{i+3} a_i + \tilde{\lambda}_1 \sum_{i=1}^{6} a_{i+3} a_i + \tilde{\lambda}_2 \sum_{i=1}^{6} b_{i+3} a_i = 0\,, \\ \sum_{i=1}^{6} \varphi_{i+3} b_i + \tilde{\lambda}_1 \sum_{i=1}^{6} a_{i+3} b_i + \tilde{\lambda}_2 \sum_{i=1}^{6} b_{i+3} b_i = 0 \end{cases} \tag{21}$$

zu bestimmen. Dann lautet die Darstellung der Differentialgleichung (1) mit Hilfe der dem Γ-Gebüsch angehörigen Berührkomplexe:

[11]) Jolles: Die Polarität als Grundlage in der Geometrie der linearen Strahlenkongruenz, Math. Zs. 33 (1931), S. 733—790.

$$\sum_{i=1}^{6} \widetilde{\varphi}_{i+3}\, dp_i = \sum_{i=1}^{6} (\varphi_{i+3} + \tilde{\lambda}_1 a_{i+3} + \tilde{\lambda}_2 b_{i+3})\, dp_i = 0\,. \tag{22}$$

Damit diese Bestimmung von $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_2$ möglich ist, muß gelten:

$$\sum_{i=1}^{6} a_{i+3} a_i \cdot \sum_{i=1}^{6} b_{i+3} b_i - \sum_{i=1}^{6} (a_{i+3} b_i)^2 \neq 0\,.$$

Die Darstellung (22) gilt daher nicht für die parabolische Kongruenz.

15. In einer elliptischen oder hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz sind die ∞^1 Kongruenzrichtungen durch einen Kongruenzstrahl s paarweise konjugiert[12]). Führen zwei (algebraische oder transzendente) Regelscharen $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ der Kongruenz in zwei konjugierten Richtungen durch s, so ist jede die Regelschar $\mathfrak{R}_1$ längs s berührende Regelschar zweiter Ordnung polarinvariant für jede $\mathfrak{R}_2$ längs s berührende Regelschar zweiter Ordnung. Zwei Systeme von Regelscharen der Kongruenz, die einander überall in konjugierten Richtungen durchsetzen, heißen konjugierte Systeme von Regelscharen, ihre Trägerflächen konjugierte Flächensysteme[12]).

Zwei füreinander nullinvariante lineare Komplexe C und D aus dem Γ-Gebüsch der Kongruenz schneiden die Kongruenz in zwei füreinander polarinvarianten Regelscharen zweiter Ordnung $\mathfrak{C}^2$ und $\mathfrak{D}^2$[11]). Es seien

$$C = \sum_{i=1}^{6} c_{i+3} p_i = 0\,, \qquad D = \sum_{i=1}^{6} d_{i+3} p_i = 0$$

die Gleichungen der Komplexe C und D. Die beiden Komplexe sind füreinander nullinvariant, wenn die bilineare Beziehung

$$\sum_{i=1}^{6} c_{i+3} d_i = 0 \tag{23}$$

erfüllt ist.

16. Es sei

$$\sum_{i=1}^{6} \widetilde{\varphi}_{i+3}\, dp_i = 0$$

die Differentialgleichung eines Systems $\mathfrak{S}$ von ∞^1 Regelscharen der linearen Strahlenkongruenz $A=0$, $B=0$. Dann ergibt sich mit

[12]) Haenzel: Die Geometrie der lin. Strahlenkongruenz II, Nr. 10.

Hilfe der Beziehungen (23), (20) und (7) als Differentialgleichung des zu $\mathfrak{S}$ konjugierten Systems von Regelscharen $\mathfrak{S}'$:

$$(24)\quad \sum_{i=1}^{6} \tilde{\varphi}_{i+3}(p_k)\, dp_i = \begin{vmatrix} dp_1, & dp_2, & dp_3, & dp_4, & dp_5, & dp_6 \\ p_1, & p_2, & p_3, & p_4, & p_5, & p_6 \\ \tilde{\varphi}_1, & \tilde{\varphi}_2, & \tilde{\varphi}_3, & \tilde{\varphi}_4, & \tilde{\varphi}_5, & \tilde{\varphi}_6 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & b_5, & b_6 \\ \pi_1, & \pi_2, & \pi_3, & \pi_4, & \pi_5, & \pi_6 \end{vmatrix} = 0.$$

In der Gleichung (24) sind π_i die Koordinaten eines beliebigen Kongruenzstrahls. Die Funktionen $\tilde{\varphi}_{i+3}(p_k)$ bestimmen für jeden Kongruenzstrahl s einen Büschel linearer Berührkomplexe der Integralregelschar durch s. Durch die Wahl eines bestimmten Strahles $\pi(\pi_i)$ in der Gleichung (24) greift man aus dem Büschel der Berührkomplexe einen bestimmten heraus. Ist insbesondere $\pi(\pi_i)$ der unendlichferne Kongruenzstrahl, so werden durch die Berührkomplexe Strahlenparaboloide aus der Kongruenz ausgeschnitten.

Ist das eine System von Regelscharen $\mathfrak{S}$ bereits in integrierter Form gegeben:

$$(25)\qquad F(p_k, \sigma) = 0\,,$$

so treten in der Differentialgleichung (24) des konjugierten Systems $\mathfrak{S}'$ an Stelle der Funktionen $\tilde{\varphi}_i$ die Koeffizienten

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} + \tilde{\lambda}_1 a_{i+3} + \tilde{\lambda}_2 b_{i+3}$$

der F berührenden Komplexe. Dabei ist noch der Parameter σ aus $\frac{\partial F}{\partial p_i}$ mit Hilfe der Gleichung (25) zu eliminieren.

17. In der parabolischen Kongruenz ist der Begriff der konjugierten Richtung ausgeartet[13]). Es ist nämlich einer jeden Richtung durch einen Strahl s der parabolischen Kongruenz ein und dieselbe Richtung konjugiert. Diese ist bestimmt durch die Ebene durch s und den Träger der vereinigten Leitgeraden der Kongruenz. Es gibt also in der parabolischen Kongruenz keine eineindeutige Zuordnung konjugierter Richtungen und damit auch keine ein-eindeutige Zuordnung von Systemen konjugierter Regelscharen.

[13]) Haenzel u. Reutter: Die Geometrie d. lin. Strahlenkongruenz III, Nr. 15.

IV. Die Trajektorflächen der elliptischen linearen Strahlenkongruenz.

18. Im folgenden soll mittels der soeben entwickelten Methoden eine analytische Behandlung einer kürzlich erstmalig von Herrn Haenzel[14]) untersuchten neuen Klasse transzendenter Regelflächen gegeben werden. Ihre Regelscharen sind zu den ∞^1 Regelscharen eines Ringsystems von Regelflächen zweiten Grades konjugiert. Ein Ringsystem von Regelflächen zweiten Grades ist ein System von Regelflächen zweiten Grades, das zwei gegebene „Leitflächen" zweiten Grades H_1^2, H_2^2 umhüllt[15]). Entsprechend den verschiedenen Möglichkeiten der gegenseitigen Lage der Leitflächen des Ringsystems und der Art der Berührung der Flächen des Ringsystems mit seinen Leitflächen ergeben sich insgesamt zehn verschiedene Arten von Ringsystemen, eine Einteilung, die gegenüber reellen Kollineationen invariant ist. Die ∞^1 Flächen der Ringsysteme erster bis fünfter Art liegen einscharig in der elliptischen linearen Kongruenz, diejenigen der Ringsysteme sechster bis zehnter Art liegen einscharig in der hyperbolischen linearen Kongruenz. Zu jedem dieser Ringsysteme gibt es ein System konjugierter Regelflächen, die im folgenden nach Haenzel kurz als Trajektorflächen bezeichnet werden. In der parabolischen linearen Kongruenz kommen solche Flächen nicht vor.

19. Die Gleichung der elliptischen linearen Strahlenkongruenz sei in der Form

$$(26)\qquad p_2 - p_5 = 0, \qquad p_3 - p_6 = 0$$

gegeben. Zwei reelle konzentrische Regelscharen zweiter Ordnung $\mathfrak{H}_1^2$, $\mathfrak{H}_2^2$ der elliptischen linearen Kongruenz mit den beiden gemeinsamen konjugiert imaginären Regelstrahlen $p_5 = i p_6$, $p_1 = p_4 = 0$ und $p_5 = -i p_6$, $p_1 = p_4 = 0$ haben die Gleichungen

$$(27)\qquad L_1 = c_1 p_4 + c_4 p_1 = 0, \quad L_2 = d_1 p_4 + d_4 p_1 = 0$$

mit positiven Koeffizienten c_i, d_i. Die Trägerflächen H_1^2, H_2^2 der beiden Regelscharen $\mathfrak{H}_1^2$, $\mathfrak{H}_2^2$ sind Leitflächen zweier Ringsysteme von Regelflächen zweiten Grades. Die ∞^1 Flächen des ersten Systems (Ringsystem erster Art) berühren die Leitflächen ungleichartig. Die Gleichung ihrer ∞^1 Regelscharen lautet:

[14]) Haenzel u. Reutter: Die Geometrie d. lin. Strahlenkongruenz III, Abschn. II.

[15]) Haenzel: Die Geometrie d. lin. Strahlenkongruenz II, S. 175.

$$(28)\quad \begin{cases} \sqrt{c_1}\,(\sqrt{c_4 d_4}\,p_1 - \sqrt{c_1 d_1}\,p_4) - (\sqrt{c_1 d_4} + \sqrt{c_4 d_1}) \\ \quad \cdot [\sqrt{c_4}\,\lambda p_5 + \sqrt{c_1 - \lambda^2 c_4}\,p_6] = 0, \qquad -\infty \cdots \lambda \cdots +\infty . \end{cases}$$

Die ∞^1 Flächen des zweiten Ringsystems (Ringsystem zweiter Art) berühren die Leitflächen gleichartig, die Gleichung ihrer ∞^1 Regelscharen lautet:

$$(29)\quad \begin{cases} \sqrt{c_1}\,(\sqrt{c_4 d_4}\,p_1 + \sqrt{c_1 d_1}\,p_4) - (\sqrt{c_1 d_4} - \sqrt{c_4 d_1}) \\ \quad \cdot [\sqrt{c_4}\,\lambda p_5 + \sqrt{c_1 - \lambda^2 c_4}\,p_6] = 0, \qquad -\infty \cdots \lambda \cdots +\infty . \end{cases}$$

Längs des Regelstrahls $r\,(\mathfrak{p}_i)$ wird die Leitfläche H_1^2 von je einer Fläche des Ringsystems erster Art und einer Fläche des Ringsystems zweiter Art berührt. Für beide Flächen ist der Parameter $\lambda = -\frac{p_6}{p_4}$. Durch jeden Kongruenzstrahl im Ringgebiet zwischen den beiden Leitflächen gehen zwei reelle Flächen jedes der beiden Ringsysteme. Setzt man

$$\delta = \sqrt{c_1 d_4} \pm \sqrt{c_4 d_1}, \qquad \Omega = \sqrt{c_4 d_4}\,p_1 \mp \sqrt{c_1 d_1}\,p_4 ,$$

so sind die beiden Flächenparameter $\lambda_{1,2}$ bestimmt durch

$$(30)\quad \begin{cases} \lambda_{1,2} = -\dfrac{c_1}{c_4}\,\dfrac{p_5\,\Omega \mp p_6\sqrt{-L_1 L_2}}{p_1 p_4\,\delta} \\ \text{und es ist} \\ w_{1,2} = \sqrt{c_1 - \lambda^2 c_4} = -\dfrac{c_1}{c_4}\,\dfrac{p_6\,\Omega \mp p_5\sqrt{-L_1 L_2}}{p_1 p_4\,\delta} . \end{cases}$$

Dabei betreffen in δ und Ω die oberen Vorzeichen das Ringsystem erster Art, die unteren das Ringsystem zweiter Art.

Infolgedessen bestimmt auch die Differentialgleichung des Systems der zum Ringsystem (erster bzw. zweiter Art) konjugierten Regelscharen ein doppeltes Richtungsfeld in der Kongruenz, ist also vom zweiten Grade.

20. Das konjugierte Flächensystem eines solchen Ringsystems von Flächen zweiten Grades ist nach Nr. 16 (24) bestimmt durch die Differentialgleichung

$$(31)\qquad D_{\lambda_1} D_{\lambda_2} = 0 ,$$

wo

$$D_\lambda = \begin{vmatrix} dp_1 , & dp_2 , & dp_3 , & dp_4 , & dp_5 , & dp_6 \\ p_1 , & p_2 , & p_3 , & p_4 , & p_5 , & p_6 \\ \mp c_1\sqrt{d_1}, & -\sqrt{c_4}\,\lambda\dfrac{\delta}{2}, & -w\dfrac{\delta}{2}, & \sqrt{c_1 c_4 d_4}, & -\sqrt{c_4}\,\lambda\dfrac{\delta}{2}, & -w\dfrac{\delta}{2} \\ 0 , & -1 , & 0 , & 0 , & 1 , & 0 \\ 0 , & 0 , & -1 , & 0 , & 0 , & 1 \\ \pi_1 , & \pi_2 , & \pi_3 , & \pi_4 , & \pi_5 , & \pi_6 \end{vmatrix} .$$

Für $\lambda_{1,2}$ und $w_{1,2}$ sind die Werte (30) einzusetzen. Für die weitere Behandlung ist jeder Faktor D_{λ_1}, D_{λ_2} für sich Null zu setzen und dessen allgemeines Integral zu ermitteln. Aus dem Büschel der längs eines Regelstrahles $\mathfrak{p}\,(p_k)$ eine Integralregelschar berührenden Regelscharen zweiter Ordnung sollen zur Vereinfachung der Rechnung die Strahlenparaboloide herausgegriffen werden. Weist man dem unendlichfernen Kongruenzstrahl die Koordinaten

$$\pi_1 : \pi_2 : \pi_3 : \pi_4 : \pi_5 : \pi_6 = 1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0$$

zu und eliminiert p_2, p_3 mittels der Gleichungen (26) der Kongruenz, so ergibt sich schließlich die folgende Differentialgleichung:

$$(32)\quad \begin{cases} \sum_{i=4}^{6} \chi_{i+3}\,dp_i = \mp p_1\sqrt{-L_1 L_2}\,dp_4 + (p_6\,O \mp p_5\sqrt{-L_1 L_2})\,dp_5 \\ \qquad\qquad + (-p_5\,O \mp p_6\sqrt{-L_1 L_2})\,dp_6 = 0 \end{cases}$$

mit $$O = \sqrt{c_4 d_4}\,p_1 \pm \sqrt{c_1 d_1}\,p_4 .$$

Aus der Differentialgleichung (32) ist zunächst vermöge der Plückerschen Fundamentalrelation p_1 zu eliminieren. Dann hängt die Gleichung (32) nur noch von den drei Veränderlichen p_4, p_5, p_6 ab und ist nach Nr. 6 in eine gewöhnliche Differentialgleichung in zwei inhomogenen Veränderlichen x, y überführbar:

$$X dx + Y dy = 0 \quad \text{oder} \quad y' = -\frac{X}{Y} .$$

Setzt man $-\frac{p_6}{p_4} = x$, $-\frac{p_5}{p_4} = y$, so erhält man die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in x, y:

$$(33)\quad y' = \frac{y\,(\sqrt{c_4 d_4}\,(x^2+y^2) \mp \sqrt{c_1 d_1}) + x\sqrt{-[c_4(x^2+y^2)-c_1][d_4(x^2+y^2)-d_1]}}{x\,(\sqrt{c_4 d_4}\,(x^2+y^2) \mp \sqrt{c_1 d_1}) - y\sqrt{-[c_4(x^2+y^2)-c_1][d_4(x^2+y^2)-d_1]}} .$$

21. Da die Differentialgleichung (33) gegenüber der Gruppe der Drehungen um 0 invariant ist, ist diese Differentialgleichung in Polarkoordinaten separierbar; es ergibt sich

$$\varrho \frac{d\varphi}{d\varrho} = \frac{\sqrt{-(c_4\varrho^2 - c_1)(d_4\varrho^2 - d_1)}}{\sqrt{c_4 d_4}\,\varrho^2 \mp \sqrt{c_1 d_1}}.$$

Das obere Vorzeichen im Nenner betrifft das konjugierte Flächensystem des Ringsystems erster Art, das untere dasjenige des Ringsystems zweiter Art. Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist[16]):

$$(34)\quad \begin{cases} \varphi = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\sqrt{-(c_4\varrho^2 - c_1)(d_4\varrho^2 - d_1)}}{\sqrt{c_4 d_4}\,\varrho^2 + \sqrt{c_1 d_1}} \\ \quad - \tau_1\, \mathfrak{Ar} \dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}} \dfrac{\sqrt{-(c_4\varrho^2 - c_1)(d_4\varrho^2 - d_1)}}{c_4\varrho^2 - c_1} \sqrt[4]{\dfrac{c_1 d_4}{c_4 d_1}} + C \end{cases}$$

für das konjugierte Flächensystem des Ringsystems erster Art,

$$(35)\quad \begin{cases} \varphi = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\sqrt{-(c_4\varrho^2 - c_1)(d_4\varrho^2 - d_1)}}{\sqrt{c_4 d_4}\,\varrho^2 - \sqrt{c_1 d_1}} \\ \quad - \tau_2 \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\sqrt{-(c_4\varrho^2 - c_1)(d_4\varrho^2 - d_1)}}{c_4\varrho^2 - c_1} \sqrt[4]{\dfrac{c_1 d_4}{c_4 d_1}} + C \end{cases}$$

für das konjugierte Flächensystem des Ringsystems zweiter Art. Dabei ist

$$\tau_{1,2} = \frac{\sqrt{c_1 d_4} \mp \sqrt{c_4 d_1}}{\sqrt[4]{c_1 c_4 d_1 d_4}} \quad \text{und} \quad -\pi \leqq C < +\pi.$$

In der Gleichung (34) ist $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}$ oder $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}$ zu setzen, je nachdem

$$\sqrt{-\frac{d_4\varrho^2 - d_1}{c_4\varrho^2 - c_1}} \sqrt[4]{\frac{c_1 d_4}{c_4 d_1}} \gtrless 1.$$

Jedoch ist das Lösungssystem (34) als ein einziges System aufzufassen, da sich $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,z$ sowohl wie $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\,z$ für alle z gemeinsam durch $\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|$ ausdrücken lassen.

[16]) Das allgemeine Integral wird zur Ersparnis von Schreibarbeit nicht in der Form $(f - C_1)\,(f - C_2)$ geschrieben; doch geben alle folgenden Darstellungen immer zwei (reelle oder imaginäre) Regelscharen durch einen Kongruenzstrahl entsprechend den verschiedenen Vorzeichen von $\sqrt{-L_1 L_2}$.

Um die Gleichungen des Systems der „Trajektorregelscharen" des Ringsystems erster bzw. zweiter Art zu ermitteln, sind in die Gleichungen (34) und (35) die Linienkoordinaten wieder einzuführen. Mit

$$C = 2 \operatorname{arc\,tang} \sigma, \qquad -\infty \cdots \sigma \cdots +\infty$$

erhält man schließlich als Gleichung des zum Ringsystem erster Art konjugierten Systems von Regelscharen $\mathfrak{T}_1$:

$$(36)\quad \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2\sigma p_6 + (1-\sigma^2) p_5}{(1-\sigma^2) p_6 - 2\sigma p_5} - \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\sqrt{-L_1 L_2}}{\sqrt{c_4 d_4}\,p_1 - \sqrt{c_1 d_1}\,p_4} \\ \quad + \tau_1\, \mathfrak{Ar} \dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}} \dfrac{\sqrt{-L_1 L_2}}{L_1} \sqrt[4]{\dfrac{c_1 d_4}{c_4 d_1}} = 0 \end{cases}$$

und als Gleichung des zum Ringsystem zweiter Art konjugierten Systems von Regelscharen $\mathfrak{T}_2$:

$$(37)\quad \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2\sigma p_6 + (1-\sigma^2) p_5}{(1-\sigma^2) p_6 - 2\sigma p_5} - \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\sqrt{-L_1 L_2}}{\sqrt{c_4 d_4}\,p_1 + \sqrt{c_1 d_1}\,p_4} \\ \quad + \tau_2 \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\sqrt{-L_1 L_2}}{L_1} \sqrt[4]{\dfrac{c_1 d_4}{c_4 d_1}} = 0. \end{cases}$$

Die Trägerflächen des Systems $\mathfrak{T}_1$ mögen Trajektorflächen erster Art, diejenigen des Systems $\mathfrak{T}_2$ Trajektorflächen zweiter Art heißen. Sie bilden zwei Systeme transzendenter Regelflächen.

22. Die Diskriminantenfläche der Differentialgleichung (33) hat nach Nr. 10 (14) die Gleichung

$$\Delta(p_i) = 4 p_1^2 p_4^2 (\sqrt{c_4 d_4}\,p_1 \pm \sqrt{c_1 d_1}\,p_4)^2 (c_4 p_1 + c_1 p_4)(d_4 p_1 + d_1 p_4) = 0.$$

Die Diskriminantenfläche enthält also die beiden Paare konjugiert imaginärer Kongruenzstrahlenbüschel mit den Gleichungen $p_1 = 0$, $p_4 = 0$. Ihre beiden reellen Schnittstrahlen sind der Hauptstrahl der Kongruenz und der unendlichferne Kongruenzstrahl. Sie sind daher zwei isolierte Strahlen der Diskriminantenfläche. Ferner gehören die beiden Leitregelscharen $\mathfrak{H}_1^2$, $\mathfrak{H}_2^2$ zur Diskriminantenfläche. Sie sind der Ort der Rückkehrregelstrahlen für die Trajektorregelscharen erster bzw. zweiter Art. Schließlich gehört die durch die Gleichung

$$(38)\qquad \sqrt{c_4 d_4}\,p_1 \pm \sqrt{c_1 d_1}\,p_4 = 0$$

bestimmte (reelle oder imaginäre) Regelschar zweiter Ordnung der Diskriminantenfläche an. Sie stellt das singuläre Integral der

Differentialgleichung der Trajektorflächen erster bzw. zweiter Art dar. Zusammenfassend gilt also:

Zum System der Trajektorflächen erster Art gehört außer ∞^1 transzendenten Regelflächen eine reelle Strahlenfläche zweiten Grades O_1^2 als singuläre Integralfläche seiner Differentialgleichung. Dieselbe ist polarinvariant für die ∞^1 Flächen des Ringsystems erster Art. Zum System der Trajektorflächen zweiter Art gehört außer ∞^1 transzendenten Regelflächen eine imaginäre Regelfläche zweiten Grades O_2^2 mit reellem polarem Raum. Dieselbe ist polarinvariant für die ∞^1 Flächen des Ringsystems zweiter Art. Die Regelscharen der beiden Leitflächen werden von den Rückkehrregelstrahlen der Trajektorflächen erster und zweiter Art erfüllt.

23. Die Strahlenfläche O_1^2 ist zugleich Asymptotenfläche für die Trajektorflächen erster Art: Jede Trajektorfläche erster Art nähert sich der Fläche O_1^2 asymptotisch in unendlich vielen Umläufen. Der analytische Beweis hierfür ergibt sich nebst einigen anderen Sätzen nach Ermittlung der Gleichungen der Trajektorflächen in kartesischen Koordinaten x, y, z.

Die p_i seien rechtwinklige homogene Linienkoordinaten. Dann besteht zwischen den p_i und den kartesischen Koordinaten x, y, z eines räumlichen Koordinatensystems, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt der beiden konzentrischen Leitflächen H_1^2, H_2^2 zusammenfällt, der folgende Zusammenhang:

$$p_1 = -(x^2+y^2)\,k, \qquad p_4 = (1+z^2)\,k,$$
$$p_5 = -(x+yz)\,k, \qquad p_6 = (xz-y)\,k.$$

Dabei ist k ein willkürlicher Proportionalitätsfaktor. Die beiden Leitflächen haben dann die Gleichungen:

$$H_1^2\colon\ c_4(x^2+y^2) - c_1 z^2 - c_1 = 0,$$
$$H_2^2\colon\ d_4(x^2+y^2) - d_1 z^2 - d_1 = 0.$$

Die (reelle bzw. imaginäre) Fläche zweiten Grades O_1^2 bzw. O_2^2 hat die Gleichung:

$$\sqrt{c_4 d_4}\,(x^2+y^2) \mp \left(\sqrt{c_1 d_1}\,z^2 + \sqrt{c_1 d_1}\right) = 0. \tag{39}$$

Endlich ergibt sich als Gleichung der Trajektorflächen erster Art:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - \operatorname{arc\,tg}\frac{2\sigma z-(1-\sigma^2)}{(1-\sigma^2)z+2\sigma} \\ &- \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{[-c_4(x^2+y^2)+c_1(1+z^2)]\,[d_4(x^2+y^2)-d_1(1+z^2)]}}{\sqrt{c_4 d_4}\,(x^2+y^2)+\sqrt{c_1 d_1}\,(1+z^2)} \\ &+ \tau_1\,\mathfrak{Ar}\begin{matrix}\mathfrak{Tg}\\ \mathfrak{Ctg}\end{matrix}\frac{\sqrt{[-c_4(x^2+y^2)+c_1(1+z^2)]\,[d_4(x^2+y^2)-d_1(1+z^2)]}}{c_4(x^2+y^2)-c_1(1+z^2)}\sqrt[4]{\frac{c_1 d_4}{c_4 d_1}} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

als Gleichung der Trajektorflächen zweiter Art:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - \operatorname{arc\,tg}\frac{2\sigma z-(1-\sigma^2)}{(1-\sigma^2)z+2\sigma} \\ &- \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{[-c_4(x^2+y^2)+c_1(1+z^2)]\,[d_4(x^2+y^2)-d_1(1+z^2)]}}{\sqrt{c_4 d_4}\,(x^2+y^2)-\sqrt{c_1 d_1}\,(1+z^2)} \\ &+ \tau_2\,\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{[-c_4(x^2+y^2)+c_1(1+z^2)]\,[d_4(x^2+y^2)-d_1(1+z^2)]}}{c_4(x^2+y^2)-c_1(1+z^2)}\sqrt[4]{\frac{c_1 d_4}{c_4 d_1}} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Es werde nun im Raume das folgende System spezieller elliptischer Koordinaten eingeführt:

$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi, \quad z^2 = \frac{(\gamma-\lambda_1)(\gamma-\lambda_2)}{\gamma-\alpha}, \quad \varrho^2 = \frac{(\alpha-\lambda_1)(\alpha-\lambda_2)}{\alpha-\gamma}$$

Dabei werde α und γ so gewählt, daß das Hyperboloid O_1^2 zu den Koordinatenflächen gehört. Dann geht die Gleichung der Trajektorflächen erster Art (40) über in:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{[-c_4\varrho^2+c_1(1+z^2)]\,[d_4\varrho^2-d_1(1+z^2)]}}{\sqrt{c_4 d_4}\,\varrho^2+\sqrt{c_1 d_1}\,(1+z^2)}$$
$$- \tau_1\,\mathfrak{Ar}\begin{matrix}\mathfrak{Tg}\\ \mathfrak{Ctg}\end{matrix}\frac{\sqrt{[-c_4\varrho^2+c_1(1+z^2)]\,[d_4\varrho^2-d_1(1+z^2)]}}{c_4\varrho^2-c_1(1+z^2)}\sqrt[4]{\frac{c_1 d_4}{c_4 d_1}} + K$$

mit
$$-K = \operatorname{arc\,tg}\frac{2\sigma z-(1-\sigma^2)}{(1-\sigma^2)z+2\sigma},$$

und es folgt:

$$\lim\varphi = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,1 + \cdots = \infty$$

für $\varrho^2 \to \sqrt{\frac{c_1 d_1}{c_4 d_4}}\,(1+z^2)$.

Jede Trajektorfläche erster Art nähert sich also der Fläche O_1^2 asymptotisch in unendlich vielen Umläufen. Daher gilt:

Die Trajektorflächen erster Art haben die für die ∞^1 Flächen des Ringsystems erster Art polarinvariante reelle Strahlenfläche zweiten Grades zur Asymptotenfläche.

Die Asymptotenfläche O_1^2 trennt den Bereich, in dem in den Gleichungen (36) und (40) die Funktion $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}$ gilt („zwischen" O_1^2 und H_2^2) von dem Bereich, in dem $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}$ gilt (zwischen O_1^2 und H_1^2)[17]).

24. Wegen *arc tang* $i = i\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,1$ folgt weiter für die Trajektorflächen zweiter Art (Gleichung 41):

$$\lim \varphi = i\,\infty \quad \text{für} \quad \varrho^2 \to -\sqrt{\frac{c_1 d_1}{c_4 d_4}}\,(1+z^2). \tag{42}$$

Die beiden Leitregelscharen schneiden einander in den konjugiert imaginären Kongruenzstrahlen $p_5 = i p_6$, $p_1 = p_4 = 0$ und $p_5 = -i p_6$, $p_1 = p_4 = 0$. Diese beiden Strahlen und die beiden konjugiert imaginären windschiefen Leitgeraden der Kongruenz sind zugleich „Knotenstrahlen" für die imaginären Schalen der ∞^1 Trajektorflächen zweiter Art. Deren imaginäre Schalen können nach Gleichung (42) die imaginäre Fläche zweiten Grades O_2^2 nur in den Knotenstrahlen durchsetzen. Die Schar der imaginären Strahlen einer jeden Trajektorfläche zweiter Art wird also durch die Fläche O_2^2 derart in zwei Teile geteilt, daß man von dem einen Bereich in den anderen nur über die Knotenstrahlen gelangen kann, ohne die Trajektorfläche zu verlassen. Deshalb sei O_2^2 auch als „Grenzfläche" der imaginären Strahlen des Systems der Trajektorflächen zweiter Art bezeichnet.

25. Das oskulierende Hyperboloid K^2 längs eines Regelstrahls $\mathfrak{p}\,(p_k)$ einer Trajektorfläche erster bzw. zweiter Art wird durch den linearen Komplex

$$\left\{\begin{array}{l}(\chi_1+\lambda p_1)\,q_4+(\chi_2+\lambda p_2)\,q_5+(\chi_3+\lambda p_3)\,q_6\\ \qquad +\lambda p_4\,q_1+\lambda p_5\,q_2+\lambda p_6\,q_3=0\end{array}\right. \tag{43}$$

aus der elliptischen linearen Kongruenz ausgeschnitten. Unter Benutzung der Beziehungen Nr. 11 (15), (17)—(19) erhält man

[17]) Zur Definition des Bereichs in der elliptischen linearen Kongruenz vgl. Haenzel: Die Geometrie d. lin. Strahlenkongruenz II, Abschnitt IV, S. 179.

$$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{-L_1 L_2}\,(p_1 - p_4)}\,(2 c_4 d_4 p_1 + (c_1 d_4 + c_4 d_1) p_4).$$

Für $\lambda = 0$ ist der Strahl $\mathfrak{p}$ ein Wenderegelstrahl, K^2 ein oskulierendes Paraboloid. Also ist der Ort der reellen Wenderegelstrahlen der Trajektorflächen erster bzw. zweiter Art bestimmt durch

$$\mathfrak{W} = 2 c_4 d_4 p_1 + (c_1 d_4 + c_4 d_1) p_4 = 0. \tag{44}$$

In Worten:

Die beiden Systeme von Trajektorflächen erster und zweiter Art haben die Regelschar ein und desselben zu den Leitflächen konzentrischen reellen Strahlenhyperboloids W^2 als Ort ihrer (reellen) Wenderegelstrahlen.

26. Die Parallelkreise der drei konzentrischen rotatorischen Strahlenhyperboloide H_1^2, H_2^2, O_1^2 haben die Radien:

$$r_1 = \sqrt{\frac{c_1}{c_4}\,(1+z^2)}, \quad r_2 = \sqrt{\frac{d_1}{d_4}\,(1+z^2)}, \quad r_3 = \sqrt{r_1 r_2}.$$

Setzt man diese Größen in die Gleichungen (40) bzw. (41) ein, so erhalten die Schnittkurven der Trajektorflächen erster bzw. zweiter Art mit den Ebenen $z =$ konst. die Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{-(\varrho^2-r_1^2)(\varrho^2-r_2^2)}}{\varrho^2+r_1 r_2}\\ -\dfrac{r_1-r_2}{\sqrt{r_1 r_2}}\,\mathfrak{Ar}\begin{matrix}\mathfrak{Tg}\\ \mathfrak{Ctg}\end{matrix}\dfrac{\sqrt{-(\varrho^2-r_1^2)(\varrho^2-r_2^2)}}{\varrho^2-r_1^2}\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}+c,\end{array}\right\}\ 0 \leqq c < 2\pi. \tag{45}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{-(\varrho^2-r_1^2)(\varrho^2-r_2^2)}}{\varrho^2-r_1 r_2}\\ -\dfrac{r_1+r_2}{\sqrt{r_1 r_2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{-(\varrho^2-r_1^2)(\varrho^2-r_2^2)}}{\varrho^2-r_1^2}\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}+c\end{array}\right\}\ 0 \leqq c < 2\pi. \tag{46}$$

In Figur 1 und 2 stellen k_1^2, k_2^2 die Schnittkreise $z =$ konst. der Leitflächen H_1^2, H_2^2 dar. Die Flächen des Ringsystems haben zu Schnittkurven $z =$ konst. die Schar der Kreise, die k_1^2 und k_2^2 je ungleichartig oder gleichartig berühren. Die Gleichungen (45) und (46) stellen dann die Orthogonaltrajektorien dieser Kreisschar dar. Sie seien nach Haenzel kurz als „Kreistrajektorien" erster bzw. zweiter Art bezeichnet[18]). Es folgt:

[18]) Haenzel und Reutter: Die Geometrie d. linearen Strahlenkongruenz III, Abschn. II.

Bei einem Ringsystem mit zwei konzentrischen rotatorischen Leitflächen sind die Schnittkurven der Trajektorflächen erster bzw. zweiter Art senkrecht zur Drehachse Kreistrajektorien erster bzw. zweiter Art (Fig. 1 u. 2). Sie haben die Parallelkreise der Leitflächen als Ort der Spitzen und den Parallelkreis der Fläche W^2 als Ort der Wendepunkte. Die Schnittkurven der Trajektorflächen erster Art haben außerdem den Parallelkreis der Fläche O_1^2 zur Asymptotenkurve.

In Figur 1 ist o^2 der Schnittkreis der Fläche O_1^2. Faßt man für einen vorgegebenen Parameterwert σ in Gleichung (45) die zu verschiedenen Vorzeichen von $\sqrt{-L_1 L_2}$ gehörigen Schnittkurven t_1 zusammen, so ergibt sich, daß jede Trajektorfläche erster Art aus vier Schalen besteht. Die beiden einander längs eines Rückkehrregelstrahls auf der äußeren Leitfläche H_2^2 berührenden Flächenschalen winden sich unendlich oft von außen um die Asymptotenfläche und schneiden einander in unendlich vielen Doppelregelstrahlen; ferner besitzt jede Schale einen Wenderegelstrahl, der der Fläche W^2 angehört. Die beiden einander längs eines Rückkehrregelstrahls auf der inneren Leitfläche H_1^2 berührenden Flächenschalen winden sich unendlich oft von innen um die Asymptotenfläche, indem sie einander in ∞^1 Doppelregelstrahlen schneiden, dagegen besitzen sie keine Wenderegelstrahlen.

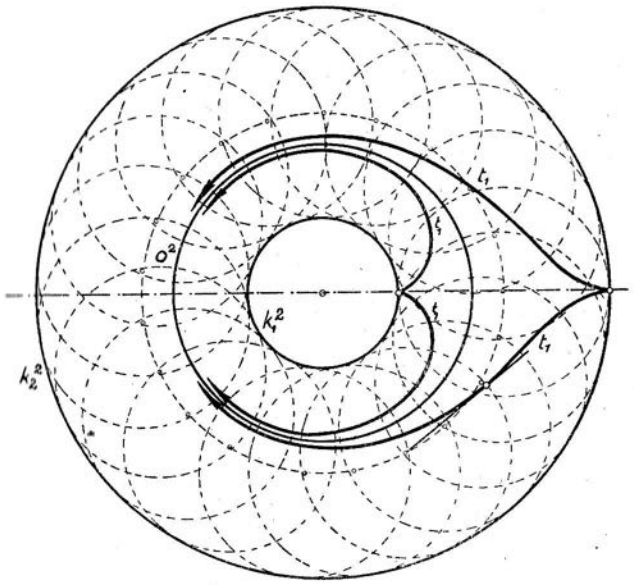
Sieht man die *arc tang*-Funktion als unendlich vieldeutig an, so besteht jede Trajektorfläche zweiter Art, wie man aus der in Figur 2 dargestellten Schnittkurve t_2 erkennt, aus unendlich vielen reellen Schalen und läuft im ganzen Ringgebiet zwischen H_1^2 und H_2^2 hin und her. Jede dieser Schalen berührt die vorhergehende und die folgende je längs eines Rückkehrregelstrahls; jede Schale besitzt einen der Fläche W^2 angehörigen Wenderegelstrahl[19]).

27. Die Gleichung des Systems der Trajektorflächen zweiter Art in der Form (41) wird durch eine Summe von *arc tang*-Funktionen allein gegeben, von denen eine mit dem Faktor

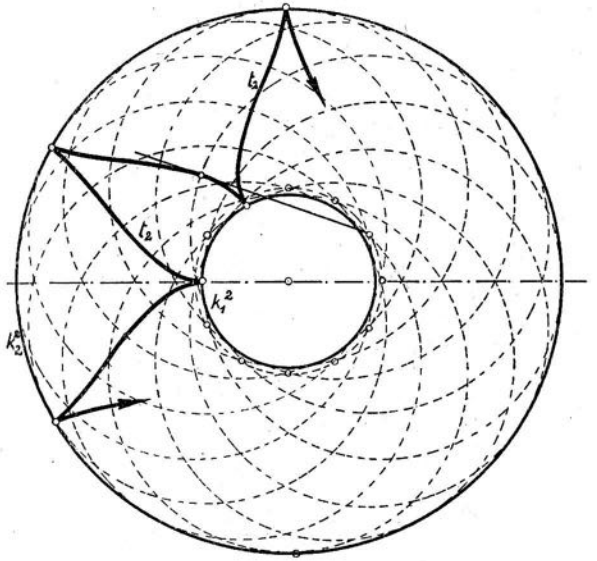
$$\tau_2 = \frac{\sqrt{c_1 d_4} + \sqrt{c_4 d_1}}{\sqrt[4]{c_1 c_4 d_1 d_4}}$$

behaftet ist. Ist τ_2 eine rationale Zahl, so lassen sich nach dem Additionstheorem der *arc tang*-Funktion die sämtlichen *arc tang*-

[19]) Haenzel u. Reutter: Die Geometrie d. lin. Strahlenkongruenz III, Abschn. II. Dort sind zahlreiche weitere Eigenschaften dieser Trajektorflächen angegeben. Außerdem enthält diese Abhandlung weitere Figuren.



Figur 1.



Figur 2.

Glieder zu einem einzigen zusammenfassen und die Gleichung des Flächensystems ergibt sich in der Form:

$$\text{arc tang } f(x,y,z,\sigma) = 0 \quad \text{oder} \quad g(x,y,z,\sigma) \doteq 0.$$

Die Trajektorflächen zweiter Art sind also für rationale τ_2 algebraische Flächen. Eine solche algebraische Trajektorfläche zweiter Art schließt sich nach einer endlichen Anzahl von Umläufen im Ringgebiet zwischen den beiden Leitflächen:

Wächst nämlich in der Gleichung (46) der Schnittkurven der Trajektorflächen zweiter Art der Radiusvektor ϱ von r_1 auf r_2 an, so gehört zu $\Delta\varrho = r_2 - r_1$:

$$\Delta\varphi = \frac{r_1+r_2}{\sqrt{r_1 r_2}}\{\text{arc tg}\,\infty - \text{arc tg}\,0\} - \pi = \frac{\pi}{2}\frac{r_1+r_2}{\sqrt{r_1 r_2}} - \pi.$$

Damit sich die Schnittkurve nach einer endlichen Anzahl von Umläufen schließe, muß gelten:

$$2n\,\Delta\varphi = 2m\pi$$

(n, m ganz, n = Anzahl der Spitzen auf einem Parallelkreis einer Leitfläche bei m Umläufen) oder

$$n\left(\pi\frac{r_1+r_2}{\sqrt{r_1 r_2}} - 2\pi\right) = 2m\pi.$$

Hieraus folgt als Schließungsbedingung:

$$2\frac{m}{n} = \frac{(\sqrt{r_1}-\sqrt{r_2})^2}{\sqrt{r_1 r_2}}$$

oder

$$\sqrt{\frac{r_1}{r_2}} = \sqrt[4]{\frac{c_1 d_4}{c_4 d_1}} = \frac{p}{q} = \text{rationale Zahl.} \tag{47}$$

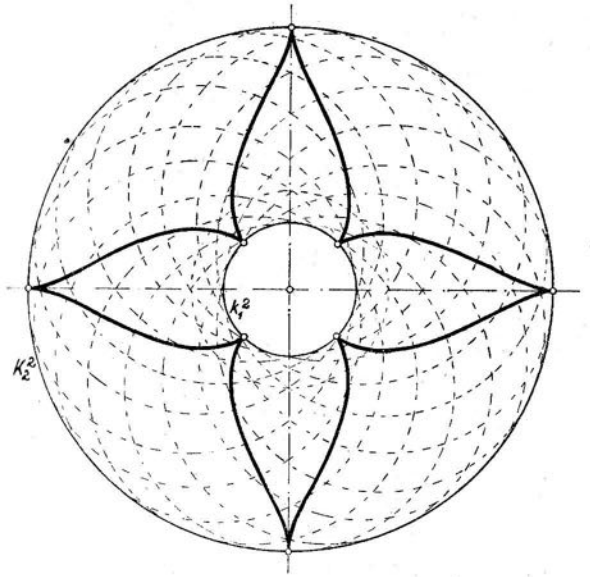
In Worten:

Die Trajektorflächen zweiter Art sind geschlossene algebraische Flächen, wenn die Koeffizienten der (koachsialen, rotatorischen) Leitflächen die Bedingung (47) erfüllen.

Mit $p=1$, $q=2$ ergibt Gleichung (47): $r_2 = 4r_1$ und $n = 4m$. Es gibt also algebraische Trajektorflächen zweiter Art, die sich nach einem Umlauf schließen. Eine Schnittkurve $z = \text{konst.}$ einer solchen Fläche ist in Figur 3 dargestellt. Die zugehörige Trajektorfläche besteht aus acht Schalen.

Es gibt abzählbar unendlich viele algebraische Trajektorflächen zweiter Art, die sich durch die Anzahl n ihrer Rückkehrregelstrahlen und die Anzahl m ihrer Umläufe bis zur Schließung unterscheiden, so daß

$$\frac{m}{n} = \frac{(g-1)^2}{2g}, \qquad g = 2, 3, 4, \ldots .$$



Figur 3.

28. Die analytische Diskussion der Trajektorflächen der übrigen Arten von nicht ausgearteten Ringsystemen in der elliptischen linearen Kongruenz hat folgendes Ergebnis:

Gegeben sei ein Ringsystem von Regelflächen zweiten Grades, dessen Leitflächen einander längs eines Regelstrahls $\mathfrak{p}$ berühren (Ringsystem dritter Art). Die ∞^1 Flächen des Ringsystems berühren die Leitflächen ungleichartig oder gleichartig, je nachdem die beiden Leitflächen einander einschließen oder ausschließen. Die beiden Fälle lassen sich durch eine reelle Kollineation ineinander überführen. Das System der zum Ringsystem dritter Art konju-

gierten Trajektorflächen dritter Art enthält außer ∞^1 transzendenten Regelflächen eine reelle Strahlenfläche zweiten Grades O^2 als singuläre Integralfläche seiner Differentialgleichung. Dieselbe ist für die ∞^1 Regelflächen des Ringsystems dritter Art polarinvariant. Sie teilt die Schar der reellen Regelstrahlen des Systems der Trajektorflächen dritter Art derart in zwei Teile, daß man von einem reellen Regelstrahl einer beliebigen Trajektorfläche im einen Bereich nur über den Strahl $\mathfrak{p}$ zu einem Strahle derselben Fläche im anderen Bereich gelangen kann, ohne die Trajektorfläche zu verlassen. Die Fläche O^2 sei daher als „Grenzfläche" des Systems bezeichnet. Die Regelscharen der beiden Leitflächen werden von den Rückkehrregelstrahlen der Trajektorflächen dritter Art erfüllt. Alle Trajektorflächen dritter Art des Systems berühren einander und die beiden Leitflächen längs des „Knotenstrahles" $\mathfrak{p}$[19]).

Die Regelscharen der beiden Leitflächen des Ringsystems dritter Art seien durch die Gleichungen

$$K_1 = c_2 p_5 + c_4 p_1 = 0 \quad \text{und} \quad K_2 = c_2 p_5 - c_4 p_1 = 0$$

gegeben. Sie berühren einander längs des Hauptstrahls $\mathfrak{h}$ der Kongruenz. Dann haben die ∞^1 Regelscharen des Systems der Trajektorflächen dritter Art die Gleichung:

$$(48)\quad c_2 p_6 + \lambda p_4 - \sqrt{K_1 K_2} + c_4 p_1 \operatorname{\mathfrak{Ar}}\operatorname{\mathfrak{Tg}} \frac{\sqrt{K_1 K_2}}{c_4 p_1} = 0, \quad -\infty \cdots \lambda \cdots +\infty.$$

Sie bilden einen Büschel transzendenter Regelscharen mit dem gemeinsamen Knoten- und Berührungsstrahle $\mathfrak{h}$.

29. Die beiden linearen Komplexe mit den Gleichungen

$$(49)\quad M_1 = p_1 + p_4 + 2 m p_5 = 0 \quad \text{und} \quad M_2 = p_1 + p_4 + \frac{2}{m} p_5 = 0$$

schneiden die elliptische lineare Kongruenz in den Regelscharen $\mathfrak{H}_1^2$ und $\mathfrak{H}_2^2$ zweier Strahlenhyperboloide H_1^2 und H_2^2. Dieselben haben zwei reelle Regelstrahlen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ gemeinsam mit den Koordinaten

$$p_1 = -1,\ p_2 = p_5 = 0,\ p_3 = p_4 = p_6 = +1 \quad \text{und}$$
$$p_1 = p_3 = p_6 = -1,\ p_2 = p_5 = 0,\ p_4 = +1.$$

Sie bestimmen je ein Ringsystem von Regelflächen zweiten Grades R_4' bzw. R_4'', dessen ∞^1 Flächen die Leitflächen H_1^2, H_2^2 je gleichartig bzw. ungleichartig berühren. Beide Ringsysteme sollen als Ringsysteme vierter Art bezeichnet werden. Dem Ringsystem R_4'

ist ein System von Trajektorflächen vierter Art T_4' mit der Gleichung

$$(50)\quad \left| \begin{array}{l} \operatorname{\mathfrak{Ar}}\operatorname{\mathfrak{Tg}} \dfrac{2 p_6 + \tau (p_1 - p_4)}{2 \tau p_6 + p_1 - p_4} + \operatorname{\mathfrak{Ar}}\operatorname{\mathfrak{Tg}} \dfrac{\sqrt{-M_1 M_2}\,\delta}{p_1 + p_4 - 2 p_5} \\ \qquad - a \operatorname{\mathfrak{Ar}}\operatorname{\mathfrak{Tg}} \dfrac{\sqrt{-M_1 M_2}\,\delta}{a (p_1 + p_4 - 2 p_5)} \end{array} \right.$$

konjugiert, dem Ringsystem R_4'' ein System von Trajektorflächen vierter Art T_4'' mit der Gleichung

$$(51)\quad \left| \begin{array}{l} \operatorname{\mathfrak{Ar}}\operatorname{\mathfrak{Tg}} \dfrac{2 p_6 + \tau (p_1 - p_4)}{2 \tau p_6 + (p_1 - p_4)} + \operatorname{\mathfrak{Ar}}\operatorname{\mathfrak{Tg}} \dfrac{\sqrt{M_1 M_2}\,\delta}{p_1 + p_4 + 2 p_5} \\ \qquad - \sqrt{1 - a^2} \operatorname{\mathfrak{Ar}}\operatorname{\mathfrak{Tg}} \dfrac{\sqrt{M_1 M_2}\,\delta}{\sqrt{1 - a^2}\,(p_1 + p_4 + 2 p_5)} = 0. \end{array} \right.$$

In beiden Gleichungen gilt $-1 < \tau < +1$,

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{2}\, \frac{1 - m}{\sqrt{1 + m^2}}, \qquad \delta = 1 - 2 a^2.$$

Durch die Gleichungen

$$O_1 = p_1 + 2 p_5 + p_4 = 0 \quad \text{und} \quad O_2 = p_1 - 2 p_5 + p_4 = 0$$

sind die Regelscharen zweier reeller Strahlenflächen zweiten Grades O_1^2 und O_2^2 bestimmt. Die Fläche O_1^2 ist für die ∞^1 Flächen des Ringsystems R_4' polarinvariant und gehört zum System der ∞^1 transzendenten Trajektorflächen vierter Art T_4' als singuläre Integralfläche seiner Differentialgleichung, sie ist dessen Grenzfläche. Die Fläche O_2^2 ist für die ∞^1 Flächen des Ringsystems R_4'' polarinvariant und gehört zum System der Trajektorflächen vierter Art T_4'' als singuläre Integralfläche seiner Differentialgleichung, sie ist dessen Grenzfläche.

Aus den Gleichungen (50) bzw. (51) erkennt man, daß für rationale Werte von a bzw. $\sqrt{1-a^2}$ die Trajektorflächen vierter Art des Systems T_4' bzw. T_4'' algebraische Flächen sind. In der rotatorischen elliptischen linearen Kongruenz sind die Leitflächen H_1^2, H_2^2 rotatorische Strahlenhyperboloide. Die Größe a findet dann ihre geometrische Deutung als *sin* des halben Schnittwinkels der Parallelkreise der Leitflächen.

Die Rechnung wurde der Einfachheit halber für die beiden durch die Gleichungen (49) bestimmten Leitflächen durchgeführt,

die zwei füreinander polarinvariante Strahlenflächen zweiten Grades als singuläre Integralflächen der beiden Systeme T_4' bzw. T_4'' bedingen. Doch gilt auch bei allgemeinem Ansatz für die Leitflächen der Satz:

Zwei einscharig in der elliptischen linearen Kongruenz enthaltene Strahlenflächen zweiten Grades H_1^2, H_2^2 mit zwei gemeinsamen reellen Regelstrahlen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ bestimmen zwei Ringsysteme von Regelflächen zweiten Grades R_4', R_4''. Die Regelstrahlen der Flächen des ersten Systems bestehen aus den Kongruenzstrahlen, die entweder beiden inneren Hyperboloidbereichen H_1^2, H_2^2 angehören[17]*) oder in dem gemeinsamen äußeren Bereiche der beiden Leitflächen liegen. Die Regelstrahlen der Flächen des zweiten Systems bestehen aus allen übrigen Kongruenzstrahlen. Jedem der beiden Ringsysteme ist ein System von ∞^1 i. a. transzendenten Trajektorflächen vierter Art konjugiert. Zu jedem System von Trajektorflächen vierter Art gehört eine reelle Strahlenfläche zweiten Grades O_1^2 im ersten System, O_2^2 im zweiten System, die für die ∞^1 Strahlenflächen zweiten Grades des konjugierten Ringsystems polarinvariant ist. Die ∞^1 Trajektorflächen des Systems T_4' und die ∞^1 Trajektorflächen des Systems T_4'' berühren einander jeweils längs der Regelstrahlen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ als Knotenstrahlen. Die Rückkehrregelstrahlen beider Systeme erfüllen die Regelscharen der beiden Leitflächen H_1^2, H_2^2*[19]*).*

30. Die eine Leitfläche eines Ringsystems sei in zwei Paare konjugiert imaginärer Strahlenbüschel mit einem reellen Doppelstrahl k zerfallen. Die andere sei eine einscharig in der Kongruenz enthaltene reelle Strahlenfläche zweiten Grades H^2 mit der Gleichung

$$L = c_1 p_4 + c_4 p_1 = 0\,, \qquad c_1 > 0\,,\ c_4 > 0\,.$$

Durch beide Leitflächen ist ein (entartetes) Ringsystem fünfter Art von ∞^1 einscharig in der Kongruenz enthaltenen Regelflächen zweiten Grades bestimmt. Diese ∞^1 Flächen berühren H^2 und gehen durch k. Läßt man den Strahl k mit dem Hauptstrahl der Kongruenz zusammenfallen, so haben die ∞^1 Regelscharen des Systems der zum Ringsystem fünfter Art konjugierten Trajektorflächen fünfter Art die Gleichung:

$$(52)\quad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{arc\,tg}\frac{(1-\sigma^2)\,p_5 + 2\sigma p_6}{(1-\sigma^2)\,p_6 - 2\sigma p_5} + \sqrt{\frac{-L}{c_4 p_1}} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{-L}{c_4 p_1}} = 0\,, \\ &\qquad\qquad -\infty \cdots \sigma \cdots +\infty\,. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichung der Trajektorflächen fünfter Art in kartesischen Koordinaten x, y, z lautet:

$$(53)\quad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - \operatorname{arc\,tg}\frac{2\sigma z - (1-\sigma^2)}{(1-\sigma^2)\,z + 2\sigma} + \sqrt{\frac{-c_4(x^2+y^2) + c_1(1+z^2)}{c_4(x^2+y^2)}} \\ &\qquad - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{-c_4(x^2+y^2) + c_1(1+z^2)}{c_4(x^2+y^2)}} = 0\,. \end{aligned} \right.$$

Führt man jetzt im Raume durch die Gleichungen

$$x = \varrho\cos\varphi\,, \quad y = \varrho\sin\varphi\,, \quad z = z$$

ein System von Zylinderkoordinaten ein, so wird die Gleichung der Trajektorflächen fünfter Art:

$$(54)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi = &-\frac{\sqrt{-c_4\varrho^2 + c_1(1+z^2)}}{\sqrt{c_4}\,\varrho} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{-c_4\varrho^2 + c_1(1+z^2)}}{\sqrt{c_4}\,\varrho} \\ &+ \operatorname{arc\,tg}\frac{2\sigma z - (1-\sigma^2)}{(1-\sigma^2)\,z + 2\sigma}\,. \end{aligned} \right.$$

In Figur 4 ist die Kurve t_4 der Schnitt einer Trajektorfläche fünfter Art (Gleichung 53) mit der Ebene $z = \text{konst.}$ Der Kreis k^2 ist der Schnittkreis der Bildebene mit der rotatorischen Leitfläche H^2, M der Schnittpunkt mit dem Strahle k.

Aus Gleichung (53) folgt ferner:

$$\lim_{\varrho \to 0} \varphi = \infty\,.$$

Daher gilt:

Die ∞^1 Trajektorflächen fünfter Art haben einen gemeinsamen asymptotischen Strahl k. Jede von ihnen besitzt einen Rückkehrregelstrahl. Die beiden von ihm ausgehenden Flächenschalen der Trajektorfläche umkreisen den asymptotischen Strahl in entgegengesetztem Umlaufsinne und schneiden einander dabei in ∞^1 Doppelregelstrahlen. Die Rückkehrregelstrahlen der ∞^1 Trajektorflächen fünfter Art erfüllen die in der Kongruenz enthaltene Regelschar der Leitfläche H^2[19]*).*

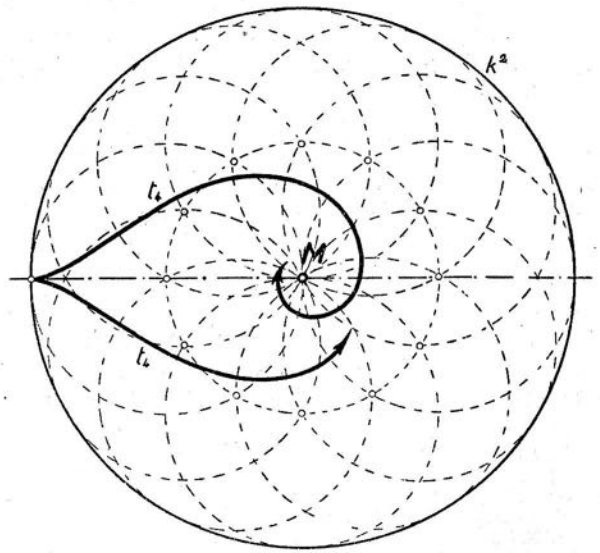
31. Die Ausdehnung der Ergebnisse von Nr. 19—30 hat nach zwei Richtungen zu erfolgen:

I. Die Gleichungen (26) der elliptischen linearen Kongruenz sind in der allgemeinen Normalform

$$p_2 - \frac{c}{m} p_5 = 0\,, \qquad p_3 - cm\,p_6 = 0$$

anzusetzen.

II. Durch eine Kollineation der Kongruenz in sich sind die beiden zunächst in spezieller Lage angenommenen Leitregelscharen des Ringsystems in zwei Leitregelscharen allgemeiner Lage zu verwandeln. Die Kollineationen der elliptischen linearen Kongruenz in sich führen konjugierte Systeme von Regelscharen in ebensolche über[20]). Die in Nr. 19—30 behandelten Eigenschaften der Trajektorflächen erster bis fünfter Art sind daher — abgesehen von



Figur 4.

Aussagen über Wenderegelstrahlen und die spezielle Gestalt der ebenen Schnittkurven — gegenüber reellen Kollineationen invariant und die Gleichungen der allgemeinen Trajektorflächen lassen sich unmittelbar angeben, indem man auf die Gleichungen in Nr. 19—30 die entsprechenden Substitutionen anwendet.

Außerdem gilt:

Die Trajektorflächen erster bis fünfter Art besitzen zwei konjugiert imaginäre windschiefe Leitgeraden.

[20]) Haenzel: Die Geometrie d. lin. Strahlenkongruenz II, Abschn. IV.

V. Die Trajektorflächen der hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz.

32. Die hyperbolische lineare Kongruenz sei durch die Gleichungen

$$p_2 - p_5 = 0, \qquad p_3 + p_6 = 0$$

gegeben. Zwei reelle konzentrische Regelscharen zweiter Ordnung der hyperbolischen Kongruenz, die sich in den reellen Regelstrahlen $p_5 = +p_6$, $p_1 = p_4 = 0$ und $p_5 = -p_6$, $p_1 = p_4 = 0$ schneiden, haben die Gleichungen

$$(55) \qquad L_1 = c_1 p_4 + c_4 p_1 = 0, \qquad L_2 = d_1 p_4 + d_4 p_1 = 0.$$

In Gleichung (55) müssen entweder c_4, d_4, c_1, d_1 vom gleichen Vorzeichen sein oder zugleich $sgn\, c_4 = -sgn\, c_1$, $sgn\, d_4 = -sgn\, d_1$[21]).

Die Trägerflächen H_1^2, H_2^2 der beiden Regelscharen $\mathfrak{H}_1^2$, $\mathfrak{H}_2^2$ sind die Leitflächen zweier Ringsysteme von Regelflächen zweiten Grades. Die ∞^1 Flächen des einen Ringsystems (Ringsystem sechster Art) berühren die Leitflächen je ungleichartig, die Gleichung ihrer ∞^1 Regelscharen ist:

$$(56) \qquad \begin{cases} \sqrt{c_1}\left(\sqrt{c_4 d_4}\, p_1 - \sqrt{c_1 d_1}\, p_4\right) - \left(\sqrt{c_1 d_4} + \sqrt{c_4 d_1}\right) \\ \quad \cdot\left[\sqrt{c_4}\,\lambda p_5 - \sqrt{\lambda^2 c_4 - c_1}\, p_6\right] = 0, \quad -\infty \cdots \lambda \cdots +\infty. \end{cases}$$

Die ∞^1 Flächen des anderen Ringsystems (Ringsystem siebenter Art) berühren die Leitflächen je gleichartig, die Gleichung ihrer ∞^1 Regelscharen ist:

$$(57) \qquad \begin{cases} \sqrt{c_1}\left(\sqrt{c_4 d_4}\, p_1 + \sqrt{c_1 d_1}\, p_4\right) - \left(\sqrt{c_1 d_4} - \sqrt{c_4 d_1}\right) \\ \quad \cdot\left[\sqrt{c_4}\,\lambda p_5 - \sqrt{\lambda^2 c_4 - c_1}\, p_6\right] = 0, \quad -\infty \cdots \lambda \cdots +\infty. \end{cases}$$

Ein gegebener Kongruenzstrahl $s(p_i)$ enthält zwei reelle oder imaginäre Flächen jedes der beiden Ringsysteme. Die Differentialgleichung der zu den Flächen der Ringsysteme konjugierten Trajektorflächen sechster und siebenter Art ist wie in Nr. 20 zu er-

[21]) Die Fälle $c_1, c_4 > 0$, $d_4 > 0$, $d_1 < 0$ und $d_1, d_4 > 0$, $c_4 > 0$, $c_1 < 0$ führen auf Ringsysteme mit komplexen Koeffizienten (imaginäre Flächen zweiten Grades mit imaginärem polarem Raume).

mitteln und zu integrieren. Sie bedingt ein doppeltes Richtungsfeld in der Kongruenz, ist also vom zweiten Grade. Setzt man

$$\Omega_1 = \sqrt{c_4 d_4}\, p_1 - \sqrt{c_1 d_1}\, p_4\,, \quad \Omega_2 = \sqrt{c_4 d_4}\, p_1 + \sqrt{c_1 d_1}\, p_4\,,$$

$$\tau_{1,2} = \frac{\sqrt{c_1 d_4} \mp \sqrt{c_4 d_1}}{\sqrt[4]{c_1 c_4 d_1 d_4}}\,,$$

so ist die Gleichung der ∞^1 Regelscharen des Systems der Trajektorflächen sechster Art gegeben durch

$$(58)\quad \left|\begin{array}{l} \mathfrak{Ar}\,\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\dfrac{2\nu p_6 + (1+\nu^2)\,p_5}{2\nu p_5 + (1+\nu^2)\,p_6} - \mathfrak{Ar}\,\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\dfrac{\sqrt{L_1 L_2}}{\Omega_1} \\ \qquad + \tau_1 \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{L_1 L_2}}{L_1}\sqrt[4]{\dfrac{c_1 d_4}{c_4 d_1}} = 0\,, \quad -1 < \nu < +1\,, \end{array}\right.$$

und diejenige der ∞^1 Regelscharen des Systems der Trajektorflächen siebenter Art durch

$$(59)\quad \left|\begin{array}{l} \mathfrak{Ar}\,\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\dfrac{2\nu p_6 + (1+\nu^2)\,p_5}{2\nu p_5 + (1+\nu^2)\,p_6} - \mathfrak{Ar}\,\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\dfrac{\sqrt{L_1 L_2}}{\Omega_2} \\ \qquad + \tau_2\,\mathfrak{Ar}\,\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\dfrac{\sqrt{L_1 L_2}}{L_1}\sqrt[4]{\dfrac{c_1 d_4}{c_4 d_1}} = 0\,, \quad -1 < \nu < +1\,. \end{array}\right.$$

In Gleichung (58) und (59) gilt jeweils im ersten und zweiten Glied $\mathfrak{Ar}\,\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}$ für $p_5 \lesseqgtr p_6$. Im dritten Glied von Gleichung (59) gilt $\mathfrak{Ar}\,\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}$, je nachdem $\dfrac{\sqrt{L_1 L_2}}{L_1}\sqrt[4]{\dfrac{c_1 d_4}{c_4 d_1}} \lesseqgtr 1$.

Die Diskriminantenfläche der Differentialgleichung dieser beiden Systeme hat die Gleichung:

$$\Delta'(p_i) = 4\,p_1^{\,2} p_4^{\,2}\left(\sqrt{c_4 d_4}\, p_1 \pm \sqrt{c_1 d_1}\, p_4\right)^2 (c_4 p_1 + c_1 p_4)\,(d_4 p_1 + d_1 p_4) = 0\,.$$

Durch die Gleichungen

$$O_1 = \sqrt{c_4 d_4}\, p_1 + \sqrt{c_1 d_1}\, p_4 = 0 \quad \text{und} \quad O_2 = \sqrt{c_4 d_4}\, p_1 - \sqrt{c_1 d_1}\, p_4 = 0$$

wird je eine zu den Leitregelscharen konzentrische reelle Regelschar zweiter Ordnung der hyperbolischen linearen Kongruenz bestimmt. Deren Trägerflächen O_1^2 bzw. O_2^2 sind singuläre Integralflächen der Differentialgleichung der Trajektorflächen sechster bzw. siebenter Art. Die Regelscharen der beiden Leitflächen bestehen

wiederum aus den Rückkehrregelstrahlen der beiden Systeme von Trajektorflächen. Es folgt:

Zum System der Trajektorflächen sechster bzw. siebenter Art gehört außer ∞^1 transzendenten Regelflächen je eine reelle Strahlenfläche zweiten Grades als singuläre Integralfläche seiner Differentialgleichung. Dieselbe ist polarinvariant für die ∞^1 Flächen des Ringsystems sechster bzw. siebenter Art. Die Regelscharen der beiden Leitflächen werden von den Rückkehrregelstrahlen der ∞^1 Trajektorflächen sechster und siebenter Art erfüllt.

Eine Trajektorfläche sechster Art besteht aus unendlich vielen reellen Flächenschalen, die einander paarweise längs eines Rückkehrregelstrahls berühren. Daher besitzt jede Trajektorfläche sechster Art ∞^1 Rückkehrregelstrahlen, die abwechselnd auf H_1^2 und H_2^2 liegen.

Für den hier analytisch behandelten Fall zweier konzentrischer Leitflächen ergibt die Untersuchung der Diskriminantenfläche ferner: Durch die Gleichungen $p_1 = 0$, $p_4 = 0$ sind zwei Paare reeller Kongruenzstrahlenbüschel erster Ordnung bestimmt, die ebenfalls der Diskriminantenfläche angehören. Den Strahlen des ersten Paars ist der Hauptstrahl der Kongruenz gemeinsam. Das zweite Paar ist identisch mit den beiden Parallelstrahlenbüscheln der Kongruenz, denen der unendlichferne Kongruenzstrahl gemeinsam ist. Beide Paare enthalten außerdem die beiden den Leitflächen gemeinsamen Regelstrahlen als Knotenstrahlen des Systems der Integralregelscharen.

33. In kartesischen Koordinaten x, y, z lautet die Gleichung der Trajektorflächen sechster Art:

$$(60)\quad \left|\begin{array}{l} \mathfrak{Ar}\,\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\dfrac{y}{x} - \mathfrak{Ar}\,\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\dfrac{2\nu z + (1+\nu^2)}{(1+\nu^2)\,z + 2\nu} \\ - \mathfrak{Ar}\,\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\,\dfrac{\sqrt{[c_4(y^2-x^2)+c_1(1-z^2)]\,[d_4(y^2-x^2)+d_1(1-z^2)]}}{\sqrt{c_4 d_4}\,(y^2-x^2) - \sqrt{c_1 d_1}\,(1-z^2)} \\ + \tau_1 \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{[c_4(y^2-x^2)+c_1(1-z^2)]\,[d_4(y^2-x^2)+d_1(1-z^2)]}}{c_4(y^2-x^2)+c_1(1-z^2)}\sqrt[4]{\dfrac{c_1 d_4}{c_4 d_1}} = 0\,, \end{array}\right.$$

diejenige der Trajektorflächen siebenter Art:

$$(61)\quad \left|\begin{array}{l} \mathfrak{Ar}\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\dfrac{y}{x}-\mathfrak{Ar}\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\dfrac{2\nu z+(1+\nu^2)}{(1+\nu^2)z+2\nu} \\ -\mathfrak{Ar}\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\dfrac{\sqrt{[c_4(y^2-x^2)+c_1(1-z^2)]\,[d_4(y^2-x^2)+d_1(1-z^2)]}}{\sqrt{c_4 d_4}(y^2-x^2)+\sqrt{c_1 d_1}(1-z^2)} \\ +\tau_2\,\mathfrak{Ar}\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\dfrac{\sqrt{[c_4(y^2-x^2)+c_1(1-z^2)]\,[d_4(y^2-x^2)+d_1(1-z^2)]}}{c_4(y^2-x^2)+c_1(1-z^2)}\sqrt[4]{\dfrac{c_1 d_4}{c_4 d_1}}=0. \end{array}\right.$$

(In den Gleichungen (60) u. (61) gilt im zweiten Gliede $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}$ oder $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}$ je nachdem $|z|\gtrless 1$).

Deren Schnittkurven mit den Ebenen $z=\text{konst.}$ haben mit $x=\varrho\,\mathfrak{Sin}\,t$, $y=\varrho\,\mathfrak{Cof}\,t$ für $y\gtrless x$, $|z|\gtrless 1$ und $x=\varrho\,\mathfrak{Cof}\,t$, $y=\varrho\,\mathfrak{Sin}\,t$ für $y\lesseqgtr x$, $|z|\lesseqgtr 1$ die Gleichungen

$$(60\,a)\quad \left|\begin{array}{l} t=\mathfrak{Ar}\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\dfrac{\sqrt{[c_4\varrho^2+c_1(1-z^2)]\,[d_4\varrho^2+d_1(1-z^2)]}}{\sqrt{c_4 d_4}\,\varrho^2-\sqrt{c_1 d_1}(1-z^2)} \\ -\tau_1\,\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{[c_4\varrho^2+c_1(1-z^2)]\,[d_4\varrho^2+d_1(1-z^2)]}}{c_4\varrho^2+c_1(1-z^2)}\sqrt[4]{\dfrac{c_1 d_4}{c_4 d_1}}+c, \\ \qquad\qquad -\infty\cdots c\cdots+\infty\,, \end{array}\right.$$

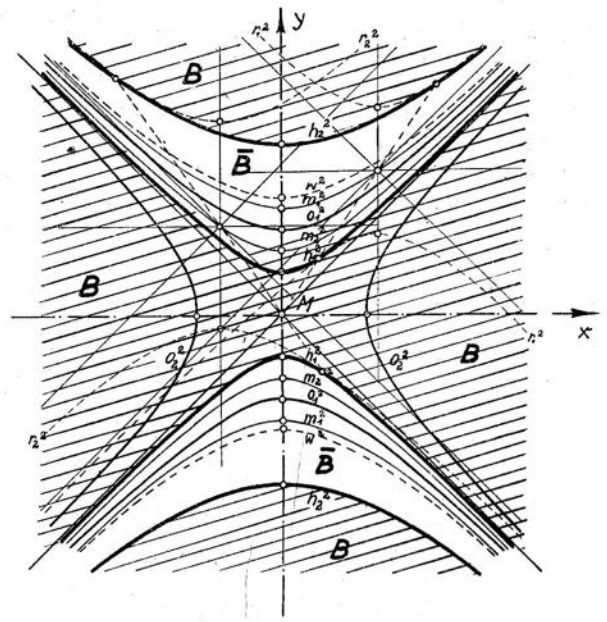
$$(61\,a)\quad \left|\begin{array}{l} t=\mathfrak{Ar}\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\dfrac{\sqrt{[c_4\varrho^2+c_1(1-z^2)]\,[d_4\varrho^2+d_1(1-z^2)]}}{\sqrt{c_4 d_4}\,\varrho^2+\sqrt{c_1 d_1}(1-z^2)} \\ -\tau_2\,\mathfrak{Ar}\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\dfrac{\sqrt{[c_4\varrho^2+c_1(1-z^2)]\,[d_4\varrho^2+d_1(1-z^2)]}}{c_4\varrho^2+c_1(1-z^2)}\sqrt[4]{\dfrac{c_1 d_4}{c_4 d_1}}+c, \\ \qquad\qquad -\infty\cdots c\cdots+\infty\,. \end{array}\right.$$

Die Darstellungen (60), (61) und (60 a), (61 a) versagen für die Punkte der Ebenen $y=\pm x$ und $z=\pm 1$. Diese tragen die beiden Paare von Kongruenzstrahlenbüscheln, die der Diskriminantenfläche angehören. Die Schnittkurven der Flächen O_1^2 und O_2^2 mit den Ebenen $z=\text{konst.}$ $(z\neq\pm 1)$ sind die Hyperbeln mit den Gleichungen:

$$\sqrt{c_4 d_4}(y^2-x^2)+\sqrt{c_1 d_1}(1-z^2)=0\,,$$

$$\sqrt{c_4 d_4}(y^2-x^2)-\sqrt{c_1 d_1}(1-z^2)=0\,.$$

Figur 5 gibt einen Schnitt senkrecht zur z-Achse durch die Ringsysteme sechster und siebenter Art, R_6 und R_7, wieder. Die Hyperbeln h_1^2, h_2^2 sind die Schnittkurven der Leitflächen H_1^2, H_2^2. Die reellen Flächen der beiden Ringsysteme erfüllen den Bereich $\mathfrak{B}$, der mit der Bildebene den Bereich B gemeinsam hat. Die Mittelpunktsorte ihrer Schnittkurven sind die Hyperbeln m_1^2 (R_6) und m_2^2 (R_7). Die Hyperbel r_1^2 ist der Schnitt einer Fläche des Systems



Figur 5.

R_6, die Hyperbel r_2^2 ist der Schnitt einer Fläche des Systems R_7. Die reellen transzendenten Trajektorflächen sechster und siebenter Art erfüllen gleichfalls den Bereich $\mathfrak{B}$, während im Bereiche $\overline{\mathfrak{B}}$ (Bildbereich $\overline{B}$) zwischen den Leitflächen keine reellen Flächenschalen der Trajektorflächen liegen. Dagegen gehört die singuläre Integralfläche O_1^2 des Systems der Trajektorflächen sechster Art dem Bereiche $\overline{\mathfrak{B}}$ an, denn ihre Schnittkurve (die Hyperbel o_1^2) liegt im Bereiche $\overline{B}$ der Figur 5.

Geht jetzt in den Gleichungen (60a) bzw. (61a)

$$\varrho^2 \to \mp \sqrt{\frac{c_1 d_1}{c_4 d_4}}\,(1 - z^2),$$

d. h. nähert man sich den Schnittkurven von O_1^2, O_2^2, so ergibt sich:

a) $\lim t = i\infty$ für $\varrho^2 \to -\sqrt{\frac{c_1 d_1}{c_4 d_4}}\,(1 - z^2)$,

b) $\lim t = \infty$ für $\varrho^2 \to \sqrt{\frac{c_1 d_1}{c_4 d_4}}\,(1 - z^2)$.

Da die Leitflächen unter sich und mit den Flächen des Ringsystems keine imaginären Regelstrahlen gemeinsam haben, kann man aus a) auf asymptotische Annäherung schließen; b) sagt dagegen aus, daß die Regelfläche O_2^2 mit den Trajektorflächen zweiter Art außer $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ und den Leitgeraden der Kongruenz (als Knotenstrahlen) keine Strahlen gemeinsam hat. Unter Verwendung des in Nr. 28 erklärten Begriffs der Grenzfläche folgt deshalb:

Die ∞^1 Trajektorflächen sechster Art haben die reelle Strahlenfläche zweiten Grades O_1^2 zur Asymptotenfläche ihrer imaginären Flächenschalen[19]*), die ∞^1 Trajektorflächen siebenter Art haben die reelle Strahlenfläche zweiten Grades O_2^2 zur Grenzfläche.*

34. Für den hier analytisch behandelten Fall eines Ringsystems mit konzentrischen einscharig der orthogonalen hyperbolischen Kongruenz angehörigen Leitflächen folgt durch Vergleich der Gleichungen (60a), (61a) mit den Gleichungen (45), (46): Man erhält die Schnittkurven der Trajektorflächen sechster bzw. siebenter Art senkrecht zu dem in der Kongruenz enthaltenen Durchmesser der Leitflächen, indem man die Kreistrajektorien erster bzw. zweiter Art der imaginären Kollineation $y' = y$, $x' = ix$ unterwirft. (Die Trajektorflächen erster und zweiter Art sind durch eine imaginäre Kollineation in die Trajektorflächen sechster und siebenter Art überführbar.)

Ist in der Gleichung (59) τ_2 eine rationale Zahl, so sind die Trajektorflächen siebenter Art algebraische Flächen. Eine Schließungsbedingung wie bei der algebraischen Trajektorfläche zweiter Art (Nr. 27) wird aber hier nicht erfüllt, weil $\mathfrak{Tg}$ im reellen keine periodische Funktion ist.

Die Trajektorflächen sechster und siebenter Art besitzen nur konjugiert imaginäre windschiefe Wenderegelstrahlen. Deren geometrischer Ort ist eine reelle Strahlenfläche zweiten Grades W^2

im Bereiche $\overline{\mathfrak{B}}$ zwischen den beiden Leitflächen. Ihre in der Kongruenz enthaltene Regelschar hat die Gleichung:

$$\mathfrak{W} = 2 c_4 d_4 p_1 + (c_1 d_4 + c_4 d_1) p_4 = 0.$$

35. Ferner liegen einscharig in der hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz:

a) Ringsysteme achter Art, deren Leitflächen einander längs eines Regelstrahls $\mathfrak{p}$ berühren,

b) Ringsysteme neunter Art, deren Leitflächen zwei konjugiert imaginäre windschiefe Regelstrahlen gemeinsam haben.

Das System der zum Ringsystem achter Art konjugierten Trajektorflächen achter Art enthält außer ∞^1 transzendenten Regelflächen eine reelle Strahlenfläche zweiten Grades O^2 als singuläre Integralfläche seiner Differentialgleichung. Dieselbe ist für die ∞^1 Flächen des Ringsystems achter Art polarinvariant und ist Grenzfläche der imaginären Strahlen der Trajektorflächen achter Art. Die Trajektorflächen achter Art sind transzendent.

Die Regelscharen der beiden Leitflächen des Ringsystems achter Art seien durch die Gleichungen

$$K_1 = c_2 p_5 + c_4 p_1 = 0, \qquad K_2 = c_2 p_5 - c_4 p_1 = 0$$

gegeben. Sie berühren einander längs des Hauptstrahls $\mathfrak{h}$ der Kongruenz. Die Gleichung der ∞^1 Regelscharen des Systems der Trajektorflächen achter Art ist dann

$$c_2 p_6 + \mu p_4 - \sqrt{-K_1 K_2} + c_4 p_1 \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{-K_1 K_2}}{c_4 p_1} = 0, \qquad -\infty \cdots \mu \cdots +\infty. \tag{62}$$

Dieselben bilden ein Büschel transzendenter Regelscharen mit dem gemeinsamen Knoten- und Berührstrahl $\mathfrak{h}$. Ihre Rückkehrregelstrahlen erfüllen die Regelscharen der beiden Leitflächen des Ringsystems[19]).

Es gibt zwei Ringsysteme neunter Art in der hyperbolischen linearen Kongruenz. Die ∞^1 Flächen des einen Systems R_9' berühren die Leitflächen gleichartig, die ∞^1 Flächen des anderen Systems R_9'' berühren die Leitflächen ungleichartig. Seien

$$M_1 = p_1 + p_4 + 2cp_5 = 0, \qquad M_2 = p_1 + p_4 + \frac{2}{c} p_5 = 0$$

die Gleichungen der Regelscharen der beiden Leitflächen des Ringsystems neunter Art. Dann haben die ∞^1 Regelscharen der beiden

Systeme von Trajektorflächen neunter Art T_9' und T_9'' die Gleichungen:

$$(63)\quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{arc\,tg}\dfrac{2p_6+\lambda(p_1-p_4)}{p_1-p_4-2\lambda p_6}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{M_1M_2}\,\delta}{p_1+p_4-2p_5} \\ \qquad -a\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{M_1M_2}\,\delta}{a(p_1+p_4-2p_5)}=0\,, \\ \operatorname{arc\,tg}\dfrac{2p_6+\lambda(p_1-p_4)}{p_1-p_4-2\lambda p_6}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{-M_1M_2}\,\delta}{p_1+p_4+2p_5} \\ -\sqrt{1-a^2}\cdot\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{-M_1M_2}\,\delta}{\sqrt{1-a^2}\,(p_1+p_4+2p_5)}=0 \end{array}\right\} -\infty\cdots\lambda\cdots+\infty\,.$$

mit $\qquad \delta=1-2a^2, \quad a=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\dfrac{1-c}{\sqrt{1+c^2}}.$

Durch die Gleichungen

$$O_1=p_1+2p_5+p_4=0, \qquad O_2=p_1-2p_5+p_4=0$$

sind die in der Kongruenz enthaltenen Regelscharen zweier reeller Strahlenflächen zweiten Grades O_1^2, O_2^2 bestimmt. Die Fläche O_1^2 ist für die ∞^1 Flächen des Ringsystems R_9' polarinvariant und gehört zum System der Trajektorflächen neunter Art T_9' als singuläre Integralfläche seiner Differentialgleichung; sie ist Grenzfläche seiner imaginären Regelstrahlen. Die Fläche O_2^2 ist für die ∞^1 Flächen des Ringsystems R_9'' polarinvariant und gehört zum System der Trajektorflächen neunter Art T_9'' als singuläre Integralfläche seiner Differentialgleichung; sie ist Grenzfläche seiner imaginären Regelstrahlen. Die Regelscharen der beiden Leitflächen werden von den Rückkehrregelstrahlen beider Systeme von Trajektorflächen neunter Art erfüllt. Die Flächen des Systems T_9' sind für rationale Werte von a, die des Systems T_9'' für rationale Werte von $\sqrt{1-a^2}$ algebraische Trajektorflächen neunter Art[19]).

36. Es sei jetzt eine der Leitflächen in zwei Paare reeller Strahlenbüschel $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ mit einem Doppelstrahl k zerfallen. Die andere sei eine reelle einscharig in der Kongruenz enthaltene Strahlenfläche zweiten Grades mit der Gleichung

$$L=c_1p_4+c_4p_1=0\,.$$

Durch beide Leitflächen ist ein (entartetes) Ringsystem zehnter Art von ∞^1 Regelflächen zweiten Grades bestimmt, die alle H^2 berühren und durch k gehen. Läßt man den Strahl k mit dem Hauptstrahl $\mathfrak{h}$ der Kongruenz zusammenfallen, so haben die ∞^1 Regelscharen des Systems der Trajektorflächen zehnter Art die Gleichung:

$$(64)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{Ar}\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\dfrac{(1+\sigma^2)p_5+2\sigma p_6}{(1+\sigma^2)p_6+2\sigma p_5} \\ +\sqrt{\dfrac{L}{c_4p_1}}-\mathfrak{Ar}\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\sqrt{\dfrac{L}{c_4p_1}}=0\,, \quad -1<\sigma<+1\,. \end{array}\right.$$

Im ersten Glied ist zu setzen $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}$ für $p_5<p_6$, $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}$ für $p_5>p_6$, im dritten Glied $\mathfrak{Ar}\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}$ je nachdem $c_4p_1\gtrless L$. Die Gleichung der Trajektorflächen zehnter Art in kartesischen Koordinaten ist:

$$(64a)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{Ar}\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\dfrac{y}{x}-\mathfrak{Ar}\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\dfrac{2\sigma z+(1+\sigma^2)}{(1+\sigma^2)z+2\sigma}+\sqrt{\dfrac{c_4(y^2-x^2)+c_1(1-z^2)}{c_4(y^2-x^2)}} \\ \qquad -\mathfrak{Ar}\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\sqrt{\dfrac{c_4(y^2-x^2)+c_1(1-z^2)}{c_4(y^2-x^2)}}=0\,. \end{array}\right.$$

Dabei gilt im zweiten Gliede $\mathfrak{Ar}\dfrac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}$ je nachdem $|z|\gtrless 1$.

Mit $x=\varrho\dfrac{\mathfrak{Sin}\,t}{\mathfrak{Cof}\,t}$, $y=\varrho\dfrac{\mathfrak{Cof}\,t}{\mathfrak{Sin}\,t}$ folgt für die Gleichung der Schnittkurven der Trajektorflächen zehnter Art mit den Ebenen $z=$ konst.:

$$(64b)\quad t=-\sqrt{\frac{c_4\varrho^2+c_1(1-z^2)}{c_4\varrho^2}}+\mathfrak{Ar}\frac{\mathfrak{Tg}}{\mathfrak{Ctg}}\sqrt{\frac{c_4\varrho^2+c_1(1-z^2)}{c_4\varrho^2}}+c\,, \qquad -\infty\cdots c\cdots+\infty\,.$$

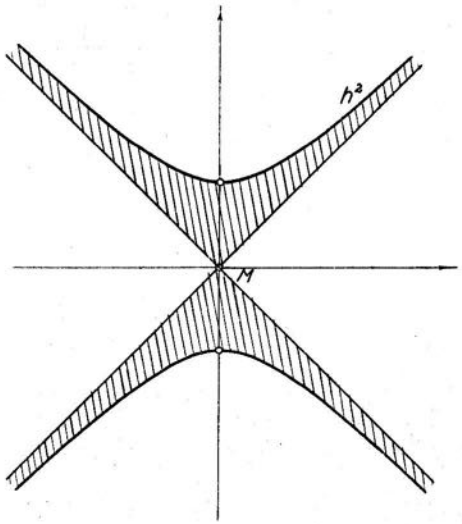
In Figur 6 ist die Hyperbel h^2 der Schnitt der Leitfläche H^2; die Trägerebenen E_1, E_2 der beiden Paare von Strahlenbüscheln $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ schneiden die Bildebene in den Asymptoten dieser Hyperbel. Im schraffierten Bereich liegen keine reellen Schnittkurven des Ringsystems und der Trajektorflächen zehnter Art. Für $|z|>1$ verlaufen die Trajektorflächen im Innern des Hyperboloids H^2 und in einem der von E_1, E_2 umschlossenen Winkelbereiche ω, für $|z|<1$ aber im Äußern des Hyperboloids H^2 und in dem zu ω komplementären Winkelbereich von E_1, E_2. Für die in einem der Winkelbereiche liegenden Punkte gilt im dritten Glied der Glei-

chungen (64), (64a), (64b) Ar Tang. Aus der Gleichung (64b) ergibt sich ferner:

$$\lim_{\varrho^2 \to +0} t(|z|>1) = \lim_{\varrho^2 \to -0} t(|z|<1) = i\infty .$$

Daher folgt:

Die ∞^1 transzendenten Trajektorflächen zehnter Art haben den Strahl k zum gemeinsamen asymptotischen Strahl ihrer imaginären Flächenschalen. Ihre Rückkehrregelstrahlen erfüllen die in der Kongruenz enthaltene Regelschar der Leitfläche H^2[19]).



Figur 6.

37. Die in Nr. 32—36 behandelten Eigenschaften der Trajektorflächen der hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz sind — abgesehen von Aussagen über Wenderegelstrahlen und die spezielle Gestalt der Schnittkurven — gegenüber Kollineationen der Kongruenz in sich invariant, die angeführten Sätze gelten also insbesondere bei allgemeiner Lage der Leitflächen des Ringsystems. Ferner gilt:

Die Trajektorflächen sechster bis zehnter Art besitzen zwei reelle Leitgeraden.

38. In der parabolischen Kongruenz gibt es weder Ringsysteme noch Trajektorflächen. Denn alle Regelscharen zweiter Ordnung der parabolischen linearen Kongruenz berühren einander ohnehin längs der vereinigten Leitgeraden der Kongruenz. Sodann ist auch der Begriff der konjugierten Richtung in der parabolischen linearen Kongruenz ausgeartet (Nr. 17).

Beschränkt man sich daher auf reelle Ringsysteme, so ergeben die vorstehenden Untersuchungen eine vollständige Klassifikation der Systeme ihrer Trajektorflächen nach der im Anhang beigefügten Tabelle.

VI. Berührungstransformationen in der Liniengeometrie, insbesondere in der linearen Strahlenkongruenz.

39. Von einem Strahle $\mathfrak{p}(p_k)$ einer (algebraischen oder transzendenten) Strahlenkongruenz $\mathfrak{C}$ mit den Gleichungen

$$F_1(p_k) = 0 , \qquad F_2(p_k) = 0$$

gehen ∞^1 in der Kongruenz enthaltene Fortschreitungsrichtungen aus. Die Kongruenz werde in der Umgebung des Strahles $\mathfrak{p}(p_k)$ durch die lineare Berührkongruenz mit den Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{\partial F_1}{\partial p_i} q_i = 0 , \qquad \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial F_2}{\partial p_i} q_i = 0 \tag{65}$$

ersetzt. Dann lassen sich die ∞^1 von $\mathfrak{p}$ ausgehenden Fortschreitungsrichtungen kennzeichnen durch die ∞^1 Büschel sich längs $\mathfrak{p}$ berührender Regelscharen zweiter Ordnung der linearen Berührkongruenz. Die Gleichung eines solchen Berührungsbüschels ist zusammen mit den Gleichungen (65) gegeben durch:

$$\sum_{i=1}^{6} (\varphi_{i+3} + \lambda p_{i+3}) q_i = 0 , \qquad -\infty \cdots \lambda \cdots +\infty , \tag{66}$$

wobei die Größen φ_i die drei Beziehungen

$$\sum_{i=1}^{6} \varphi_{i+3} p_i = 0 , \qquad \sum_{i=1}^{6} \varphi_i \frac{\partial F_1}{\partial p_i} = 0 , \qquad \sum_{i=1}^{6} \varphi_i \frac{\partial F_2}{\partial p_i} = 0 \tag{67}$$

erfüllen müssen, die Großen p_i die drei Beziehungen

$$\sum_{i=1}^{6} p_{i+3} p_i = 0\,, \qquad \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial F_1}{\partial p_i} p_i = 0\,, \qquad \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial F_2}{\partial p_i} p_i = 0\,.$$

Unter einem „Streifenelement" in der Kongruenz $\mathfrak{S}$ wollen wir den Inbegriff eines Kongruenzstrahles $\mathfrak{p}\,(p_k)$ und einer von ihm ausgehenden Fortschreitungsrichtung in der Kongruenz verstehen; ein solches Streifenelement ist bestimmt durch die Angabe der zwölf den Bedingungen (67) unterworfenen Größen φ_i, p_i in der Gleichung (66). Die Größen φ_i, p_i können daher als Koordinaten des Streifenelementes dienen. Der Kongruenzstrahl $\mathfrak{p}$ heiße der Träger des Streifenelementes. Die ∞^1 Streifenelemente mit dem Kongruenzstrahl $\mathfrak{p}$ als Träger bilden einen „Elementverein erster Stufe" $\mathfrak{p}_1\,(p_i, \varphi_i)$ in der Kongruenz; ebenso bilden die ∞^1 Streifenelemente, deren Trägerstrahlen eine Regelschar $\mathfrak{R}$ der Kongruenz erfüllen, einen Elementverein erster Stufe $\mathfrak{R}_1\ (p_i, \varphi_i)$.

Ein gegebener (algebraischer oder transzendenter) Strahlenkomplex Γ habe die Gleichung

$$F(p_k) = 0\,.$$

Er werde im Strahle $\mathfrak{p}\,(p_k)$ durch den linearen Berührkomplex $\mathfrak{B}$ mit der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{\partial F}{\partial p_i} q_i = 0 \tag{68}$$

ersetzt. Durch den Strahl $\mathfrak{p}$ gehen ∞^3 lineare Kongruenzen, die dem Berührkomplex $\mathfrak{B}$ angehören. Sie lassen sich auf ∞^2 Büschel einander längs $\mathfrak{p}$ berührender linearer Kongruenzen verteilen. Der Inbegriff eines Kongruenzstrahles $\mathfrak{p}$ und eines solchen Büschels linearer Berührkongruenzen werde ein im Komplex Γ enthaltenes „Kongruenzelement" genannt. Der Büschel der linearen Berührkongruenzen hat die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{6} (\varphi_{i+3} + \lambda p_{i+3})\, q_i = 0\,, \qquad -\infty \cdots \lambda \cdots +\infty\,, \tag{69}$$

wobei die Größen φ_i die Beziehungen

$$\sum_{i=1}^{6} \varphi_{i+3} p_i = 0\,, \qquad \sum_{i=1}^{6} \varphi_i \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0 \tag{70}$$

erfüllen müssen. Die zwölf den Bedingungen (70) unterworfenen Größen φ_i, p_i können daher als Koordinaten eines Kongruenzelementes dienen. Der Komplexstrahl $\mathfrak{p}$ ist Träger von ∞^2 Kongruenzelementen. Sie bilden einen Elementverein zweiter Stufe $\mathfrak{p}_2\,(p_i, \varphi_i)$; die ∞^2 Kongruenzelemente, deren Trägerstrahlen eine (im Komplex Γ enthaltene) Strahlenkongruenz $\mathfrak{S}$ erfüllen, bilden ebenfalls einen Elementverein zweiter Stufe $\mathfrak{S}_2\,(p_i, \varphi_i)$. ∞^1 Kongruenzelemente mit dem gemeinsamen Trägerstrahl $\mathfrak{p}$ haben ein im Komplex Γ enthaltenes Streifenelement gemeinsam. Daher sind auch die ∞^1 Strahlen einer im Komplex Γ enthaltenen Regelschar $\mathfrak{R}$ Trägerstrahlen eines Elementvereins zweiter Stufe $\mathfrak{R}_2\,(p_i, \varphi_i)$, indem jeder der ∞^1 Strahlen der Regelschar $\mathfrak{R}$ ∞^1 Kongruenzelemente trägt.

Durch einen Strahl $\mathfrak{p}$ des Linienraums gehen ∞^4 lineare Komplexe. Sie lassen sich auf ∞^3 Büschel einander längs $\mathfrak{p}$ berührender linearer Komplexe verteilen. Unter einem „Komplexelement" im Linienraum sei ein Strahl $\mathfrak{p}$ samt eines durch ihn gehenden Büschels sich längs $\mathfrak{p}$ berührender linearer Komplexe verstanden. Die Gleichung eines solchen Berührungsbüschels ist durch

$$\sum_{i=1}^{6} (\varphi_{i+3} + \lambda p_{i+3})\, q_i = 0\,, \qquad -\infty \cdots \lambda \cdots +\infty$$

gegeben; die Größen φ_i genügen der Beziehung $\sum_{i=1}^{6} \varphi_{i+3} p_i = 0$; die zwölf Größen φ_i, p_i können daher als Koordinaten eines Komplexelementes dienen. Der Strahl $\mathfrak{p}$ ist Träger von ∞^3 Komplexelementen. Sie bilden einen Elementverein dritter Stufe $\mathfrak{p}_3\,(p_i, \varphi_i)$. Die ∞^3 Komplexelemente, deren Trägerstrahlen einen (algebraischen oder transzendenten) Strahlenkomplex Γ erfüllen, bilden ebenfalls einen Elementverein dritter Stufe $\Gamma_3\,(p_i, \varphi_i)$. ∞^2 Komplexelemente mit dem gemeinsamen Trägerstrahl $\mathfrak{p}$ haben eine von $\mathfrak{p}$ ausgehende Fortschreitungsrichtung im Linienraum, also ein Streifenelement, gemeinsam. Daher sind auch die ∞^1 Strahlen einer Regelschar $\mathfrak{R}$ Trägerstrahlen eines Elementvereins dritter Stufe $\mathfrak{R}_3\,(p_i, \varphi_i)$, indem jeder der ∞^1 Strahlen der Regelschar ∞^2 Komplexelemente trägt. ∞^1 Komplexelemente mit dem gemeinsamen Trägerstrahl $\mathfrak{p}$ haben ein Kongruenzelement gemeinsam; die ∞^2 Strahlen einer Strahlenkongruenz $\mathfrak{S}$ sind Trägerstrahlen eines Elementvereins dritter Stufe $\mathfrak{S}_3\,(p_i, \varphi_i)$, indem jeder der ∞^2 Kongruenzstrahlen ∞^1 Komplexelemente trägt.

Für eine Theorie der Berührungstransformationen in der Liniengeometrie sind also drei Arten von „Elementen" von Bedeutung: Streifenelemente in der Kongruenz, Kongruenzelemente im Komplex und Komplexelemente im Linienraum. Als Elementkoordinaten dienen immer die zwölf Größen φ_i, p_i; sie sind den durch die Gleichungen (67) bzw. (70) gegebenen zusätzlichen Bedingungen unterworfen. Die Koordinaten der Elemente eines Elementvereins erster, zweiter oder dritter Stufe genügen außerdem der Beziehung

$$\sum_{i=1}^{6} \varphi_{i+3}\, dp_i = 0\,,$$

die gewährleistet, daß ein Element mit seinem „unendlich benachbarten" vereinigt liegt.

40. Gegeben sei eine Transformation im Linienraum, die die zwölf Elementkoordinaten p_i, φ_i in zwölf neue Elementkoordinaten p'_i, φ'_i überführt, so daß

(71a) $p_i = p_i(p'_k, \varphi'_k)\,,$ (71b) $\varphi_i = \varphi_i(p'_k, \varphi'_k)\,.$

Geht vermöge dieser Transformation die Gleichung $\sum_{i=1}^{6} \varphi_{i+3}\, dp_i = 0$ in die Gleichung $\sum_{i=1}^{6} \varphi'_{i+3}\, dp'_i = 0$ über und ist auch $\sum_{i=1}^{6} \varphi'_{i+3} p'_i = 0$ und $\sum_{i=1}^{6} p'_{i+3} p'_i = 0$, so liegt eine Berührungstransformation des Linienraums vor. Mit anderen Worten:

Die Berührungstransformationen im Linienraum verwandeln jeden Verein von Elementen des Linienraums wieder in einen Verein von Elementen des Linienraums.

Die Transformationsgleichungen (71a) und (71b) müssen in den φ'_k und in den p'_k je für sich homogen vom gleichen Grade bzw. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sein. Sie führen jede in den p_k, φ_k homogene Funktion in eine ebensolche der p'_k, φ'_k über: Die Berührungstransformationen des Linienraums sind „bihomogene Berührungstransformationen". Die Funktionen φ_i, p_i in den Gleichungen (71a) und (71b) müssen natürlich die aus der Theorie der Berührungstransformationen des Punktraums bekannten analytischen Bedingungen erfüllen [22]).

[22]) Lie-Engel-Transformationsgruppen II, Kap. 5.

41. Durch die Transformationsgleichungen (71) werden i. a. die Elementvereine, deren Träger ein Strahl des Linienraums (oder ein Komplexstrahl oder ein Kongruenzstrahl) ist, nicht wieder in Elementvereine, deren Träger ein Strahl ist, verwandelt. Vielmehr gehen sie über in solche Elementvereine, deren Trägerstrahlen eine Regelschar, eine Kongruenz oder einen Strahlenkomplex erfüllen. Berührungstransformationen des Linienraums, die durchweg die Elemente eines Strahls in die eines anderen Strahles überführen, sollen „erweiterte Geradentransformationen" heißen. Das einfachste Beispiel hierfür ist eine projektive Transformation des Linienraums.

Der geometrische Ort der Trägerstrahlen der Elemente des transformierten Elementvereins ergibt sich aus den Transformationsgleichungen (71a, b), indem man die Größen φ_k, φ'_k eliminiert. Dann folgen i. a. eine oder mehrere Beziehungen zwischen den p_k, p'_k allein. Sie sind von der Form

$$\Omega_i(p_k, p'_k) = 0$$

und heißen endliche Gleichungen oder „Leitgleichungen" (aequationes directrices) der Berührungstransformation. Die analytische Behandlung einer in ihren geometrischen Eigenschaften bekannten Berührungstransformation läßt sich durchführen, indem man aus den geometrischen Eigenschaften der gegebenen Berührungstransformation deren Leitgleichungen $\Omega_i = 0$ ermittelt und dann umgekehrt aus ihnen die Transformationsgleichungen für die Elementkoordinaten in der Form (71) herleitet. Es ist daher zu zeigen, welche besonderen Bedingungen die Leitgleichungen erfüllen müssen, damit eine Berührungstransformation des Linienraums, insbesondere der linearen Strahlenkongruenz, vorliegt. Dabei wird stets vorausgesetzt, daß die so ermittelten Leitgleichungen die in der analytischen Theorie der Berührungstransformationen des Punktraums bekannten Bedingungen einschließlich der Auflösbarkeitsbedingungen erfüllen [23]).

42. Liegt eine Berührungstransformation des Linienraums vor, die keine erweiterte Geradentransformation ist, so müssen mindestens zwei und dürfen höchstens vier Beziehungen $\Omega_i = 0$ bestehen:

a) Es muß eine Beziehung zwischen den p_k, p'_k geben, die die Plückersche Fundamentalrelation in sich überführt. Die allge-

[23]) Lie-Engel: Transformationsgruppen II, S. 148/49.

meinste derartige Beziehung ist offenbar durch eine in den p_k, p'_k je für sich homogene Gleichung von der Form

$$\Omega_1(p_k, p'_k) \equiv R \cdot H'(p_k, p'_k) - R' \cdot H(p_k, p'_k) = 0$$

gegeben, wo

$$R = \sum_{i=1}^{6} p_{i+3} p_i, \qquad R' = \sum_{i=1}^{6} p'_{i+3} p'_i.$$

Dann wird für alle Strahlen $\mathfrak{p}(p_k)$, die die Gleichung $R = 0$ erfüllen, entweder $R' = 0$ oder $H = 0$ und auch umgekehrt für alle Strahlen $\mathfrak{p}'(p'_k)$, die die Gleichung $R' = 0$ erfüllen, entweder $R = 0$ oder $H' = 0$. Die Möglichkeiten: $H = 0$ infolge $R = 0$ und $H' = 0$ infolge $R' = 0$ müssen noch ausgeschlossen werden, was bei der Aufstellung der Transformationsgleichungen für die Elementkoordinaten in der Form (71) zu geschehen hat.

b) Durch $\Omega_1 = 0$ allein ist jedoch keine Berührungstransformation des Linienraums bestimmt, da vermöge dieser Beziehung zwar jeder Strahl des Linienraums in einen ebensolchen übergeht, jedoch nicht gewährleistet ist, daß Elemente eines Elementvereins in ebensolche verwandelt werden. Außer der Beziehung $\Omega_1 = 0$ kann es zwischen p_k und p'_k noch eine oder zwei oder drei weitere in p_k, p'_k homogene Beziehungen geben. Tritt zu Ω_1 nur die einzige Beziehung $\Omega_2 = 0$, so geht ein Verein von ∞^3 Komplexelementen $\mathfrak{p}_3(p_i, \varphi_i)$ mit dem Trägerstrahl $\mathfrak{p}$ über in einen Verein von ∞^3 Komplexelementen $\Gamma_3(p'_i, \varphi'_i)$, dessen Trägerstrahlen einen (algebraischen oder transzendenten) Strahlenkomplex Γ erfüllen. Man erhält die Gleichung dieses Trägerkomplexes, indem man in der Gleichung

$$\Omega_2(p_k, p'_k) = 0$$

für p_k die Koordinaten des Strahles $\mathfrak{p}$ einsetzt. Ist noch eine weitere Beziehung $\Omega_3 = 0$ gegeben, so wird der Elementverein dritter Stufe $\mathfrak{p}_3(p_i, \varphi_i)$ mit dem Trägerstrahl $\mathfrak{p}$ verwandelt in einen Elementverein dritter Stufe $\mathfrak{S}_3(p'_i, \varphi'_i)$, dessen Trägerstrahlen eine Kongruenz $\mathfrak{S}$ ausfüllen. Deren Gleichungen sind durch

$$\Omega_2(p_k, p'_k) = 0, \qquad \Omega_3(p_k, p'_k) = 0$$

gegeben, wenn man für die p'_k die Koordinaten von $\mathfrak{p}$ einsetzt. Sind vier Gleichungen $\Omega_i = 0$, $i = 1, \ldots, 4$ gegeben, so verwandelt die hierdurch bestimmte Berührungstransformation den Elementverein dritter Stufe $\mathfrak{p}_3(p_i, \varphi_i)$ in einen Elementverein dritter Stufe $\mathfrak{R}_3(p'_i, \varphi'_i)$, dessen Trägerstrahlen eine Regelschar $\mathfrak{R}$ erfüllen.

43. Im folgenden sollen noch eingehender solche Berührungstransformationen behandelt werden, die die lineare Strahlenkongruenz gegeben durch die Gleichungen

$$A = \sum_{i=1}^{6} a_{i+3} p_i = 0, \qquad B = \sum_{i=1}^{6} b_{i+3} p_i = 0$$

in sich überführen. Daher sind zunächst die beiden Leitgleichungen $\Omega_2 = 0$, $\Omega_3 = 0$ so anzusetzen, daß die lineare Strahlenkongruenz in sich übergeht. Die Elementtransformation stellt sich dann als eine Transformation der Streifenelemente in der Kongruenz dar; sie ist zu bestimmen durch eine vierte Leitgleichung $\Omega_4 = 0$. Die Berührungstransformation führt daher jeden Elementverein erster Stufe $\mathfrak{p}_1(p_i, \varphi_i)$, dessen Träger ein Kongruenzstrahl $\mathfrak{p}$ ist, über in einen Verein von ∞^1 Streifenelementen $\mathfrak{R}_1(p'_i, \varphi'_i)$ in der Kongruenz, dessen Trägerstrahlen eine Regelschar $\mathfrak{R}$ der Kongruenz erfüllen. Ihre Gleichung ist gegeben durch die Kongruenzgleichungen und durch die Gleichung

$$\Omega_4(p_k, p'_k) = 0,$$

wenn man hierin für die p_k die Koordinaten des Kongruenzstrahls $\mathfrak{p}$ einsetzt.

Damit die lineare Strahlenkongruenz vermöge der Beziehungen $\Omega_2 = 0$, $\Omega_3 = 0$ in sich übergeht, müssen Ω_2 und Ω_3 homogene Funktionen je vom gleichen Grade in den p_k, p'_k sein von der Form

$$(72) \qquad \begin{cases} \Omega_2 \equiv K'(p_k, p'_k) \cdot A - K(p_k, p'_k) \cdot A', \\ \Omega_3 \equiv L'(p_k, p'_k) \cdot B - L(p_k, p'_k) \cdot B' \end{cases}$$

mit

$$A' = \sum_{i=1}^{6} a_{i+3} p'_i, \quad B' = \sum_{i=1}^{6} b_{i+3} p'_i.$$

Die Transformationsgleichungen für die Elementkoordinaten in der Form (71) gewinnt man im Anschluß an die bei Lie[24]) für die Berührungstransformationen des Punktraums hergeleiteten Sätze aus den Beziehungen

$$\varphi_{i+3} = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial p_i}, \qquad -\varphi'_{i+3} = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial p'_i}.$$

[24]) Lie-Engel: Transformationsgruppen II, Kap. 6.

Nun ist

$$(73)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\,\Omega_1}{\partial\,p_i} = p_{i+3}\,H' + \sum\limits_{i=1}^{6} p_{i+3}\,p_i \dfrac{\partial\,H'}{\partial\,p_i} - \sum\limits_{i=1}^{6} p'_{i+3}\,p'_i \dfrac{\partial\,H}{\partial\,p_i}, \\ \dfrac{\partial\,\Omega_1}{\partial\,p'_i} = -p'_{i+3}\,H - \sum\limits_{i=1}^{6} p'_{i+3}\,p'_i \dfrac{\partial\,H}{\partial\,p'_i} + \sum\limits_{i=1}^{6} p_{i+3}\,p_i \dfrac{\partial\,H}{\partial\,p'_i}. \end{cases}$$

Die Transformationsgleichungen sind so anzusetzen, daß immer vermöge $\sum\limits_{i=1}^{6} p_i\,p_{i+3} = 0$ auch $\sum\limits_{i=1}^{6} p'_i\,p'_{i+3} = 0$ wird. Demnach ist zu setzen:

$$\frac{\partial\,\Omega_1}{\partial\,p_i} = p_{i+3}\cdot H'(p_k, p'_k), \qquad \frac{\partial\,\Omega_1}{\partial\,p'_i} = -p'_{i+3}\,H(p_k, p'_k).$$

Durch den Ansatz

$$\frac{\partial\,\Omega_2}{\partial\,p_i} = a_{i+3}\cdot K'(p_k, p'_k), \quad \frac{\partial\,\Omega_2}{\partial\,p'_i} = -a_{i+3}\,K(p_k, p'_k),$$

$$\frac{\partial\,\Omega_3}{\partial\,p_i} = b_{i+3}\,L'(p_k, p'_k), \quad \frac{\partial\,\Omega_3}{\partial\,p'_i} = -b_{i+3}\,L(p_k, p'_k),$$

wird ferner erreicht, daß die Transformation die lineare Kongruenz $A = 0$, $B = 0$ in sich überführt[25]). Daher gilt:

Jede Berührungstransformation der linearen Strahlenkongruenz in sich ist bestimmt durch das Gleichungensystem:

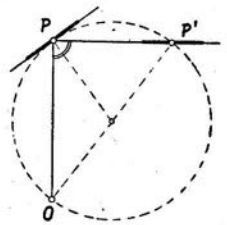
$$\begin{cases} \Omega_1(p_k, p'_k) \equiv R\cdot H' - H\cdot R' = 0, \quad \Omega_2(p_k, p'_k) \equiv K'\cdot A - A'\cdot K = 0, \\ \Omega_3(p_k, p'_k) \equiv L'\,B - B'\,L = 0, \quad \Omega_4(p_k, p'_k) = 0, \\ \varphi_{i+3} = \lambda_1\,p_{i+3}\cdot H' + \lambda_2\,a_{i+3}\,K' + \lambda_3\,b_{i+3}\,L' + \lambda_4 \dfrac{\partial\,\Omega_4}{\partial\,p_i}, \\ -\varphi'_{i+3} = -\lambda_1\,p'_{i+3}\,H - \lambda_2\,a_{i+3}\,K - \lambda_3\,b_{i+3}\,L + \lambda_4 \dfrac{\partial\,\Omega_4}{\partial\,p'_i}. \end{cases}$$

Die Auflösung dieses Systems nach $p_i(p'_k, \varphi'_k)$, $\varphi_i(p'_k, \varphi'_k)$ bzw. $p'_i(p_k, \varphi_k)$, $\varphi'_i(p_k, \varphi_k)$ liefert nach Elimination der Größen λ_k die Transformationsgleichungen für die Elementkoordinaten in der Form (71) bzw. deren Umkehrtransformation.

[25]) Für alle Rechnungen, bei denen die zweiten Ableitungen der Ω_k auftreten, ist mit dem Ansatz (73) zu arbeiten und erst im Ergebnis $R = R' = 0$ zu setzen (bzw. $A = A' = 0$, $B = B' = 0$).

44. Im Anschluß hieran wird für zwei besondere Berührungstransformationen in der linearen Strahlenkongruenz die Ermittlung der Leitgleichung $\Omega_4 = 0$ dargelegt. Zugleich werden die wichtigsten geometrischen Eigenschaften dieser beiden Berührungstransformationen untersucht.

Die elliptische bzw. hyperbolische lineare Kongruenz sei auf eine Bildebene mit zwei konjugiert imaginären bzw. reellen Fundamentalpunkten abgebildet[26]). Dann kann man durch Übertragung bekannter Berührungstransformationen ebener Kurven aus der Bildebene in die Kongruenz auch Berührungstransformationen in der Kongruenz definieren[27]).



Figur 7.

Die Fußpunkttransformation in der Ebene verwandelt die Punkte P' einer gegebenen Kurve in die Fußpunkte P der vom Pol O auf ihre Tangenten gefällten Lote (Fig. 7). Die Linienelemente eines Punktes P' gehen dabei über in die Linienelemente eines Kreises mit dem Durchmesser OP'.

Den euklidischen oder pseudoeuklidischen Kreisen der Bildebene entsprechen die Regelscharen zweiter Ordnung der elliptischen oder hyperbolischen linearen Kongruenz, den Geraden der Ebene die parabolischen Regelscharen zweiter Ordnung. Zwei orthogonale Kreise bzw. Geraden in der Bildebene sind die Bilder zweier füreinander polarinvarianter Regelscharen zweiter Ordnung der Kongruenz.

45. Somit gelangt man zur Definition folgender Berührungstransformation in der elliptischen oder hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz (Berührungstransformation I):

[26]) Haenzel: Die Geometrie d. lin. Strahlenkongruenz I, Abschn. I.

[27]) Haenzel u. Reutter: Die Geometrie d. lin. Strahlenkongruenz III, Abschn. I.

Die Berührungstransformation I verwandelt jeden Verein von ∞^1 Streifenelementen $\mathfrak{p}_1(p_i, \varphi_i)$ mit einem Kongruenzstrahl $\mathfrak{p}$ als Träger in einen Verein von ∞^1 Streifenelementen $\mathfrak{R}_1^2(p'_i, \varphi_i')$, dessen Trägerstrahlen eine Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$ durch $\mathfrak{p}$ und den Polstrahl o erfüllen. Dieselbe ist polarinvariant für die parabolische Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{P}^2$ durch $\mathfrak{p}$ und o.

Zur analytischen Behandlung dieser Berührungstransformation ist die Ermittlung ihrer Leitgleichung $\Omega_4 = 0$ erforderlich:

Die lineare Kongruenz sei durch die Gleichungen

$$A = \sum_{i=1}^{6} a_{i+3} p_i = 0\,, \qquad B = \sum_{i=1}^{6} b_{i+3} p_i = 0$$

gegeben, der Polstrahl o habe die Koordinaten o_i, der unendlichferne Kongruenzstrahl die Koordinaten a_i. Die parabolische Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{P}^2$ habe die Gleichung

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{6} \gamma_{i+3} p_i = 0\,,$$

wo die Koeffizienten γ_i aus dem Gleichungensystem

$$\sum_{i=1}^{6} \gamma_{i+3} p_i = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{6} \gamma_{i+3} p'_i = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{6} \gamma_{i+3} o_i = 0\,,$$

$$\sum_{i=1}^{6} \gamma_{i+3} a_i = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{6} \gamma_{i+3} a_i = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{6} \gamma_{i+3} b_i = 0$$

zu bestimmen sind. Es folgt also

$$\Gamma \equiv \sum_{i=1}^{6} \gamma_{i+3} p_i \equiv \| p_i, p'_i, o_i, a_i, a_i, b_i \|\,, \tag{74}$$

und es ist

$$\Omega_4 \equiv \| p_i, p'_i, o_i, \gamma_i, a_i, b_i \| = 0 \tag{75}$$

die gesuchte Leitgleichung. Von der Berührungstransformation I sind die ∞^1 Streifenelemente durch den Polstrahl und die Streifenelemente der ∞^1 Strahlen der beiden durch ihn gehenden Kongruenzstrahlenbüschel erster Ordnung ausgenommen. Im übrigen bestimmt die Gleichung (75) für jedes Wertesextupel $p_1', \ldots, p_6'$ eine Regelschar zweiter Ordnung der Kongruenz. Die Trägerfläche einer vorgegebenen (algebraischen oder transzendenten) Regelschar $\mathfrak{R}$ mit der Parameterdarstellung

$$p'_i = p'_i(t) \tag{76}$$

geht demnach vermöge der Berührungstransformation I über in die Hüllfläche des durch die Gleichungen (75) und (76) bestimmten Systems von einscharig in der Kongruenz enthaltenen Regelflächen zweiten Grades.

Ist insbesondere die elliptische lineare Kongruenz mit den Gleichungen

$$p_2 - p_5 = 0, \qquad p_3 - p_6 = 0$$

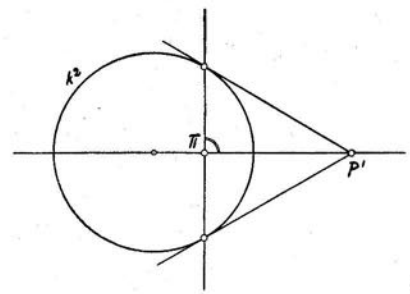
gegeben, hat der unendlichferne Kongruenzstrahl die Koordinaten $1:0:0:0:0:0$ und wählt man als Polstrahl den Hauptstrahl der Kongruenz, so erhält die Leitgleichung die einfache Form

$$\Omega_4 \equiv p'_1 [p_1 p'_4 + p_5 p'_5 + p_6 p'_6] = 0\,.$$

Durch den ausgeklammerten Faktor $p'_1 = 0$ werden die Strahlen der beiden konjugiert imaginären Kongruenzstrahlenbüschel durch den Polstrahl gekennzeichnet; entsprechend läßt sich in Gleichung (75) der Faktor $\sum_{i=1}^{6} o_{i+3} p'_i$ ausklammern, so daß eine bilineare Beziehung in den p_i, p'_i als Leitgleichung verbleibt.

Indessen geht vermöge der Gleichungen (75), (76) nicht jede Regelschar der linearen Kongruenz wieder in eine Regelschar über. Vielmehr werden die ∞^1 Streifenelemente einer parabolischen Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{G}^2$ verwandelt in die ∞^1 Streifenelemente eines Kongruenzstrahls $\mathfrak{p}'$. In diesem schneidet die Regelschar $\mathfrak{G}^2$ die für sie polarinvariante parabolische Regelschar zweiter Ordnung durch den Polstrahl.

46. Die Konstruktion der Polaren eines Punktes P' in bezug auf einen gegebenen Kreis k^2 ergibt sich für einen außerhalb k^2 gelegenen Punkt P' in der bekannten Weise aus Figur 8.



Figur 8.

Die Übertragung aus der Bildebene in die lineare Kongruenz führt daher zur Definition folgender Berührungstransformation in der (elliptischen oder hyperbolischen) linearen Kongruenz (Berührungstransformation II):

Die Berührungstransformation II verwandelt jeden Verein von ∞^1 Streifenelementen $p_1(p_i, \varphi_i)$ mit einem Kongruenzstrahl $\mathfrak{p}$ als Träger in einen Verein von ∞^1 Streifenelementen $\mathfrak{P}_1^2(p'_i, \varphi'_i)$, dessen Trägerstrahlen eine parabolische Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{P}^2$ erfüllen. Dieselbe enthält die reziproke Polare π des Strahles $\mathfrak{p}$ bezüglich einer Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{C}^2$ der Kongruenz und ist für die parabolische Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{S}^2$ durch π und $\mathfrak{p}$ polarinvariant.

Die gegebene Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{C}^2$ habe die Gleichung

$$C = \sum_{i=1}^{6} c_{i+3} p_i = 0 . \tag{77}$$

Die reziproke Polare eines Kongruenzstrahls $\mathfrak{p}(p'_k)$ bezüglich der Regelschar $\mathfrak{C}^2$ hat die Koordinaten

$$\pi_i = c_i C' - I p'_i ,$$

wo $I = \sum_{i=1}^{6} c_{i+3} c_i$, $C' = \sum_{i=1}^{6} c_{i+3} p'_i$ ist. Der unendlichferne Kongruenzstrahl habe die Koordinaten a_i. Demnach ist die parabolische Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{S}^2$ durch den Strahl $\mathfrak{p}$ und dessen reziproke Polare π bestimmt durch die Gleichung

$$S \equiv \sum_{i=1}^{6} s_{i+3} p_i = \| p_i, p'_i, c_i C' - I p'_i, a_i, a_i, b_i \| .$$

Da C' für alle $\mathfrak{C}^2$ nicht angehörigen Strahlen $\mathfrak{p}$ nicht verschwindet, ergibt sich schließlich für diese Strahlen als Gleichung der Regelschar $\mathfrak{S}^2$:

$$S \equiv \sum_{i=1}^{6} s_{i+3} p_i = \| p_i, p'_i, c_i, a_i, a_i, b_i \| = 0 , \tag{78}$$

und daher ist

$$\Omega_4 \equiv \| p_i, c_i C' - I p'_i, s_i, a_i, a_i, b_i \| = 0 \tag{79}$$

für alle nicht $\mathfrak{C}^2$ angehörigen Kongruenzstrahlen die Leitgleichung der Berührungsformation II. Die Regelschar $\mathfrak{C}^2$ selbst ist

gegenüber einer Berührungstransformation II invariant. Die Regelschar $\mathfrak{S}^2$ zerfällt für die ∞^1 Strahlen $\mathfrak{p}(p'_k)$ der beiden Parallelstrahlenbüschel der Kongruenz. Die Vereine von ∞^1 Streifenelementen mit einem solchen Strahl als Trägerstrahl sind daher von der Berührungstransformation II ausgenommen.

Die ∞^1 Streifenelemente einer vorgegebenen Regelschar mit der Parametergleichung $p'_i = p'_i(t)$ werden durch die Berührungstransformation II i. a. in ∞^1 Streifenelemente verwandelt, deren Trägerstrahlen die Regelschar der Hüllfläche eines Systems von Strahlenflächen zweiten Grades erfüllen. Doch führt die Berührungstransformation II die ∞^1 Streifenelemente einer parabolischen Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{G}^2$ über in die ∞^1 Streifenelemente durch einen Kongruenzstrahl $\mathfrak{p}'$. Die parabolische Regelschar $\mathfrak{G}^2$ schneide nämlich die für $\mathfrak{G}^2$ und $\mathfrak{C}^2$ polarinvariante parabolische Regelschar zweiter Ordnung im Strahle π; dessen reziproke Polare bezüglich $\mathfrak{C}^2$ ist der Strahl $\mathfrak{p}'$.

Die elliptische lineare Strahlenkongruenz sei durch die Gleichungen

$$p_2 - p_5 = 0, \qquad p_3 - p_6 = 0$$

gegeben, die Regelschar $\mathfrak{C}^2$ durch die Gleichung

$$c_1 p_4 + c_4 p_1 = 0.$$

Der unendlichferne Kongruenzstrahl habe die Koordinaten 1:0:0:0:0:0. Dann ergibt sich als Leitgleichung der Berührungstransformation II

$$\Omega_4 \equiv p'_1 [(p_5 p'_5 + p_6 p'_6) c_4 - p_4 p'_4 c_1] = 0 . \tag{80}$$

Diese Gleichung ordnet allen reellen Kongruenzstrahlen mit Ausnahme des Hauptstrahls und des unendlichfernen Strahls eine Regelschar zweiter Ordnung zu. Entsprechend dem Faktor p'_1 läßt sich in Gleichung (80) der Faktor

$$\Lambda = \sum_{k=1}^{6} \left[c_k \cdot \sum_{i=1}^{6} c_{i+3} a_i - a_k \cdot \sum_{i=1}^{6} c_i c_{i+3} \right] p'_{k+3}$$

ausklammern, so daß eine bilineare Beziehung in den p_i, p'_i als Leitgleichung verbleibt. Der Gleichung $\Lambda = 0$ genügen die ∞^1 Strahlen eines Paares von Kongruenzstrahlenbüscheln mit dem Hauptstrahl der Kongruenz als Doppelstrahl.

Für die parabolische lineare Kongruenz sind derartige Berührungstransformationen nicht möglich.

47. Da die Berührungstransformation I jeden Elementverein erster Stufe, dessen Trägerstrahlen eine parabolische Regelschar zweiter Ordnung erfüllen, in die ∞^1 Streifenelemente eines Kongruenzstrahls $\mathfrak{p}$ überführt, muß die Aufeinanderfolge der Berührungstransformationen II und I einen Kongruenzstrahl $\mathfrak{p}'$ in einen anderen Strahl $\mathfrak{p}''$ verwandeln, stellt also eine erweiterte Geradentransformation dar. Wählt man als Polstrahl der Transformation I nach Ausübung der Transformation II den Strahl $\mathfrak{p}'$, so geht dieser durch die Aufeinanderfolge von II und I in seine reziproke Polare bezüglich $\mathfrak{C}^2$ über: Ist nämlich in der Bildebene der Punkt P' Pol der Fußpunkttransformation, so gehen sämtliche Punkte seiner Polaren bezüglich k^2 (Fig. 8) über in den Fußpunkt Π des Lotes von P' auf die Polare. Andererseits führt die Transformation durch reziproke Radien (Inversion) bezüglich k^2 den Punkt P' in den Punkt Π über. Irgend zwei bezüglich k^2 inversen Punkten der Bildebene entsprechen aber zwei reziproke Polaren bezüglich der Regelschar zweiter Ordnung, die k^2 zum Bildkreis hat. Damit ist für die Kongruenz gezeigt:

Zwei aufeinanderfolgende Berührungstransformationen II und I führen einen gegebenen Kongruenzstrahl $\mathfrak{p}'$ in seine reziproke Polare bezüglich der Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{C}^2$ über, wenn nur der Kongruenzstrahl $\mathfrak{p}'$ jeweils als Polstrahl der Berührungstransformation I gewählt wird.

Die Involutionen der linearen Strahlenkongruenz, welche einen gegebenen Kongruenzstrahl mit seiner reziproken Polaren bezüglich einer einscharig der Kongruenz angehörigen Fläche zweiten Grades vertauschen, heißen primäre Involutionen[28]). Es gilt also der Satz:

Aus der Berührungstransformation II und der Berührungstransformation I folgt die primäre Involution. Die Berührungstransformationen I, II und die primäre Involution bezüglich $\mathfrak{C}^2$ bilden mit der Identität eine Gruppe, aus je zweien von ihnen resultiert die dritte und aus allen dreien die Identität.

[28]) Jolles: Die Involutionen auf einer lin. Strahlenkongr., Math. Zs. 27 (1928), S. 427.

1

2

3

Die Trajektorflächen der elliptischen linearen Strahlenkongruenz.

Trajektorflächen erster bis fünfter Art und die von ihnen gebildeten Flächensysteme.

ngsystem R von Strahlenflächen zweiten ist bestimmt durch seine Leitflächen u. durch der Berührung der Flächen des Ringsystems den Leitflächen. Die Leitflächen sind:	Das System der Trajektorflächen besteht aus:	Singuläre Strahlen:
elle Regelflächen zweiten Grades mit zwei ert imaginären windschiefen gemeinsamen ahlen. — Ungleichartige Berührung.	∞^1 transzendenten Trajektorflächen erster Art und einer reellen Strahlenfläche zweiten Grades. Sie ist Asymptotenfläche aller Trajektorflächen erster Art.	∞^1 Doppelregelstrahlen, 2 Rückkehrregelstrahlen.
elle Regelflächen zweiten Grades mit zwei ert imaginären windschiefen gemeinsamen ahlen. — Gleichartige Berührung.	∞^1 transzendenten Trajektorflächen zweiter Art und einer imaginären Regelfläche zweiten Grades mit reellem polarem Raume. Unter besonderen Bedingungen sind die Trajektorflächen zweiter Art algebraisch.	∞^1 Rückkehrregelstrahlen. (bei algebr. Verhalten s. Nr. 28).
ander längs eines Regelstrahles $\mathfrak{p}$ berührende Regelflächen zweiten Grades. — Ungleich- der gleichartige Berührung.	∞^1 transzendenten Trajektorflächen dritter Art und einer reellen Strahlenfläche zweiten Grades. Alle Trajektorflächen dritter Art berühren einander längs $\mathfrak{p}$.	2 Rückkehrregelstrahlen.
elle Regelflächen zweiten Grades mit zwei amen windschiefen reellen Regelstrahlen $\mathfrak{p}_2$. — Ungleichartige oder gleichartige Be-	∞^1 transzendenten Trajektorflächen vierter Art und einer reellen Strahlenfläche zweiten Grades. Alle Trajektorflächen vierter Art berühren einander längs $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$. Unter besonderen Bedingungen sind die Trajektorflächen vierter Art algebraisch.	4 Rückkehrregelstrahlen.
lle Regelfläche zweiten Grades und eine in njugiert imaginäre Ebenen mit der reellen eraden k zerfallene Fläche zweiten Grades.	∞^1 transzendenten Trajektorflächen fünfter Art.	∞^1 Doppelregelstrahlen, 1 Rückkehrregelstrahl. k ist asymptotischer Strahl aller Trajektorflächen fünfter Art.

Die Trajektorflächen der hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz.

Trajektorflächen sechster bis zehnter Art und die von ihnen gebildeten Flächensysteme.

ngsystem R von Strahlenflächen zweiten st bestimmt durch seine Leitflächen u. durch der Berührung der Flächen des Ringsystems den Leitflächen. Die Leitflächen sind:	Das System der Trajektorflächen besteht aus:	Singuläre Strahlen:
elle Regelflächen zweiten Grades mit zwei amen windschiefen reellen Regelstrahlen $\mathfrak{p}_2$. — Ungleichartige Berührung.	∞^1 transzendenten Trajektorflächen sechster Art und einer reellen Strahlenfläche zweiten Grades. Sie ist Asymptotenfläche der imaginären Flächenschalen aller Trajektorflächen sechster Art. Alle Trajektorflächen sechster Art berühren einander längs $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$.	∞^1 Doppelregelstrahlen, ∞^1 Rückkehrregelstrahlen.
elle Regelflächen zweiten Grades mit zwei amen windschiefen reellen Regelstrahlen $\mathfrak{p}_2$. — Gleichartige Berührung.	∞^1 transzendenten Trajektorflächen siebenter Art und einer reellen Strahlenfläche zweiten Grades. Alle Trajektorflächen siebenter Art berühren einander längs $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$. Unter besonderen Bedingungen sind die Trajektorflächen siebenter Art algebraisch.	4 Doppelregelstrahlen, 4 Rückkehrregelstrahlen.
ander längs eines Regelstrahles $\mathfrak{p}$ berührende Regelflächen zweiten Grades. — Ungleich- der gleichartige Berührung.	∞^1 transzendenten Trajektorflächen achter Art und einer reellen Strahlenfläche zweiten Grades. Alle Trajektorflächen achter Art berühren einander längs $\mathfrak{p}$.	2 Rückkehrregelstrahlen.
elle Regelflächen zweiten Grades mit zwei ert imaginären windschiefen gemeinsamen ahlen. — Ungleichartige oder gleichartige ng.	∞^1 transzendenten Trajektorflächen neunter Art und einer reellen Strahlenfläche zweiten Grades. Unter besonderen Bedingungen sind die Trajektorflächen neunter Art algebraisch.	4 Rückkehrregelstrahlen.
lle Regelfläche zweiten Grades und eine in les Ebenenpaar mit der Doppelgeraden k ie Fläche zweiten Grades.	∞^1 transzendenten Trajektorflächen zehnter Art.	2 Doppelregelstrahlen, 2 Rückkehrregelstrahlen. k ist asymptotischer Strahl der imag. Schalen aller Trajektorflächen zehnter Art.