Herrn Prof. Dr. Wallstein
mit vorzüglichen Grüßen
überreicht
H. Roßbach.

Projektive und differentialgeometrische Eigenschaften der linearen Strahlenkongruenz

---

Von der
Technischen Hochschule „Fridericiana" Karlsruhe
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs
genehmigte

Dissertation

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Heinrich Friedrich Roßbach
aus Eisenach

Referent: Professor Dr.-Ing. G. Haenzel
Korreferent: Professor Dr. K. Boehm

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Februar 1935

Großbetrieb für Dissertationsdruck von Robert Noske in Borna-Leipzig
1935

Inhaltsverzeichnis.

I. Die Polarität im Linienraume.

Geht man bei der Betrachtung der projektiven Geometrie des Raumes von den Geraden als Element aus, so erhebt sich die Frage nach der Existenz polarer Korrelationen, die im Strahlenraum eine ähnliche Rolle spielen wie die polaren Korrelationen der Kegelschnitte und der Flächen zweiter Ordnung und Klasse im Punkt- und Ebenenraum. Vielfach glaubte man im Nullraum des linearen Strahlenkomplexes die Analogie zum polaren Raum der Flächen zweiter Ordnung und Klasse zu sehen. Diese Auffassung erscheint uns unberechtigt; einmal ist der lineare Strahlenkomplex nicht das Inzidenzgebilde seines Nullraumes in dem Sinne, wie die Fläche zweiter Ordnung die Inzidenzfläche ihres polaren Raumes darstellt, außerdem werden im Nullraum Punkt und Ebene als Element einander zugeordnet, während doch in einer polaren Korrelation des Strahlenraumes Strahlengebilde als Pol und Polargebilde einander gegenübertreten müssen. Deutet man endlich die Linienkoordinaten als Punkte im fünfdimensionalen Raum, so erscheint die Korrelation eines Nullraumes als involutorische Perspektivität dieses Hyperraumes. Als erster hat Herr Jolles für die lineare Strahlenkongruenz die wirkliche Polarität auf synthetischem Wege entdeckt und vollständig behandelt; und zwar nimmt diese von ihm abgeleitete Polarität zwei verschiedenene Formen an, je nachdem die Regelschar zweiter Ordnung oder der lineare Strahlenkomplex als Element des betreffenden polaren Raumes gewählt wird [1]). Im ersten Falle sind zwei konjugierte Elemente zwei einscharig in der Kongruenz enthaltene Regelscharen zweiter Ordnung, deren jede durch den polaren Raum der anderen in sich übergeht. Im zweiten Falle aber werden zwei konjugierte Elemente

---

[1]) Jolles, St.: Die Polarität als Grundlage in der Geometrie der linearen Strahlenkongruenz. Math. Zeitschr. Bd. 33 (1931) H. 733—790.

durch zwei für einander nullinvariante Strahlenkomplexe vertreten. Die früher vom gleichen Verfasser entwickelte Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenz ordnet sich der Polarentheorie der Kongruenz in derselben Weise ein, wie die Fokaltheorie der Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung sich deren Polarentheorie einfügt.

Im folgenden soll allgemein die Polarität für die Strahlen des Linienraumes begründet werden. Ihr wird sich die von Herrn Jolles entdeckte Polarentheorie der linearen Strahlenkongruenz und ebenso die Polarentheorie des linearen Strahlenkomplexes einordnen. Auf Grund eines allgemeinen analytischen Ansatzes soll insbesondere die Polarentheorie der linearen Strahlenkongruenz analytisch behandelt werden. Die erste analytische Behandlung der Polarentheorie in der Kongruenz ist von Herrn Haenzel[2]) geliefert worden. Das in dieser Abhandlung entwickelte Abbildungsverfahren bringt die Polarentheorie in Isomorphie zur Kreisgeometrie. Dabei gehen naturgemäß die Realitätsunterschiede in den Geometrien der hyperbolischen, elliptischen und parabolischen Kongruenz verloren. Für eine erschöpfende Behandlung wird deshalb jenes Abbildungsverfahren in drei verschiedene Hauptfälle aufzuspalten sein.

II. Analytische Begründung der Polarität im Linienraum.

Die homogenen Punktkoordinaten zweier Punkte X, Y im Raume haben die Matrix:

1) $$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

Die sechs Unterdeterminanten zweiten Grades

$$p_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad p_2 = x_1 y_3 - y_1 x_3, \quad p_3 = x_2 y_3 - x_3 y_2,$$
$$p_4 = x_3 y_4 - y_3 x_4, \quad p_5 = x_4 y_2 - y_4 x_2, \quad p_6 = x_1 y_4 - x_4 y_1$$

stellen die homogenen Linienkoordinaten des durch die Punkte X, Y bestimmten Strahles dar. Sie unterliegen der bekannten Fundamentalrelation:

2) $$\Omega(p_i, p_k) = p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0.$$

[2]) Haenzel, G.: Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz und ihre Gerade-Kugel-Transformation. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 42 (1932) S. 75—84.

Der durch die lineare Gleichung $\sum_{i=1}^{i=6} a_{i+3} p_i = 0$ (mod 6) dargestellte lineare Komplex hat die Invariante

3) $$\Omega(a_i, a_k) = \sum_{i=1}^{i=6} a_i a_{i+3},$$

deren Verschwinden das Entarten des linearen Komplexes in die Gesamtheit aller die Gerade $a_\lambda (\lambda = 1, \cdots 6)$ schneidenden Strahlen ausdrückt. Ein solcher Komplex wird ein spezieller genannt. Zwei lineare Komplexe mit den Gleichungen $\sum_{i=1}^{i=6} a_{i+3} p_i = 0$ und $\sum_{i=1}^{i=6} b_{i+3} p_i = 0$ bestimmen einen Komplexbüschel, dargestellt durch

$$\sum_{i=1}^{i=6} a_{i+3} p_i + \lambda \sum_{i=1}^{i=6} b_{i+3} p_i = 0.$$

Die Parameterwerte der beiden im Büschel enthaltenen speziellen Komplexe ergeben sich als die Wurzeln der Gleichung:

4) a) $(a_1 + \lambda b_1)(a_4 + \lambda b_4) + (a_2 + \lambda b_2)(a_5 + \lambda b_5) + (a_3 + \lambda b_3)(a_6 + \lambda b_6) = 0$

b) $\lambda^2 (b_1 b_4 + b_2 b_5 + b_3 b_6) + \lambda (b_1 a_4 + b_2 a_5 + b_3 a_6 + b_4 a_1 + b_5 a_2 + b_6 a_3)$
$+ (a_1 a_4 + a_2 a_5 + a_3 a_6) = 0.$

Setzt man

$$I_{aa} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=6} a_i a_{i+3}, \quad I_{bb} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=6} b_i b_{i+3}, \quad I_{ab} = \sum_{i=1}^{i=6} a_i b_{i+3},$$

so folgt die Unterscheidung der bekannten drei Hauptfälle:

Die Trägerkongruenz eines linearen Komplexbüschels ist hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch, je nachdem die Diskriminante

$$\left(-I_{aa} I_{bb} + \frac{I_{ab}^2}{4}\right)$$

positiv, Null oder negativ ist. Im vierten Fall verschwinden gleichzeitig I_{aa}, I_{bb} und I_{ab}. Die lineare Kongruenz zerfällt in ein ebenes Strahlenfeld und einen zentrischen Strahlenbündel. Die Trägerebene des Feldes geht durch die inzidenten Geraden a_i, b_i, und der Träger des zentrischen Bündels ist der Schnittpunkt der Geraden a_i, b_i.

Werden die eingeführten Linienkoordinaten p_i als homogene Punktkoordinaten eines fünfdimensionalen Linearkontinuums gedeutet, so stellt die für alle Linienkoordinaten gültige Fundamentalrelation

$$\Omega(p_i, p_k) = \sum_{i=1}^{i=6} p_i p_{i+3} = 0$$

eine vierdimensionale Hyperfläche zweiten Grades in diesem $\mathfrak{R}_5$ dar, und die Geometrie des Strahlenraumes ist zu der analytischen Geometrie in dieser Hyperfläche isomorph. Die Hyperfläche bestimmt im fünfdimensionalen Kontinuum einen polaren Raum, indem jedem Punkte $\pi_i\,(i=1,\cdots 6)$ die Hyperebene

5) $$\sum_{i=1}^{i=6} \pi_i \frac{\partial \Omega}{\partial p_i} = \sum_{i=1}^{i=6} \pi_{i+3} p_i = 0$$

als Polargebilde und umgekehrt jeder Hyperebene $\sum_{i=1}^{i=6} a_{i+3} p_i = 0$ der Punkt $a_i\,(i=1,\cdots 6)$ als ihr Pol zugeordnet wird. Diese durch die Fundamentalrelation im $\mathfrak{R}_5$ bedingte Polarität zieht natürlich auch eine Polarität in der Fundamentalfläche Ω selber nach sich. Zu einer gegebenen Hyperebene $\sum_{i=1}^{i=6} a_{i+3} p_i = 0$ sind die ∞^4 durch den zugehörigen Pol gehenden Hyperebenen

6 a) $$\begin{aligned}\lambda_1(p_1 a_6 - p_6 a_1) + \lambda_2(p_2 a_6 - p_6 a_2) + \lambda_3(p_3 a_6 - p_6 a_3)\\ + \lambda_4(p_4 a_6 - a_4 p_6) + \lambda_5(p_5 a_6 - a_5 p_6) = 0\end{aligned}$$

oder

6 b) $$\begin{aligned}a_6(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 + \lambda_4 p_4 + \lambda_5 p_5)\\ - p_6(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 + \lambda_5 a_5) = 0\end{aligned}$$

konjugiert. Da die gegebene Hyperebene $\sum_{i=1}^{i=6} a_{i+3} p_i = 0$ die Fundamentalfläche in einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung schneidet, sind also jeder solchen in Ω liegenden dreidimensionalen Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung ∞^4 andere solche konjugiert. Sie bilden in den λ_i eine lineare Mannigfaltigkeit vierter Stufe. Jeder dreidimensionalen Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung in der Fundamentalfläche Ω tritt also eine lineare Mannigfaltigkeit von ∞^4 solcher dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten als Polargebilde gegenüber, und die Polarität ist durch die Relation

7) $$\begin{aligned}\lambda_1 a_1 a_6 + \lambda_2 a_2 a_6 + \lambda_3 a_3 a_6 + \lambda_4 a_4 a_6 + \lambda_5 a_5 a_6\\ - \lambda_1 a_6 a_1 - \lambda_2 a_6 a_2 - \lambda_3 a_6 a_3 - \lambda_4 a_6 a_4 - \lambda_5 a_6 a_5 = 0\end{aligned}$$

ausgedrückt. Diese Relation stellt aber gleichzeitig die Nullinvarianz des Ausgangskomplexes mit allen ihm zugeordneten polaren Komplexen dar. Daraus folgt:

„Für einen gegebenen linearen Strahlenkomplex sind ∞^4 lineare Strahlenkomplexe nullinvariant. Sie bilden eine lineare Mannigfaltigkeit vierter Stufe."

Durch zwei lineare Komplexe

$$A = \sum_{i=1}^{i=6} a_{i+3} p_i = 0, \quad B = \sum_{i=1}^{i=6} b_{i+3} p_i = 0$$

ist eine lineare Kongruenz, die Trägerkongruenz des Komplexbüschels $A + \lambda B = 0$, gegeben. Die lineare Kongruenz enthält eine lineare Mannigfaltigkeit von ∞^3 Regelscharen, den $\mathfrak{R}^2$-Raum der linearen Kongruenz. Zu den Komplexen des Büschels $A + \lambda B = 0$ sind ∞^3 lineare Komplexe nullinvariant, letztere bilden den Γ-Raum der linearen Kongruenz. Ist der gegebene Komplex $C = \sum_{i=1}^{i=6} c_{i+3} p_i = 0$ zu den beiden Komplexen $A = 0$ und $B = 0$ nullinvariant, bestehen also die Beziehungen

$$\sum_{i=1}^{i=6} a_{i+3} c_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=6} b_{i+3} c_i = 0,$$

so schneidet C die Kongruenz in der Regelfläche zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$, dargestellt durch

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

Umgekehrt läßt sich zu jeder Regelfläche zweiter Ordnnung $\mathfrak{R}^2$, die in der Kongruenz enthalten ist, eindeutig ein zu $A = 0$ und $B = 0$ nullinvarianter Komplex $C = 0$ angeben, der $\mathfrak{R}^2$ aus der Kongruenz ausschneidet. Zu $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ gleichzeitig nullinvariant ist jeder Komplex $\sum_{i=1}^{i=6} \xi_{i+3} p_i = 0$, dessen Koeffizienten den Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{i=6} a_{i+3} \xi_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=6} b_{i+3} \xi_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=6} c_{i+3} \xi_i = 0$$

unterliegen. Aus dieser Bedingung folgt für $\sum_{i=1}^{i=6} \xi_{i+3} p_i = 0$ die Determinantendarstellung

$$\Gamma(\pi, \pi^*) = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 & \pi_6 \\ \pi_1^* & \pi_2^* & \pi_3^* & \pi_4^* & \pi_5^* & \pi_6^* \end{vmatrix} = 0.$$

Die π_i und π_i^* sind zwei Koordinatensextupel des Raumes der π_i, die mit der Ausnahme, daß sie nicht in der Mannigfaltigkeit

$$\mu a_i + \nu b_i + \lambda c_i$$

liegen dürfen, willkürlich gewählt werden können. Alle solche Komplexe bilden eine lineare Mannigfaltigkeit zweiter Stufe oder einen Komplexbündel. Der gegebene Komplex C und der zugeordnete Komplexbündel $\Gamma(\pi, \pi^*)$ treten einander als Polkomplex und Polarkomplexbündel innerhalb einer auf die Bedingung der Nullinvarianz gegründeten Polarität gegenüber. Da der gegebene Komplex C und die Elemente des Polarkomplexbündels $\Gamma(\pi, \pi^*)$ in die Kongruenz Regelscharen zweiter Ordnung hineinschneiden, zieht diese Polarität eine zweite Polarität in der linearen Kongruenz $A = 0$, $B = 0$ nach sich, bei der die Regelschar zweiter Ordnung, gegeben durch

8) $$A = \sum_{i=1}^{i=6} a_{i+3} p_i = 0, \quad B = \sum_{i=1}^{i=6} b_{i+3} p_i = 0, \quad C = \sum_{i=1}^{i=6} c_{i+3} p_i = 0,$$

das Element darstellt. Ihr tritt die Mannigfaltigkeit von ∞^2 Regelscharen zweiter Ordnung, ihres Polar-R^2-Bündels gegenüber, das durch

$$\sum_{i=1}^{i=6} a_{i+3} p_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=6} b_{i+3} p_i = 0,$$

9) $$\Gamma(\pi, \pi^*) = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 & \pi_6 \\ \pi_1^* & \pi_2^* & \pi_3^* & \pi_4^* & \pi_5^* & \pi_6^* \end{vmatrix} = 0$$

gegeben ist. Die Allgemeinheit der Darstellung bleibt erhalten, wenn man π_i und π_i^* so wählt, daß

9 a) $$\begin{cases} \Omega(\pi_i, \pi_x) = 0, & \Omega(\pi_i^*, \pi_x^*) = 0 \\ \sum_{i=1}^{i=6} a_{i+3} \pi_i = 0, & \sum_{i=1}^{i=6} a_{i+3} \pi_i^* = 0 \\ \sum_{i=1}^{i=6} b_{i+3} \pi_i = 0, & \sum_{i=1}^{i=6} b_{i+3} \pi_i^* = 0 \\ \sum_{i=1}^{i=6} c_{i+3} \pi_i = 0, & \sum_{i=1}^{i=6} c_{i+3} \pi_i^* = 0 \end{cases}$$

erfüllt sind, das heißt, man kann π_i und π_i^* als Strahlen, die auf der Ausgangsregelfläche

$$A = 0, \; B = 0, \; C = 0$$

liegen, ohne Verletzung der Allgemeinheit wählen.

III. Die Polarität in der linearen Kongruenz.

Die durch Formel (9) begründete Polarität hat sowohl im Γ-Raum wie im R^2-Raum der linearen Kongruenz eine einfache geometrische Bedeutung.

Für die Beziehungen im Γ-Raum ergibt sich dabei folgendes:

Ist $\sum_{i=1}^{i=6} a_{i+3} p_i = 0$ ein gegebener Komplex des Linienraums, so ordnet das mit ihm verknüpfte Nullsystem in eindeutiger Weise jedem Strahle p_i des Raumes einen Strahl p_i' des Raumes zu. Nach bekannten Sätzen der Liniengeometrie besteht zwischen den p_i und p_i' folgende homogene lineare Beziehung:

10) $$p_i' = a_i (a_4 p_1 + a_5 p_2 + a_6 p_3 + a_1 p_4 + a_2 p_5 + a_3 p_6) - I p_i,$$

dabei bedeutet $$I = a_1 a_4 + a_2 a_5 + a_3 a_6.$$

Setzen wir an Stelle von $\sum_{i=1}^{i=6} a_{i+3} p_i = 0$ den zu $C = \sum_{i=1}^{i=6} c_{i+3} p_i = 0$ in der Kongruenz $A = 0$; $B = 0$ polar zugeordneten Komplex $\Gamma(\pi, \pi^*)$ des Γ-Raumes der Kongruenz, so treten in der obigen Relation (10) an Stelle der a_i die Unterdeterminanten

$$a_1 = A_4 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_5 & c_6 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_5 & \pi_6 \\ \pi_1^* & \pi_2^* & \pi_3^* & \pi_5^* & \pi_6^* \end{vmatrix}; \; a_2 = A_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_6 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_6 \\ \pi_1^* & \pi_2^* & \pi_3^* & \pi_4^* & \pi_6^* \end{vmatrix}; \; a_i = A_{i+3}$$

aus der Komplexgleichung

$$\Gamma(\pi, \pi^*) = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 & \pi_6 \\ \pi_1^* & \pi_2^* & \pi_3^* & \pi_4^* & \pi_5^* & \pi_6^* \end{vmatrix} = 0 .$$

Man erhält demnach:

11) $$p_i' = A_{i+3}\,\Gamma(p_i;\, \pi, \pi^*) - J p_i .$$

Gehört p_i den Komplexen A, B, C an, so gehört auch p_i' den Komplexen A, B, C an. Denn es folgt wegen

$$\sum_{i=1}^{i=6} a_{i+3} p_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{i=6} a_{i+3} A_{i+3} = 0$$

12) $$\sum_{i=1}^{i=6} a_{i+3} p_i' = \left(\sum_{i=1}^{i=6} a_{i+3} A_{i+3}\right) \cdot \Gamma(p_i, \pi, \pi^*) - J \cdot \sum_{i=1}^{i=6} a_{i+3} p_i = 0.$$

Es gilt also der Satz:

„Das Nullsystem eines jeden Komplexes aus dem Polarbündel $\Gamma(p_i, \pi, \pi^*)$ eines Komplexes C des Γ-Raumes der linearen Kongruenz führt jeden in der Kongruenz enthaltenen Komplexstrahl von C in einen ebensolchen über. Umgekehrt führt auch das Nullsystem des Komplexes C jeden Strahl der Kongruenz, der in einem Komplex des zu C polaren Bündels liegt, in einen solchen über."

Im R^2-Raum der Kongruenz ergibt sich folgendes:

Aus der gegebenen Kongruenz

13) $$\begin{cases} A = a_4 p_1 + a_5 p_2 + a_6 p_3 + a_1 p_4 + a_2 p_5 + a_3 p_6 = 0 \\ B = b_4 p_1 + b_5 p_2 + b_6 p_3 + b_1 p_4 + b_2 p_5 + b_3 p_6 = 0 \end{cases}$$

schneidet der Komplex

13a) $$C = c_4 p_1 + c_5 p_2 + c_6 p_3 + c_1 p_4 + c_2 p_5 + c_3 p_6 = 0$$

eine Regelschar zweiter Ordnung aus. Die Gleichung ihrer Trägerfläche R^2 lautet in homogenen Punktkoordinaten

14) $$\left.\begin{matrix} a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_4^4 x_4^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 \\ + 2 a_{13} \cdot x_1 x_3 + 2 a_{14} x_1 x_4 + 2 a_{23} x_2 x_3 + 2 a_{24} x_2 x_4 + 2 a_{34} x_3 x_4 \end{matrix}\right\} = 0.$$

Die a_{ik} ergeben sich aus den Koeffizienten der Komplexe $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ als

$$a_{11} = \begin{vmatrix} a_4 & a_3 & a_5 \\ b_4 & b_3 & b_5 \\ c_4 & c_3 & c_5 \end{vmatrix}, \; a_{22} = \begin{vmatrix} a_2 & a_4 & a_6 \\ b_2 & b_4 & b_6 \\ c_2 & c_4 & c_6 \end{vmatrix}, \; a_{33} = \begin{vmatrix} a_5 & a_1 & a_6 \\ b_5 & b_1 & b_6 \\ c_5 & c_1 & c_6 \end{vmatrix}, \; a_{44} = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$a_{12} = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} a_4 & a_3 & a_6 \\ b_4 & b_3 & b_6 \\ c_4 & c_3 & c_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_4 & a_5 \\ b_2 & b_4 & b_5 \\ c_2 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}\right\}, \; a_{13} = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} a_3 & a_6 & a_5 \\ b_3 & b_6 & b_5 \\ c_3 & c_6 & c_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_4 & a_1 & a_5 \\ b_4 & b_1 & b_5 \\ c_4 & c_1 & c_5 \end{vmatrix}\right\},$$

$$a_{14} = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} a_4 & a_1 & a_3 \\ b_4 & b_1 & b_3 \\ c_4 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_5 \\ b_2 & b_3 & b_5 \\ c_2 & c_3 & c_5 \end{vmatrix}\right\}, \; a_{23} = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} a_4 & a_1 & a_6 \\ b_4 & b_1 & b_6 \\ c_4 & c_1 & c_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_5 & a_6 \\ b_2 & b_5 & b_6 \\ c_2 & c_5 & c_6 \end{vmatrix}\right\},$$

$$a_{24} = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_4 \\ b_2 & b_1 & b_4 \\ c_2 & c_1 & c_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_6 \\ b_2 & b_3 & b_6 \\ c_2 & c_3 & c_6 \end{vmatrix}\right\}, \; a_{34} = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_5 \\ b_2 & b_1 & b_5 \\ c_2 & c_1 & c_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & a_6 \\ b_3 & b_1 & b_6 \\ c_3 & c_1 & c_6 \end{vmatrix}\right\}.$$

Es seien $A_{\varrho\sigma}^{ik}$ die zweireihigen Determinanten, deren Reihen aus den Elementen der i-ten und $\varkappa$-ten Reihe und deren Spalten aus den Elementen der ϱ-ten und σ-ten Spalte der Koeffizientenmatrix

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad a_{ik} = a_{ki}$$

gebildet sind. Die Beziehung zwischen zwei durch den polaren Raum der Fläche zweiter Ordnung zugeordneten Strahlen $g(p_i)$ und $g'(p_i')$ lautet dann:

$$
15)\quad \begin{cases}
p_1' = A_{12}^{34}p_1 + A_{13}^{34}p_2 + A_{23}^{34}p_3 + A_{34}^{34}p_4 + A_{42}^{34}p_5 + A_{14}^{34}p_6 \\
p_2' = A_{12}^{42}p_1 + A_{13}^{42}p_2 + A_{23}^{42}p_3 + A_{34}^{42}p_4 + A_{42}^{42}p_5 + A_{14}^{42}p_6 \\
p_3' = A_{12}^{14}p_1 + A_{13}^{14}p_2 + A_{23}^{14}p_3 + A_{34}^{14}p_4 + A_{42}^{14}p_5 + A_{14}^{14}p_6 \\
p_4' = A_{12}^{12}p_4 + A_{13}^{12}p_2 + A_{23}^{12}p_3 + A_{34}^{12}p_4 + A_{42}^{12}p_5 + A_{14}^{12}p_6 \\
p_5' = A_{12}^{13}p_1 + A_{13}^{13}p_2 + A_{23}^{13}p_3 + A_{34}^{13}p_4 + A_{42}^{13}p_5 + A_{14}^{13}p_6 \\
p_6' = A_{12}^{23}p_1 + A_{13}^{23}p_2 + A_{23}^{23}p_3 + A_{34}^{23}p_4 + A_{42}^{23}p_5 + A_{14}^{23}p_6 .
\end{cases}
$$

Liegt nun der Strahl $g(p_i)$ in der Regelschar

$$A = \sum_{i=1}^{i=6} a_{i+2}p_i = 0, \quad B = \sum_{i=1}^{i=6} b_{i+3}p_i = 0, \quad \Gamma(p_i, \pi, \pi^*) = 0,$$

so liegt auch seine reziproke Polare $g'(p_i')$ in der Regelschar, wie sich durch Einsetzen verifizieren läßt.

„Im R^2-Raum der linearen Strahlenkongruenz wird jede gegebene Regelschar zweiter Ordnung durch den polaren Raum jeder konjugierten Regelschar in sich übergeführt, und umgekehrt führt der polare Raum einer Regelschar jede zu ihrem polaren R^2-Bündel gehörige Regelschar in sich selbst über."

Im polaren R^2-Raum der linearen Strahlenkongruenz sind also konjugierte Regelscharen zueinander „autopolar".

IV. Die Normalformen der linearen Strahlenkongruenz und die isomorphen Flächen zweiter Ordnung.

Die durch $A = 0$ und $B = 0$ dargestellte lineare Kongruenz läßt sich stets durch eine geeignete starre Transformation des Punktraumes auf eine der im folgenden angegebenen drei Normalfälle bringen.

Die hyperbolische, parabolische, elliptische Trägerkongruenz des Komplexbüschels

$$\sum_{i=1}^{i=6} a_{i+3}p_i + \lambda \sum_{i=1}^{i=6} b_{i+3}p_i = 0$$

haben die reellen, zusammenfallenden oder konjugiert imaginären Leitgeraden b, b'. Sie sind die Achsen der beiden speziellen Komplexe des Komplexbüschels. Aus den Wurzeln λ_1 und λ_2 der quadratischen Gleichung

$$
16)\quad \begin{cases}
J_{aa} + \lambda \cdot J_{ab} + \lambda^2 J_{bb} = 0 , \\
\lambda_{1,2} = \dfrac{-J_{ab} \pm \sqrt{J_{ab}^2 - 4 J_{aa} J_{bb}}}{2 J_{bb}}
\end{cases}
$$

ergeben sich die Linienkoordinaten der beiden Leitgeraden $b(\beta_i)$ und $b'(\beta_i')$ als

$$\beta_i = a_i + \lambda_1 b_i, \quad \beta_i' = a_i + \lambda_2 b_i \, (i = 1, 2 \ldots 6).$$

Für den halben Schränkungswinkel α der beiden Leitgeraden und ihren kürzesten Abstand $2c$ gelten die Bestimmungsgleichungen

$$
17)\quad m = \operatorname{tg} \alpha
$$

$$
= \frac{\sqrt{(\beta_5\beta_4' - \beta_4\beta_5')^2 + (\beta_6\beta_4' - \beta_4\beta_6')^2 + (\beta_6\beta_5' - \beta_5\beta_6')^2}}{\beta_4\beta_4' + \beta_5\beta_5' + \beta_6\beta_6' + \sqrt{(\beta_4^2 + \beta_5^2 + \beta_6^2)(\beta_4'^2 + \beta_5'^2 + \beta_6'^2)}},
$$

$$
18)\quad 2c
$$

$$
= \frac{\beta_1\beta_4' + \beta_2\beta_5' + \beta_3\beta_6' + \beta_4\beta_1' + \beta_5\beta_2' + \beta_6\beta_3'}{+\sqrt{(\beta_4^2 + \beta_5^2 + \beta_6^2)(\beta_4'^2 + \beta_5'^2 + \beta_6'^2)} - (\beta_4\beta_4' + \beta_5\beta_5' + \beta_6\beta_6')} .
$$

Bei positiv gezogener Wurzel entscheidet das positive oder negative Vorzeichen von $2c$ über den linken oder rechten Windungssinn der Leitgeraden. m und $2c$ stellen Invarianten für die Gruppe der eigentlichen starren Transformationen des Raumes dar.

Für die hyperbolische lineare Strahlenkongruenz sind m und $2c$ reell, und eine geeignete starre Transformation bringt die hyperbolische lineare Kongruenz bei endlichem c stets auf die Form

$$
19\text{a})\quad mp_2 + p_3 - cp_5 + cmp_6 = 0; \quad -mp_2 + p_3 + cp_5 + cmp_6 = 0,
$$

aus der die Normalform

$$
19)\qquad p_3 + cmp_6 = 0; \quad p_2 - \frac{c}{m}p_5 = 0
$$

folgt.

Für die elliptische lineare Strahlenkongruenz sind die Wurzeln λ_1 und λ_2 der Gleichung (16) konjugiert imaginär, und daher sind die In-

varianten m und $2c$ rein imaginäre Größen. Nach Einführung von $m = im'$ und $2c = 2ic'$ stellt sich die elliptische Strahlenkongruenz in der Normalform

$$20) \qquad p_3 - c'm'p_6 = 0, \quad p_2 - \frac{c'}{m'}p_5 = 0$$

dar.

Für die parabolische lineare Strahlenkongruenz ergibt sich die Normalform

$$21) \qquad p_3 = 0, \quad p_5 - \varkappa p_2 = 0.$$

Dabei liegt der Zentralpunkt der Kongruenz im Anfangspunkte des Koordinatensystems, die x-Achse fällt mit den vereinigten Leitgeraden und die x, y-Ebene mit der Fluchtebene der Kongruenz zusammen. Hat der Mittelpunkt eines ebenen Kongruenzstrahlenbüschels vom Zentralpunkt den Abstand δ, so gilt für den Neigungswinkel a seiner Trägerebene gegen die x, y-Ebene die Beziehung

$$22) \qquad \operatorname{tg} a = \varkappa \delta.$$

Die Anwendung der Gleichungspaare (19), (20) und (21) auf die Fundamentalrelation

$$p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0$$

führt in den betrachteten drei Hauptfällen auf je eine der drei quadratischen Formen:

$$23) \quad \begin{cases} \text{I.} \quad \frac{c}{m} p_5^2 - cm p_6^2 + p_1 p_4 = 0 & \text{(Hyperbolische Kongruenz)} \\ \text{II.} \quad \frac{1}{k} p_5^2 + p_1 p_4 = 0 & \text{(Parabolische Kongruenz)} \\ \text{III.} \quad \frac{c}{m} p_5^2 + cm p_6^2 + p_1 p_4 = 0 & \text{(Elliptische Kongruenz).} \end{cases}$$

Setzt man

$$\frac{p_6}{p_1} = x, \quad \frac{p_5}{p_1} = y; \quad \frac{p_4}{p_1} = z,$$

so verwandeln sich (23; I, II, III) in die Gleichungen

$$24) \quad \begin{cases} \text{I.} \quad \frac{c}{m} y^2 - cm x^2 + z = 0 \\ \text{II.} \quad \frac{1}{\varkappa} y^2 + z = 0 \\ \text{III.} \quad cm x^2 + \frac{c}{m} y^2 + z = 0, \end{cases}$$

die beziehungsweise ein hyperbolisches Paraboloid, einen parabolischen Zylinder und ein elliptisches Paraboloid darstellen. Liegt der gegebene lineare Komplex

$$25) \qquad a_4 p_1 + a_5 p_2 + a_6 p_3 + a_1 p_4 + a_2 p_5 + a_3 p_6 = 0$$

im Γ-Raum der linearen Kongruenz, das heißt, ist er zu dem Komplexbüschel, dessen Träger die Kongruenz ist, nullinvariant, so unterliegen seine Koeffizienten beispielsweise für den Fall der hyperbolischen Kongruenz den Bedingungen:

$$25\text{a}) \qquad a_3 + cm a_6 = 0, \quad a_2 - \frac{c}{m} a_5 = 0.$$

Werden p_2 und p_3 mittels der Gleichungen

$$p_3 + cm p_6 = 0, \quad p_2 - \frac{c}{m} p_5 = 0$$

elliminiert und $\frac{p_6}{p_1}, \frac{p_5}{p_1}, \frac{p_4}{p_1}$ in der oben angegebenen Art als kartesische Koordinaten gedeutet, so ist der gegebene lineare Komplex im x, y, z-Raum der Ebene

$$26) \qquad a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 = 0 \quad \text{isomorph.}$$

Hierin sind

$$a_1 = (a_3 - cm a_6), \quad a_2 = \left(a_2 + \frac{c}{m} a_5\right), \quad a_3 = a_1, \quad a_4 = a_4$$

oder

$$a_1 = a_3, \quad a_2 = \frac{a_2}{2}, \quad a_3 = \frac{a_1}{2}, \quad a_4 = a_4, \quad a_5 = \frac{m}{2c} a_2, \quad a_6 = -\frac{1}{2cm} a_1.$$

Demnach ist der Γ-Raum der linearen Kongruenz umkehrbar eindeutig auf den dreidimensionalen Ebenenraum abgebildet. Der polare Raum der Fläche

$$\frac{c}{m} y^2 - c m x^2 + z = 0$$

ist isomorph zum polaren Γ-Raum der linearen Strahlenkongruenz. Zwei konjugierte lineare Komplexe werden bezüglich des kartesischen Koordinatensystems x, y, z durch die Gleichungen zweier Ebenen dargestellt, von denen jede durch den Pol der anderen bezüglich der Fläche

$$\frac{c}{m} y^2 - c m x^2 + z = 0$$

geht. Der gegebene lineare Komplex des Γ-Raumes schneidet die Strahlenkongruenz in einer Regelschar zweiter Ordnung, die dem, durch die ihm zugeordnete Ebene aus der Fundamentalfläche

$$\frac{c}{m} y^2 - c m x^2 = z$$

ausgeschnittenen Kegelschnitte isomorph ist. Es ergeben sich folgende gestaltliche Fälle.

V. Die Regelscharen zweiter Ordnung in der Kongruenz.

a) Die hyperbolische Kongruenz.

Da alle reellen Ebenen das hyperbolische Paraboloid in reellen Kegelschnitten schneiden, enthält der R^2-Raum der hyperbolischen Strahlenkongruenz nur reelle Regelscharen zweiter Ordnung. Die Tangentialebenen des hyperbolischen Paraboloides treffen dieses je in einem, in ein reelles Geradenpaar zerfallenden Kegelschnitte; diesen ∞^2 in Geradenpaare zerfallenden Kegelschnitten entsprechen die ∞^2 zerfallenden Regelscharen zweiter Ordnung der hyperbolischen Strahlenkongruenz. Jede von ihnen hat einen Kongruenzstrahl zum Doppelstrahl, und die beiden durch die Leitgeraden der Kongruenz und den Doppelstrahl bestimmten Ebenen sind die Träger der beiden Kongruenzstrahlenbündel erster Ordnung, in die die Regelschar zerfällt.

b) Die parabolische Kongruenz.

Eine gegebene Ebene schneidet den parabolischen Zylinder

$$z + \frac{1}{\varkappa} y^2 = 0$$

in einem reellen Kegelschnitt. Die parabolische Kongruenz enthält demnach ∞^3 nicht zerfallende Regelscharen zweiter Ordnung. Die zum Zylinder parallelen Ebenen enthalten je zwei reelle, zusammenfallende oder konjugiert imaginäre Mantellinien. Die parabolische lineare Strahlenkongruenz enthält also ∞^2 zerfallende Regelscharen zweiter Ordnung. Nämlich:

α) ∞^2 je in zwei reelle Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallende Regelscharen.

β) ∞^1 je in ein doppelt zu rechnendes Strahlenbüschel zerfallende Regelscharen.

γ) ∞^2 je in zwei konjugiert imaginäre Strahlenbüschel zerfallende Regelscharen.

Die Trägerebenen dieser Strahlenbüschel erster Ordnung gehen stets durch die vereinigten Leitgeraden der parabolischen Strahlenkongruenz.

c) Die elliptische Kongruenz.

Die elliptische lineare Strahlenkongruenz enthält auf Grund der entsprechenden Überlegungen ∞^3 reelle Regelscharen zweiter Ordnung, ∞^2 je in zwei konjugiert imaginäre Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallende Regelscharen mit reellem Doppelstrahl und ∞^3 imaginäre Regelscharen zweiter Ordnung mit reellen polaren Räumen.

VI. Die Regelscharen zweiter Ordnung und ihre Polarbündel.

Die Polarität in der linearen Strahlenkongruenz ist nunmehr isomorph zur Polarität auf der Oberfläche einer Fläche zweiter Ordnung, wobei einander entsprechen:

Hyperbolische Kongruenz	$\longrightarrow$	Fläche vom Rang 4, Trägheitsindex 0
Elliptische Kongruenz	$\longrightarrow$	Fläche vom Rang 4, Trägheitsindex 2
Parabolische Kongruenz	$\longrightarrow$	Fläche vom Rang 3, Trägheitsindex 1.

Auf der Oberfläche eines hyperbolischen Paraboloides ist dem reellen Kegelschnitt $\varkappa^2$ ein Bündel von reellen Kegelschnitten konjugiert, und zwar gehen die Ebenen dieser Kegelschnitte durch den Pol der Trägerebene von $\varkappa^2$. Demnach ist in jeder hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz einer Regelschar zweiter Ordnung stets ein Polarbündel von ∞^2 lauter reellen

Regelscharen konjugiert, und zwar enthält der Polarbündel ∞^2 nicht zerfallende Regelscharen und ∞^1 in Paare von Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallende Regelscharen, deren Doppelstrahlen identisch mit den Erzeugenden der Polfläche sind.

Jede Tangentialebene des hyperbolischen Paraboloides enthält einen in zwei reelle Geraden zerfallenden Kegelschnitt, ihm sind auf dem Paraboloid diejenigen ∞^2 reellen Kegelschnitte konjugiert, deren Trägerebenen durch den Berührungspunkt der Tangentialebene gehen. Der zerfallende Kegelschnitt ist also auf dem Paraboloid sich selber konjugiert. In der hyperbolischen Kongruenz besteht also der Polarbündel einer in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenden Regelschar außer dieser Regelschar aus den ∞^2 übrigen durch den Doppelstrahl gehenden Regelscharen zweiter Ordnung. Jede zerfallende Regelschar der Kongruenz ist also im polaren Raum der Kongruenz sich selber konjugiert, das heißt, die Kongruenz ist das Inzidenzgebilde ihres polaren Raumes.

Die Geometrie auf dem Zylinder (Kegel) ist bei unserer Darstellung mit Einschluß der Realitätsverhältnisse der Geometrie in der parabolischen Strahlenkongruenz isomorph. Die Geometrie auf dem elliptischen Paraboloid entspricht unter Einschluß der Realitätsverhältnisse der Geometrie in der elliptischen Strahlenkongruenz.

Demnach gilt in der parabolischen Kongruenz:

Einem Regelscharbündel, der aus ∞^2 reellen nicht zerfallenden Regelscharen, aus ∞^1 in zwei reelle Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenden Regelscharen, aus ∞^1 in zwei konjugiert imaginäre Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenden Regelscharen und zwei je in ein doppelt zu zählendes Strahlenbüschel zerfallende Regelscharen besteht, ist eine in zwei reelle Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallende Regelschar zugeordnet. Die Trägerebenen dieser beiden Strahlenbüschel sind identisch mit den Trägerebenen der beiden im Bündel enthaltenen doppelt zu zählenden Strahlenbüschel. Alle diese in Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenden Regelscharen haben die vereinigten Leitgeraden der Kongruenz als Doppelstrahl.

Einem Regelscharbündel, der aus ∞^2 reellen und nur reellen nicht zerfallenden und aus ∞^1 in zwei reelle Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenden Regelscharen besteht, ist eine in zwei konjugiert imaginäre

Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallende Regelschar mit den vereinigten Leitgeraden als Doppelstrahl zugeordnet.

Besteht der Bündel aus ∞^2 nicht zerfallenden Regelscharen, aus einer einzigen in ein doppelt zu zählendes Strahlenbüschel erster Ordnung und ∞^1 je in zwei reelle Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenden Regelscharen, so entspricht dem Bündel die in das doppelt zu zählende Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallende Regelschar aus dem Bündel als Polfläche.

Besteht der Bündel aus ∞^2 je in zwei reelle, ∞^1 je in ein doppelt zu zählendes und ∞^2 je in zwei konjugiert imaginäre Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenden Regelscharen, so kann jede dieser zerfallenden Regelscharen als Polfläche des Bündels aufgefaßt werden. Die Polarität in der parabolischen Kongruenz ist entartet. Deshalb entspricht jeder zerfallenden oder nicht zerfallenden Regelschar zweiter Ordnung der Bündel als Polargebilde, der aus den ∞^2 je in zwei reelle Strahlenbüschel erster Ordnung, den ∞^1 je in ein doppelt zu zählendes Strahlenbüschel erster Ordnung und den ∞^2 je in zwei konjugiert imaginäre Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenden Regelscharen besteht.

Für die elliptische Kongruenz gilt:

Einer reellen Regelschar zweiter Ordnung ist ein Bündel von ∞^2 reellen, ∞^2 imaginären nicht zerfallenden Regelscharen und ∞^1 je in zwei konjugiert imaginäre Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenden Regelscharen, deren reelle Doppelstrahlen der Polfläche angehören, zugeordnet. Einer in zwei konjugiert imaginäre Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenden Regelschar ist der Bündel aller durch den Doppelstrahl gehenden reellen Regelscharen zugeordnet; die Ausgangsregelschar gehört dem Bündel an. Einer imaginären nicht zerfallenden Regelschar zweiter Ordnung (mit reellem polaren Raum) entspricht ein Bündel von ∞^2 nicht zerfallenden reellen Regelscharen zweiter Ordnung.

Die durch die Formel (9 a) an die π_i und π_i^* gestellten Forderungen schließen nicht aus, daß die π_i und π_i^* konjugiert imaginäre Werte annehmen können, so daß etwa gilt:

$$\pi_i = a_i + i\,a_i' \quad \text{und} \quad \pi_i^* = a_i - i\,a_i'.$$

Die imaginäre Darstellungsform des zu π_i und π_i^* gehörigen Polar-

komplexes $\Gamma(p_i, \pi_i, \pi_i^*) = 0$ läßt sich jedoch stets vermeiden. Durch eine einfache Umformung der Determinante läßt sich diese stets auf die Form

$$\Gamma(p_i, \pi_i, \pi_i^*) = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_1' & a_2' & a_3' & a_4' & a_5' & a_6' \end{vmatrix} = 0$$

bringen. Infolgedessen ist daher jeder Polar-$\mathfrak{R}^2$-Bündel stets in der reellen Form:

$$\sum_{i=1}^{i=6} a_{i+3} p_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{i=6} b_{i+3} p_i = 0$$

$$19) \qquad \Gamma(p_i, \pi_i, \pi_i^*) = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_1' & a_2' & a_3' & a_4' & a_5' & a_6' \end{vmatrix} = 0$$

darstellbar.

VII. Die reziprok polaren $\mathfrak{R}^2$-Büschel der Kongruenz.

Zwei Regelscharen zweiter Ordnung $\mathfrak{R}_1^2$ und $\mathfrak{R}_2^2$ im $\mathfrak{R}^2$-Raum der linearen Strahlenkongruenz bestimmen einen Büschel solcher Regelscharen $(\mathfrak{R}_1^2\, \mathfrak{R}_2^2)$; die Grundkurve des Büschels besteht aus den Brennlinien (Leitgeraden) u und v der Kongruenz C_v^u und zwei (reellen, zusammenfallenden oder konjugiert imaginären) Kongruenzstrahlen q, r. Die mit $\mathfrak{R}_1^2$ und $\mathfrak{R}_2^2$ inzidenten Komplexe Γ_1 und Γ_2 des Γ-Raumes der linearen Kongruenz C_v^u bestimmen einen Büschel solcher Komplexe $(\Gamma_1 \Gamma_2)$. Dieser Komplexbüschel ist zu jenem $\mathfrak{R}^2$-Büschel perspektiv. Den Regelscharen $\mathfrak{R}_1^2$ und $\mathfrak{R}_2^2$ sind im polaren $\mathfrak{R}^2$-Raum der linearen Kongruenz C_v^u die polaren $\mathfrak{R}^2$-Bündel $\mathfrak{R}_1^{(2)}$ und $\mathfrak{R}_2^{(2)}$ zugeordnet. Diese schneiden einander in einem

$\mathfrak{R}^2$-Büschel $[\mathfrak{R}_1^{(2)}, \mathfrak{R}_2^{(2)}]$. Die beiden Büschel $(\mathfrak{R}_1^2, \mathfrak{R}_2^2)$ und $[\mathfrak{R}_1^{(2)}, \mathfrak{R}_2^{(2)}]$ sind zwei reziprok polare $\mathfrak{R}^2$-Büschel des polaren $\mathfrak{R}^2$-Raumes. Jede Fläche des einen Büschels ist für die ∞^1 Flächen des anderen Büschels autopolar. Die zu ihnen perspektiven Γ-Büschel (Γ_1, Γ_2) und $[\Gamma_1^{(2)}, \Gamma_2^{(2)}]$ des polaren Γ-Raumes der linearen Kongruenz C_v^u sind zwei reziprok polare Komplexbüschel, und jeder Komplex des einen Büschels ist für die ∞^1 Komplexe des anderen nullinvariant.

Die Brennlinien u, v und zwei (reelle, zusammenfallende oder konjugiert imaginäre) Kongruenzstrahlen q, r bestimmen durch ihre vier Schnittpunkte ein Tetraeder, dessen drittes Paar Gegenkanten s, t zwei weitere (reelle, zusammenfallende oder konjugiert imaginäre) Kongruenzstrahlen bilden. Das Tetraeder enthält die einfachen Raumvierseite $qruv, qrst, uvst$. Jedes der drei einfachen Raumvierseite ist Basisvierseit eines F^2-Büschels, auf diese Weise werden die drei F^2-Büschel $F^2(qruv), F^2(qrst), F^2(uvst)$ erhalten. Die drei Gegenkanten des Tetraeders sind die drei Brennlinienpaare der drei linearen Kongruenzen

$$C_v^u, \quad C_t^s, \quad C_r^q.$$

Von den drei F^2-Büscheln liegt jeder je einscharig in zwei von diesen linearen Kongruenzen, und zwar liegen die drei F^2-Büschel

$$F^2(qruv); \quad F^2(uvst); \quad F^2(qrst)$$

beziehungsweise je in den beiden Kongruenzen

$$C_v^u, \quad C_r^q; \qquad C_v^u, \quad C_t^s; \qquad C_r^q, \quad C_t^s.$$

Umgekehrt enthält jede der drei linearen Kongruenzen einscharig zwei F^2-Büschel, zum Beispiel enthält C_v^u die beiden F^2-Büschel

$$F^2(qruv), \quad F^2(uvst),$$

und diese beiden Büschel sind zwei reziprok polare $\mathfrak{R}^2$-Büschel ihres polaren $\mathfrak{R}^2$-Raumes.

Die Regelscharen der beiden reziprok polaren $\mathfrak{R}^2$-Büschel

$$F^2(qruv), \quad F^2(stuv)$$

erscheinen im Isomorphieraum der p_i als die Kegelschnitte zweier Ebenenbüschel auf der Fundamentalfläche; die Achsen der beiden Ebenenbüschel sind reziprok polar bezüglich der Fundamentalfläche. Für die Realitätsverhältnisse ergeben sich in dieser Hinsicht folgende Möglichkeiten.

A. Die hyperbolische Kongruenz.

1. Die Achsen der beiden reziprok polaren Ebenenbüschel treffen die Fundamentalfläche je in zwei reellen Punkten. Die drei Kongruenzen C_v^u, C_r^q, C_t^s sind hyperbolisch. Das von ihren Brennlinien gebildete Tetraeder ist vollständig reell und nicht ausgeartet. Die reziprok polaren R^2-Büschel des polaren R^2-Raumes von C_v^u enthalten:

α) ∞^1 reelle nicht zerfallende Regelscharen zweiter Ordnung.

β) zwei je in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallende Regelscharen. Die Trägerebenenpaare der Strahlenbüschel sind $\{(qu), (qv)\}$; $\{(ru), (rv)\}$ und $\{(tu), (tv)\}$; $\{(su), (sv)\}$.

2. Die beiden Achsen der polaren Ebenenbüschel im Isomorphieraum schneiden die Fundamentalfläche je in zwei konjugiert imaginären Punkten. Von den drei linearen Kongruenzen ist nur C_v^u hyperbolisch, C_r^q und C_t^s sind elliptisch. Das Tetraeder besteht aus einem Paar reeller und zwei Paaren konjugiert imaginärer windschiefer Gegenkanten. Die beiden reziprok polaren R^2-Büschel enthalten lauter reelle nicht zerfallende Regelscharen zweiter Ordnung. Ihre Basisvierseite bestehen aus den Geraden u, v, q, r beziehungsweise u, v, s, t.

3. Berührt im Isomorphieraume die Achse des einen Ebenenbüschels die Fundamentalfläche in einem und nur einem Punkte P, so berührt die Achse des reziprok polaren Ebenenbüschels die Fundamentalfläche gleichfalls in P, und beide Achsen trennen die mit P inzidenten Erzeugenden der Fundamentalfläche harmonisch. Die beiden Kongruenzen C_r^q und C_t^s sind parabolisch und haben den dem Punkte P entsprechenden Kongruenzstrahl p von C_v^u zu vereinigten Leitgeraden. Der Punkt P entspricht demnach einem vierfachen Kongruenzstrahl, in den q, r und s, t vereinigt sind. Die beiden parabolischen Kongruenzen unterscheiden sich durch ihre Parameter. Jeder der beiden reziprok polaren R^2-Büschel enthält ∞^1 reelle nicht zerfallende Regelscharen zweiter Ordnung und gemeinsam eine in zwei reelle Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallende Regelschar. Die Ebenen (pu) und (pv) tragen die beiden Strahlenbündel erster Ordnung. Das Tetraeder besteht aus den Gegenkanten u, v und einem vierfach zu zählenden Strahl p, in den die beiden übrigen Gegenkantenpaare des Tetraeders vereinigt sind.

4. Fällt im Bildraume die Achse des einen reziprok polaren Ebenenbüschel mit einer Erzeugenden der Fundamentalfläche zusammen, so vereinigt sich auch die Achse des anderen mit dieser Erzeugenden. Die beiden linearen Kongruenzen C_r^q und C_t^s fallen zusammen und entarten in eine zerfallende Kongruenz (siehe Abschnitt II). Der Erzeugenden der Fundamentalfläche entspricht ein Strahlenbüschel erster Ordnung von Kongruenzstrahlen; seine etwa durch die Brennlinie u gehende Ebene ist die Trägerebene des Strahlenfeldes der entartenden Kongruenz. Der Schnittpunkt der anderen Brennlinie v mit dieser Ebene ist der Mittelpunkt des Strahlenbündels der Kongruenz.

Die beiden reziprok polaren R^2-Büschel fallen zusammen. Ihre Elemente entarten in ∞^1 je in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallende Regelscharen. Die Trägerebene des Strahlenfeldes ist zugleich Trägerebene eines der Strahlenbüschel und allen zerfallenden Regelscharen gemeinsam.

B. Die elliptische Kongruenz.

1. Die Achse des einen Ebenenbüschels treffe die Fundamentalfläche in zwei reellen Punkten, dann trifft die Achse des reziprok polaren Ebenenbüschels die Fundamentalfläche in zwei konjugiert imaginären Punkten. Von den drei linearen Kongruenzen C_v^u, C_r^q, C_t^s sind C_v^u und C_r^q elliptisch, C_t^s hyperbolisch. Das von ihren Brennlinien gebildete Tetraeder besteht aus einem Paar reeller und zwei Paaren konjugiert imaginärer windschiefer Gegenkanten.

Der eine der beiden reziprok polaren R^2-Büschel enthält ∞^1 reelle nicht zerfallende Regelscharen zweiter Ordnung, während der andere ∞^1 reelle, ∞^1 imaginäre nicht zerfallende Regelscharen und zwei in je zwei konjugiert imaginäre Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallende Regelscharen mit q beziehungsweise r als reellen Doppelstrahlen enthält.

2. Berührt im Bildraume die Achse des einen Ebenenbüschels die Fundamentalfläche in einem Punkte P, so berührt auch die Achse des reziprok polaren Ebenenbüschels die Fundamentalfläche in P. Die beiden Achsen trennen die mit P inzidenten konjugiert imaginären Erzeugenden der Fundamentalfläche harmonisch. Die beiden Kongruenzen C_r^q und C_t^s sind parabolisch. Sie haben den dem Punkte P entsprechenden Kongruenzstrahl

p aus C_v^u zu vereinigten Leitgeraden. Die beiden parabolischen Kongruenzen unterscheiden sich durch ihre Parameter. Jeder der beiden R^2-Büschel enthält ∞^1 reelle nicht zerfallende Regelscharen zweiter Ordnung. Beiden Büscheln ist die in die beiden konjugiert imaginären Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallende Regelschar gemeinsam; die Strahlenbüschel liegen in den konjugiert imaginären Ebenen (pu) und (pv). Das Tetraeder besteht aus den beiden konjugiert imaginären Brennlinien u, v, die beiden anderen Paare von Gegenkanten q, r, s, t fallen in den vierfach zu zählenden Strahl p zusammen.

C. Die parabolische Kongruenz.

1. Die Achse des einen Ebenenbüschels treffe den Fundamentalkegel (Zylinder) in zwei konjugiert imaginären Punkten, dann geht die Achse des reziprok polaren Ebenenbüschels durch die Kegelspitze. Die Kongruenz C_r^q ist elliptisch, C_t^s ist parabolisch. Das Tetraeder besteht aus den vereinigten Leitgeraden, in die die Gegenkanten u, v und s, t vereinigt sind. Das dritte Paar Gegenkanten besteht aus den konjugiert imaginären windschiefen Strahlen q, r. Die beiden parabolischen Kongruenzen C_v^u und C_t^s haben gemeinsame vereinigte Leitgeraden, sie unterscheiden sich durch ihre Parameter.

Der R^2-Büschel, der die Leitstrahlenkongruenz C_r^q trägt, enthält ∞^1 reelle nicht zerfallende Regelscharen zweiter Ordnung und eine in zwei konjugiert imaginäre Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallende Regelschar. Die Trägerebenen der Strahlenbüschel sind die Ebenen $(q, \widetilde{uv})$ und $(r, \widetilde{uv})$. Der reziprok polare R^2-Büschel besteht aus ∞^1 je in zwei reelle Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallende Regelscharen. Alle Regelscharen haben die vereinigten Leitgeraden $\widetilde{uv}$ als Doppelstrahl.

2. Im Bildraume treffe die Achse des einen Ebenenbüschels den Fundamentalkegel in zwei reellen Punkten, dann geht die Achse des reziprok polaren Ebenenbüschels durch die Kegelspitze. Die Kongruenz C_r^q ist hyperbolisch, C_t^s ist parabolisch, ihre vereinigten Leitgeraden $\widetilde{st}$ fallen mit den vereinigten Leitgeraden $\widetilde{uv}$ von C_v^u zusammen. C_v^u und C_t^s unterscheiden sich durch die Parameter. Das Tetraeder besteht aus den vereinigten Leitgeraden $\widetilde{uv} = \widetilde{st}$, in die zwei Paare von Gegenkanten des Tetraeders

zusammengefallen sind. Das dritte Paar besteht aus den reellen windschiefen Strahlen q, r. Der R^2-Büschel, der die Kongruenz C_r^q trägt, besteht aus ∞^1 reellen nicht zerfallenden Regelscharen zweiter Ordnung und einer in zwei reelle Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenden Regelschar. Die Trägerebenen der beiden Strahlenbüschel sind die Ebenen $(q, \widetilde{uv})$ und $r, \widetilde{uv})$.

Der reziprok polare R^2-Büschel enthält ∞^1 je in zwei reelle, ∞^1 je in zwei konjugiert imaginäre und zwei je in doppelt zu zählende Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallende Regelscharen. Die Trägerebenen der beiden doppelt zu zählenden Strahlenbüschel sind die Ebenen $(q, \widetilde{uv})$ und $(r, \widetilde{uv})$. Alle zerfallenden Regelscharen haben die vereinigten Leitgeraden $\widetilde{uv}$ als Doppelstrahl.

3. Im Bildraume berühre die Achse des Ebenenbüschels den Fundamentalkegel in einem und nur einem Punkte P, dann fällt die Achse des reziprok polaren Ebenenbüschels mit der Erzeugenden des Kegels durch den Punkt P zusammen. Die Kongruenz C_r^q ist parabolisch, während C_t^s eine zerfallende Kongruenz ist. Der C_r^q tragende R^2-Büschel enthält ∞^1 nicht zerfallende reelle Regelscharen zweiter Ordnung und eine in das doppelt zu zählende, in der Ebene $(\widetilde{qr}, \widetilde{uv})$ gelegene Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallende Regelschar. Der reziprok polare R^2-Büschel besteht aus ∞^1 reellen, in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenden Regelscharen, von denen stets das eine Strahlenbüschel in der Ebene $(\widetilde{qr}, \widetilde{uv})$ liegt, und aus einer in das doppelt zu zählende, in der Ebene $(\widetilde{qr}, \widetilde{uv})$ gelegene Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenden Regelschar. Das Tetraeder besteht aus den vereinigten Leitgeraden $\widetilde{uv}$ und $\widetilde{qr}$.

4. Die Achse des Ebenenbüschels im Isomorphieraum sei eine Erzeugende des Fundamentalkegels, dann fällt die Achse des reziprok polaren Ebenenbüschels mit dieser Erzeugenden zusammen. Die Kongruenzen C_r^q und C_t^s fallen zusammen und entarten in eine zerfallende Kongruenz.

Die beiden reziprok polaren R^2-Büschel fallen ebenfalls zusammen. Sie enthalten ∞^1 je in zwei reelle Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallende Regelscharen und eine in ein doppelt zu zählendes Strahlenbüschel zerfallende Regelschar. Dem doppelt zu zählenden Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Ebene allen zerfallenden Regelscharen gemein ist, entspricht

im Isomorphieraum die gemeinsame Achse der reziprok polaren Ebenenbüschel.

5. Geht schließlich die Achse des Ebenenbüschels im Bildraume durch die Kegelspitze, so lassen sich alle Ebenenbüschel, deren Achsen durch die Kegelspitze gehen, dem Ausgangsbüschel zuordnen. Die Zuordnung ist nicht mehr eindeutig.

Die entwickelten Ergebnisse lassen sich in folgender Weise anordnen:

27)

	C_v^u	C_r^q	C_t^s
1	hyperbolisch	hyperbolisch	hyperbolisch
2	hyperbolisch	elliptisch	elliptisch
3	hyperbolisch	parabolisch	parabolisch
4	hyperbolisch	zerfallend	zerfallend
5	elliptisch	hyperbolisch	elliptisch
6	elliptisch	elliptisch	hyperbolisch
7	elliptisch	parabolisch	parabolisch
8	parabolisch	elliptisch	parabolisch
9	parabolisch	hyperbolisch	parabolisch
10	parabolisch	parabolisch	zerfallend
11	parabolisch	zerfallend	zerfallend

In einer Arbeit von G. Haenzel[3]) findet sich eine Klassifikation der sekundären Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz, deren Ergebnisse in einer Tabelle zusammengestellt sind. Unsere Nummern 1—11 entsprechen bzw. den Nummern 1, 3, 9, 15, 4, 4, 10, 8, 7, 11, 18 jener Tabelle, während die übrigen Fälle infolge der andersartigen Fragestellung dieser Arbeit ausfallen.

Im folgenden wird eine analytische Formulierung der gefundenen Ergebnisse gegeben.

[3]) Haenzel, G.: Eine analytische Theorie der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz und deren Anwendung. Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle) Bd. 166 (1932) S. 176.

Die lineare Kongruenz C_v^u sei dargestellt als Schnitt der beiden linearen Komplexe

28)
$$\begin{cases} a_4 p_1 + a_5 p_2 + a_6 p_3 + a_1 p_4 + a_2 p_5 + a_3 p_6 = 0 \\ b_4 p_1 + b_5 p_2 + b_6 p_3 + b_1 p_4 + b_2 p_5 + b_3 p_6 = 0 . \end{cases}$$

Ihre Invarianten lauten:

28 a)
$$\begin{cases} J_{aa}^{uv} = a_4 a_1 + a_5 a_2 + a_6 a_3 \\ J_{ab}^{uv} = a_4 b_1 + a_5 b_2 + a_6 b_3 + a_1 b_4 + a_2 b_5 + a_3 b_6 \\ J_{bb}^{uv} = b_4 b_1 + b_5 b_2 + b_6 b_3 . \end{cases}$$

Positiver, verschwindender oder negativer Wert der Diskriminante $J_{ab}^2 - 4 J_{aa} J_{bb}$ entscheidet darüber, ob die Kongruenz hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch ist (Abschnitt II Nr. 4). Ein Γ-Büschel ihres polaren Raumes sei dargestellt durch:

29)
$$\begin{aligned} & a_4 p_1 + a_5 p_2 + a_6 p_3 + a_1 p_4 + a_2 p_5 + a_3 p_6 \\ & \quad + \lambda (\beta_4 p_1 + \beta_5 p_2 + \beta_6 p_3 + \beta_1 p_4 + \beta_2 p_5 + \beta_3 p_6) = 0 . \end{aligned}$$

Die Gleichung (29) bestimmt zusammen mit (28) einen $\mathfrak{R}^2$-Büschel im $\mathfrak{R}^3$-Raum der Kongruenz C_v^u. Der reziprok polare Γ-Büschel zu (29) lautet dann:

30)
$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 & \pi_6 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ \pi_1^* & \pi_2^* & \pi_3^* & \pi_4^* & \pi_5^* & \pi_6^* \end{vmatrix} = 0 .$$

Die Gleichungen (30) und (28) bestimmen den zu (29) und (28) reziprok polaren $\mathfrak{R}^2$-Büschel der Kongruenz.

Faßt man

$$\begin{aligned} a_4 p_1 + a_5 p_2 + a_6 p_3 + a_1 p_4 + a_2 p_5 + a_3 p_6 &= 0 \\ b_4 p_1 + b_5 p_2 + b_6 p_3 + b_1 p_4 + b_2 p_5 + b_3 p_6 &= 0 \\ a_4 p_1 + a_5 p_2 + a_6 p_3 + a_1 p_5 + a_2 p_5 + a_3 p_6 &= 0 \\ \beta_4 p_1 + \beta_5 p_2 + \beta_6 p_3 + \beta_1 p_4 + \beta_2 p_5 + \beta_3 p_6 &= 0 \end{aligned}$$

als Hyperebenen im fünfdimensionalen Raum der p_i auf, so lassen sich π_i und π_i^* ohne Beschränkung der Allgemeinheit von Gleichung (30) als zwei beliebige Sextupel der den vier Hyperebenen angehörenden eindimensionalen Mannigfaltigkeit wählen. Setzt man

$$\begin{vmatrix} a_i & a_k & a_l & a_m \\ b_i & b_k & b_l & b_m \\ \alpha_i & \alpha_k & \alpha_l & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_k & \beta_l & \beta_m \end{vmatrix} = \Delta_{iklm}$$

und wählt $\pi_5 = -1$; $\pi_6 = 0$; $\pi_5^* = 0$; $\pi_6^* = -1$, so ergeben sich die übrigen π_i und π_i^* als:

$$31)\quad \begin{cases} \pi_1 = \dfrac{\Delta_{2561}}{\Delta_{4561}}; & \pi_1^* = \dfrac{\Delta_{3561}}{\Delta_{4561}} \\[2ex] \pi_2 = \dfrac{\Delta_{4261}}{\Delta_{4561}}; & \pi_2^* = \dfrac{\Delta_{4361}}{\Delta_{4561}} \\[2ex] \pi_3 = \dfrac{\Delta_{4521}}{\Delta_{4561}}; & \pi_3^* = \dfrac{\Delta_{4531}}{\Delta_{4561}} \\[2ex] \pi_4 = \dfrac{\Delta_{4562}}{\Delta_{4561}}; & \pi_4^* = \dfrac{\Delta_{4563}}{\Delta_{4561}}. \end{cases}$$

Unter Benutzung von (31) geht (30) über in:

$$32)\quad \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ \Delta_{2561} & \Delta_{4261} & \Delta_{4521} & \Delta_{4562} & -\Delta_{4561} & 0 \end{vmatrix}$$

$$+\lambda \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ \Delta_{3561} & \Delta_{4361} & \Delta_{4531} & \Delta_{4563} & 0 & -\Delta_{4561} \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnen A_i bzw. B_i die zu p_{i+3} gehörigen Unterdeterminanten der Darstellung (32), so ergibt sich aus (32):

$$33)\quad \begin{cases} A_4 p_1 + A_5 p_2 + A_6 p_3 + A_1 p_4 + A_2 p_5 + A_6 p_6 \\ \qquad + \lambda(B_4 p_1 + B_5 p_2 + B_6 p_3 + B_1 p_4 + B_2 p_5 + B_3 p_6) = 0. \end{cases}$$

Setzt man

$$\begin{vmatrix} a_i & a_k & a_l & a_m \\ b_i & b_k & b_l & b_m \\ A_i & A_k & A_l & A_m \\ B_i & B_k & B_l & B_m \end{vmatrix} = \delta_{iklm},$$

so ergeben sich die den beiden reziprok polaren $\mathfrak{R}^2$-Büscheln (28), (29) und (28), (33) zugeordneten Leitstrahlenkongruenzen bzw. als Schnitte der Komplexe:

$$34)\quad C_r^q \begin{cases} \Delta_{4562} p_1 - \Delta_{4561} p_2 + \Delta_{2561} p_4 + \Delta_{4261} p_5 + \Delta_{4521} p_6 = 0 \\ \Delta_{4563} p_1 - \Delta_{4561} p_3 + \Delta_{3561} p_4 + \Delta_{4361} p_5 + \Delta_{4531} p_6 = 0 \end{cases}$$

$$35)\quad C_t^s \begin{cases} \delta_{4562} p_1 - \delta_{4561} p_2 + \delta_{2561} p_4 + \delta_{4261} p_5 + \delta_{4521} p_6 = 0 \\ \delta_{4563} p_1 - \delta_{4561} p_3 + \delta_{3561} p_4 + \delta_{4361} p_5 + \delta_{4531} p_6 = 0. \end{cases}$$

Die Invarianten J_{aa}^{qr}, J_{ab}^{qr}, J_{bb}^{qr} von C_r^q und die Invarianten J_{aa}^{st}, J_{ab}^{st}, J_{bb}^{st} von C_t^s ermöglichen zusammen mit den Invarianten J_{aa}^{uv}, J_{ab}^{uv}, J_{bb}^{uv} der Kongruenz C_v^u eine vollständige analytische Klassifikation der Leitstrahlenkongruenzen zweier reziprok polarer $\mathfrak{R}^2$-Büschel des $\mathfrak{R}^2$-Raumes der linearen Kongruenz. Die Nr. 27 entsprechende Tabelle lautet:

	C_v^u	C_r^q	C_t^s
	$(J_{ab}^{uv})^2-4\cdot J_{aa}^{uv}\cdot J_{bb}^{uv}>0$	$(J_{ab}^{qr})^2-4\cdot J_{aa}^{qr}\cdot J_{bb}^{qr}>0$	$(J_{ab}^{st})^2-4\cdot J_{aa}^{st}\cdot J_{bb}^{st}>$
	$(J_{ab}^{uv})^2-4\cdot J_{aa}^{uv}\cdot J_{bb}^{uv}>0$	$(J_{ab}^{qr})^2-4\cdot J_{aa}^{qr}\cdot J_{bb}^{qr}<0$	$(J_{ab}^{st})^2-4\cdot J_{aa}^{st}\cdot J_{bb}^{st}<$
	$(J_{ab}^{uv})^2-4\cdot J_{aa}^{uv}\cdot J_{bb}^{uv}>0$	$(J_{ab}^{qr})^2-4\cdot J_{aa}^{qr}\cdot J_{bb}^{qr}=0$	$(J_{ab}^{st})^2-4\ J_{aa}^{st}\cdot J_{bb}^{st}=$
	$(J_{ab}^{uv})^2-4\cdot J_{aa}^{uv}\cdot J_{bb}^{uv}>0$	$J_{aa}^{qr}=J_{aa}^{st}=J_{ab}^{qr}=J_{ab}^{st}=J_{bb}^{qr}=J_{bb}^{st}=0$	
36)	$(J_{ab}^{uv})^2-4\cdot J_{aa}^{uv}\cdot J_{bb}^{uv}<0$	$(J_{ab}^{qr})^2-4\ J_{aa}^{qr}\cdot J_{bb}^{qr}>0$	$(J_{ab}^{st})^2-4\ J_{aa}^{st}\cdot J_{bb}^{st}<$
	$(J_{ab}^{uv})^2-4\cdot J_{aa}^{uv}\cdot J_{bb}^{uv}<0$	$(J_{ab}^{qr})^2-4\cdot J_{aa}^{qr}\cdot J_{bb}^{qr}<0$	$(J_{ab}^{st})^2-4\ J_{aa}^{st}\cdot J_{bb}^{st}>$
	$(J_{ab}^{uv})^2-4\cdot J_{aa}^{uv}\cdot J_{bb}^{uv}<0$	$(J_{ab}^{qr})^2-4\ J_{aa}^{qr}\cdot J_{bb}^{qr}=0$	$(J_{ab}^{st})^2-4\ J_{aa}^{st}\cdot J_{bb}^{st}=$
	$(J_{ab}^{uv})^2-4\ J_{aa}^{uv}\cdot J_{bb}^{uv}=0$	$(J_{ab}^{qr})^2-4\ J_{aa}^{qr}\cdot J_{bb}^{qr}<0$	$(J_{ab}^{st})^2-4\ J_{aa}^{st}\cdot J_{bb}^{st}=$
	$(J_{ab}^{uv})^2-4\ J_{aa}^{uv}\cdot J_{bb}^{uv}=0$	$(J_{ab}^{qr})^2-4\ J_{aa}^{qr}\cdot J_{bb}^{qr}>0$	$(J_{ab}^{st})^2-4\ J_{aa}^{st}\cdot J_{bb}^{st}=$
	$(J_{ab}^{uv})^2-4\ J_{aa}^{uv}\cdot J_{bb}^{uv}=0$	$(J_{ab}^{qr})^2-4\ J_{aa}^{qr}\cdot J_{bb}^{qr}=0$	$(J_{aa}^{st})=J_{bb}^{st}=J_{ab}^{st}=$
	$(J_{ab}^{uv})^2-4\ J_{aa}^{uv}\cdot J_{bb}^{uv}=0$	$J_{aa}^{qr}=J_{aa}^{st}=J_{bb}^{qr}=J_{bb}^{st}=J_{ab}^{qr}=J_{ab}^{st}=0$	

VIII. Die stereographische Abbildung der isomorphen Fundamentalfläche.

Sieht man von metrischen Sonderfällen ab, so repräsentieren

$$37)\quad \begin{cases} \alpha) & p_2-p_5=0;\quad p_3+p_6=0 \\ \beta) & p_2-p_5=0;\quad p_3-p_6=0 \\ \gamma) & p_2-p_5=0;\quad p_3=0 \end{cases}$$

die projektiven Haupttypen der hyperbolischen, elliptischen und parabolischen Kongruenz. Unter Benutzung der Gleichungen (37 α, β, γ) nimmt die Fundamentalrelation

$$p_1p_4+p_2p_5+p_3p_6=0$$

die Gestalt

$$38)\quad \begin{cases} \alpha) & p_5^2-p_6^2+p_1p_4=0 \\ \beta) & p_5^2+p_6^2+p_1p_4=0 \\ \gamma) & p_5^2+p_1p_4=0 \end{cases}$$

an.

Setzt man

$$p_5=x_2,\quad p_6=x_1,\quad p_1=x_3+x_4,\quad p_4=x_3-x_4$$

und deutet x_1, x_2, x_3, x_4 als homogene Punktkoordinaten eines kartesischen Koordinatensystems im $\mathfrak{R}_3$, so ist die lineare hyperbolische, elliptische und parabolische Kongruenz bzw. auf

$$39)\quad \begin{cases} \alpha) & x_2^2-x_1^2+x_3^2-x_4^2=0 \\ \beta) & x_2^2+x_1^2+x_3^2-x_4^2=0 \\ \gamma) & x_2^2+x_3^2-x_4^2=0 \end{cases}$$

abgebildet. Jedem Punkt der Fläche zweiter Ordnung entspricht umkehrbar eindeutig ein Kongruenzstrahl. Setzt man

$$\frac{x_1}{x_4}=x,\quad \frac{x_2}{x_4}=y,\quad \frac{x_3}{x_4}=z,$$

so entspricht der hyperbolischen Kongruenz das einschalige Rotationshyperboloid

$$40)\quad \alpha)\quad y^2-x^2+z^2=1$$

der elliptischen Kongruenz die Einheitskugel

$$40)\quad \beta)\quad x^2+y^2+z^2=1$$

der parabolischen Kongruenz der Kreiszylinder

$$40)\quad \gamma)\quad y^2+z^2=1.$$

Alle projektiven Eigenschaften in der Kongruenz lassen sich als solche auf der zugehörigen isomorphen Fläche deuten, und umgekehrt gestattet jede projektive Eigenschaft auf der Fläche eine direkte Übertragung auf die Kongruenz. Jeder in der Kongruenz enthaltenen Regelschar von bestimmtem Grad und Geschlecht entspricht auf der Fläche eine Kurve von gleichem Grade und Geschlecht. Insbesondere sind den in der Kongruenz enthaltenen Regelscharen zweiter Ordnung die Kegelschnitte auf der Fläche zugeordnet. Sind zwei Regelscharen zweiter Ordnung zueinander autopolar, so sind die ihnen zugeordneten Kurven zweiter Ordnung auf der Fläche zueinander konjugiert, d. h. die Trägerebenen der Kurven sind im polaren Raume der Fundamentalfläche zueinander konjugiert.

Bildet man die Fundamentalflächen stereographisch auf die Ebene $z=0$ ab und wählt den Punkt $x=0$, $y=0$, $z=1$ als Projektionszentrum, so besteht zwischen den Punkten der Fläche und denen der Bildebene, in der ein rechtwinkliges Koordinatensystem $\xi=\frac{\xi_1}{\xi_3}$, $\eta=\frac{\xi_2}{\xi_3}$ gewählt sei, eine umkehrbar eindeutige Beziehung. Die ξ- bzw. η-Achse der Bildebene falle mit der x- bzw. y-Achse des räumlichen Koordinatensystems x, y, z zusammen. Dem Projektionszentrum, als singulärem Punkt der Abbildung, entspricht die Gesamtheit der Punkte $\xi_3=0$ in der Bildebene.

Mit $\varepsilon^2=+1$, $\varepsilon^2=-1$, $\varepsilon^2=0$ stellt

41) $$y^2-\varepsilon^2x^2+z^2=1$$

die der hyperbolischen, elliptischen und parabolischen Kongruenz isomorphe Fläche zweiten Grades dar. Unter Beibehaltung dieser Bezeichnungsweise lauten die für die drei Fälle geltenden Beziehungen zwischen den Punkten der Fläche und denen der Projektionsebene:

42) $$\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{2\,\xi_1}{-\varepsilon^2\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2};\quad y=\dfrac{2\,\xi_2}{-\varepsilon^2\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2};\\ \qquad z=\dfrac{-\varepsilon^2\xi_1^2+\xi_2^2-\xi_3^2}{-\varepsilon^2\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}. \end{array}\right.$$

Durch die stereographische Abbildung wird der Projektionsebene die Form

43) $\alpha)$ $\xi_2^2-\varepsilon^2\xi_1^2=0$; $\xi_3=0$ für die Längenmessung

und die duale Form

43) $$\beta)\quad \varepsilon^2u_2^2-u_1^2=0$$

für die Winkelmessung als Fundamentalgebilde aufgeprägt. $u_1:u_2:u_3$ sind die Geradenkoordinaten in der Bildebene. Die auf die Fundamentalgebilde (43α) und (43β) gegründete Metrik ist für die hyperbolische Kongruenz pseudoeuklidisch, für die elliptische Kongruenz euklidisch und für die parabolische Kongruenz dual parabolisch. Da die stereographische Projektion als projektive Verwandtschaft Grad und Geschlecht invariant läßt, so entspricht einer Regelschar der Kongruenz nach der stereographischen Projektion ihres auf der Fundamentalfläche gelegenen Bildes in der Projektionsebene eine Kurve von gleichem Grad und Geschlecht; so wie sich überhaupt alle projektiv invarianten Eigenschaften, die sich in der Regelschar auf die Erzeugende als Element beziehen, als projektiv invariante Eigenschaften der Kurve mit dem Kurvenpunkt als Element in der Projektionsebene wiederfinden.

Einer Regelschar zweiter Ordnung in der Kongruenz entspricht im Isomorphieraum der Schnitt einer Ebene

44) $$E\equiv Ax+By+Cz+D=0$$

mit der entsprechenden Fundamentalfläche. Nach der stereographischen Projektion erhält man als Bild für die Regelschar die Kurve zweiter Ordnung

45) $$C^2\equiv(-\varepsilon^2\xi_1^2+\xi_2^2)(C+D)+2A\xi_1\xi_3+2B\xi_2\xi_3+(D-C)\xi_3^2=0.$$

Den nicht zerfallenden Regelscharen zweiter Ordnung R^2

der hyperbolischen Kongruenz entsprechen die gleichseitigen Hyperbeln, deren Asymptoten durch die Punkte $1:1:0$ und $1:-1:0$ gehen,

der parabolischen Kongruenz entsprechen die Parabeln, die im Punkte $1:0:0$ die unendlichferne Gerade berühren,

der elliptischen Kongruenz entsprechen die reellen und imaginären Kreise der Bildebene.

Den in zwei reelle Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenden Regelscharen der hyperbolischen Kongruenz entsprechen die beiden durch die Punkte $1:1:0$ und $1:-1:0$ gehenden reellen Geraden der Ebene. Dem Doppelstrahl der zerfallenden Regelfläche entspricht der Schnittpunkt der Bildgeraden.

Den in zwei konjugiert imaginäre Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenden Regelscharen der elliptischen Kongruenz entsprechen die durch die Punkte $1:i:0$ und $1:-i:0$ gehenden isotropen Geraden. Dem reellen Doppelstrahl der zerfallenden Regelschar entspricht der reelle Schnittpunkt der beiden isotropen (konjugiert imaginären) Geraden.

Den in je zwei reelle, zusammenfallende, konjugiert imaginäre Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenden Regelscharen der parabolischen Kongruenz entsprechen die durch den Punkt $1:0:0$ gehenden reellen, zusammenfallenden, konjugiert imaginären Geradenpaare der Bildebene. In allen drei Fällen entsprechen den Kegelschnitten, deren Trägerebenen durch das Projektionszentrum gehen, nach der stereographischen Projektion Kurven zweiter Ordnung, die in eine reelle Gerade und die unendlich ferne Gerade zerfallen.

Unter Benutzung des Fundamentalgebildes (43 β)

$$\Phi(u,u) \equiv \varepsilon^2 u_2^2 - u_1^2 = 0$$

ergibt sich für den Winkel $\varphi(v,w)$ zwischen zwei Geraden $v_1 : v_2 : v_3$ und $w_1 : w_2 : w_3$ der Bildebene nach bekannten Sätzen der nichteuklidischen Geometrie

$$46) \qquad \varphi(v,w) = c' \ln \frac{\Phi(v,w) + \sqrt{\Phi(v,w)^2 - \Phi(v,v)\,\Phi(w,w)}}{\Phi(v,w) - \sqrt{\Phi(v,w)^2 - \Phi(v,v)\,\Phi(w,w)}}.$$

Wählt man die Maßkonstante $c' = \frac{-i}{2}$, so ergibt sich:

$$46\,a) \qquad \varphi(v,w) = \frac{-i}{2} \ln \frac{\varepsilon^2 v_2 w_2 - v_1 w_1 + \sqrt{(\varepsilon^2 v_2 w_2 - v_1 w_1)^2 - (\varepsilon^2 v_2^2 - v_1^2)(\varepsilon^2 w_2^2 - w_1^2)}}{\varepsilon^2 v_2 w_2 - v_1 w_1 - \sqrt{(\varepsilon^2 v_2 w_2 - v_1 w_1)^2 - (\varepsilon^2 v_2^2 - v_1^2)(\varepsilon^2 w_2^2 - w_1^2)}}.$$

Die Formel (46 a) verliert für $\varepsilon^2 = 0$, d. h. für die parabolische Kongruenz ihren Sinn; es ist daher notwendig, diesen Fall getrennt von den beiden anderen Fällen zu behandeln.

Sind

$$47) \qquad \begin{cases} E_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ E_2 \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen der Ebenen, die im Isomorphieraum die Bilder der Regelscharen zweiter Ordnung $\mathfrak{R}_1^2$ und $\mathfrak{R}_2^2$ tragen, so lauten nach (45) die Gleichungen der Bildkurven C_1^2 und C_2^2 in der Projektionsebene

$$48) \qquad \begin{cases} C_1^2 \equiv (-\varepsilon^2 \xi_1^2 + \xi_2^2)(C_1 + D_1) + 2 A_1 \xi_1 \xi_3 \\ \qquad\qquad + 2 B_1 \xi_2 \xi_3 + (D_1 - C_1)\xi_3^2 = 0 \\ C_2^2 \equiv (-\varepsilon^2 \xi_1^2 + \xi_2^2)(C_2 + D_2) + 2 A_2 \xi_1 \xi_3 \\ \qquad\qquad + 2 B_2 \xi_2 \xi_3 + (D_2 - C_2)\xi_3^2 = 0. \end{cases}$$

Sind $\xi_1' : \xi_2' : \xi_3'$ die Koordinaten des einen im Endlichen liegenden Schnittpunktes der Kurven C_1^2 und C_2^2, so ergeben sich die Geradenkoordinaten der beiden an C_1^2 und C_2^2 im Punkte $\xi_1' : \xi_2' : \xi_3'$ gelegten Tangenten als

$$v_1 = -\varepsilon^2 \xi_1' + \frac{A_1}{C_1 + D_1}\xi_3', \qquad v_2 = \xi_2' + \frac{B_1}{C_1 + D_1}\xi_3',$$

$$v_3 = \frac{A_1}{C_1 + D_1}\xi_1' + \frac{B_1}{C_1 + D_1}\xi_2' + \frac{D_1 - C_1}{C_1 + D_1}\xi_3';$$

$$w_1 = -\varepsilon^2 \xi_1' + \frac{A_2}{C_2 + D_2}\xi_3', \qquad w_2 = \xi_2' + \frac{B_2}{C_2 + D_2}\xi_3',$$

$$w_3 = \frac{A_2}{C_2 + D_2}\xi_1' + \frac{B_2}{C_2 + D_2}\xi_2' + \frac{D_2 - C_2}{C_2 + D_2}\xi_3'.$$

Es wird also:

$$49) \qquad \begin{cases} \Phi(v,v) = \dfrac{\xi_3'^2}{(C_1 + D_1)^2}\{-\varepsilon^2 D_1^2 + \varepsilon^2 C_1^2 + \varepsilon^2 B_1^2 - A_1^2\} \\ \qquad\qquad = \dfrac{\xi_3'^2}{(C_1 + D_1)^2}(II), \\ \Phi(w,w) = \dfrac{\xi_3'^2}{(C_2 + D_2)^2}\{-\varepsilon^2 D_2^2 + \varepsilon^2 C_2^2 + \varepsilon^2 B_2^2 - A_2^2\} \\ \qquad\qquad = \dfrac{\xi_3'^2}{(C_2 + D_2)^2}(II\,II), \\ \Phi(v,w) = \dfrac{\xi_3'^2}{(C_1 + D_1)(C_2 + D_2)}\{-\varepsilon^2 D_1 D_2 + \varepsilon^2 C_1 C_2 + \varepsilon^2 B_1 B_2 - A_1 A_2\} \\ \qquad\qquad = \dfrac{\xi_3'^2}{(C_1 + D_1)(C_2 + D_2)}(I\,II). \end{cases}$$

Durch Einsetzen von (49) in (46) erhält man für den Schnittwinkel φ der beiden Kurven C_1^2 und C_2^2 im Punkte $\xi_1' : \xi_2' : \xi_3'$:

$$50) \qquad \varphi(C_1^2, C_2^2) = -\frac{i}{2} \ln \frac{(I\,II) + \sqrt{(I\,II)^2 - (I\,I)(II\,II)}}{(I\,II) - \sqrt{(I\,II)^2 - (I\,I)(II\,II)}}.$$

Da der Winkel φ von den Koordinaten des Schnittpunktes unabhängig ist, ergibt sich insbesondere, daß die Schnittwinkel der Kurven C_1^2 und C_2^2 in den beiden im Endlichen gelegenen Schnittpunkten einander gleich sind. Sind die beiden Regelscharen $\mathfrak{R}_1^2$ und $\mathfrak{R}_2^2$ zueinander autopolar, so sind im Isomorphieraum die Trägerebenen E_1 und E_2 der zu $\mathfrak{R}_1^2$ und $\mathfrak{R}_2^2$ isomorphen Kurven zweiter Ordnung im polaren Raum der Fundamentalfläche zueinander konjugiert. Die Koeffizienten der Ebenengleichungen von E_1 und E_2 erfüllen daher die Bedingung:

$$51) \qquad -A_1 A_2 + \varepsilon^2 B_1 B_2 + \varepsilon^2 C_1 C_2 - \varepsilon^2 D_1 D_2 = 0.$$

Für die Bilder zweier autopolarer Regelscharen zweiter Ordnung wird daher

$$(I\,II) = 0$$

und damit

52) $$\varphi(C_1^2, C_2^2) = \frac{\pi}{2}.$$

Es ergibt sich also der Satz:

Den autopolaren Regelscharen zweiter Ordnung in der hyperbolischen oder elliptischen Kongruenz entsprechen in der Projektionsebene Kurven zweiter Ordnung, die sich orthogonal schneiden. Die Winkelmessung ist im hyperbolischen Falle pseudoeuklidisch, im elliptischen Falle euklidisch. Die Kurven zweiter Ordnung sind die pseudoeuklidischen bzw. euklidischen Kreise der Projektionsebene. Wir wenden uns zum Schlusse den Verhältnissen in der parabolischen Kongruenz zu.

Für $\varepsilon^2 = 0$ ergibt die Winkelform (50) für alle Wertequadrupel A, B, C, D für den Winkel φ den Wert Null. Vollzieht man aber in der üblichen Weise den Grenzübergang $\varepsilon^2 \to 0$ unter der Bedingung, daß

$$\lim_{\varepsilon^2 \to 0} - c'\varepsilon = \varkappa$$

ist, so erhält man eine brauchbare Winkelformel.

Faßt man φ als analytische Funktion von ε auf und ordnet das Argument des Logarithmus nach Potenzen von ε, so erhält man:

53) $$\varphi = c' \cdot \ln \frac{-A_1A_2 + \varepsilon^2(B_1B_2 + C_1C_2 - D_1D_2) + \varepsilon\sqrt{(A_2B_1 - A_1B_2)^2 + (A_2C_1 - A_1C_2)^2 - (A_2D_1 - A_1D_2)^2 + \varepsilon^2(\cdots)}}{-A_1A_2 + \varepsilon^2(B_1B_2 + C_1C_2 - D_1D_2) - \varepsilon\sqrt{(A_2B_1 - A_1B_2)^2 + (A_2C_1 - A_1C_2)^2 - (A_2D_1 - A_1D_2)^2 + \varepsilon^2(\cdots)}}$$

Unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von ε und nach Entwicklung der Logarithmen nach Potenzen von ε erhält man

54) $$\varphi = -c'\varepsilon \cdot \frac{1}{A_1A_2}\sqrt{(A_2B_1 - A_1B_2)^2 + (A_2C_1 - A_1C_2)^2 - (A_2D_1 - A_1D_2)^2}$$

Für $\varepsilon \to 0$, unter der Bedingung $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} - c'\varepsilon = \varkappa$, geht (54) über in

55) $$\varphi = \varkappa \cdot \frac{1}{A_1A_2}\sqrt{(A_2B_1 - A_1B_2)^2 + (A_2C_1 - A_1C_2)^2 - (A_2D_1 - A_1D_2)^2}.$$

Formel (55) stellt den dualparabolisch gemessenen Schnittwinkel der Bild-

kurven zweier in der parabolischen Kongruenz enthaltenen Regelscharen zweiter Ordnung dar, die durch

$$E_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$E_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

bestimmt sind.

Sind $\mathfrak{R}_1^2$ und $\mathfrak{R}_2^2$ zwei zueinander autopolare Regelscharen der Kongruenz, so ist notwendig und hinreichend, daß die Koeffizienten der sie bestimmenden Gleichungen

56) $$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

die Bedingungen

57) $$\begin{cases} A_1A_2 = 0 \\ B_1B_2 + C_1C_2 - D_1D_2 = 0 \end{cases}$$

erfüllen.

Ist $A_1 \neq 0$, so ist notwendigerweise $A_2 = 0$. Einer nicht zerfallenden Regelschar zweiter Ordnung in der Kongruenz, deren Bildkurve in der Projektionsebene durch die Gleichung

58) $$C_1^2 \equiv \xi_2^2(C_1 + D_1) + 2A_1\xi_1\xi_3 + 2B_1\xi_2\xi_3 + (D_1 - C_1)\xi_3^2 = 0$$

bestimmt ist, sind stets nur die in zwei reelle, zusammenfallende oder konjugiert imaginäre Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallende Regelscharen polar zugeordnet. Die Gleichungen ihrer Bildkurven in der Projektionsebene lauten:

59) $$C_2^2 \equiv \xi_2^2(C_2 + D_2) + 2B_2\xi_2\xi_3 + (D_2 - C_2)\xi_3^2 = 0.$$

Die Koeffizienten von (58) und (59) erfüllen die Bedingung:

60) $$B_1B_2 + C_1C_2 - D_1D_2 = 0.$$

Die Diskriminante $\frac{B_2^2 - D_2^2 + C_2^2}{(D_2 + C_2)^2} \gtreqless 0$ entscheidet darüber, ob das durch (59) dargestellte Geradenpaar reell, zusammenfallend oder konjugiert imaginär ist. Für die beiden Schnittwinkel der Bildkurven (58) und (59) ergibt sich wegen $A_2 = 0$:

61) $$\varphi(C_1^2, C_2^2) = \infty.$$

Damit erhält man den Satz:

Die Bildkurven zweier autopolarer Regelscharen der parabolischen Kongruenz schneiden sich in der Projektionsebene unter den Winkeln $\varphi_1 = \varphi_2 = \infty$. Die Winkelmessung ist dualparabolisch.

IX. Die Erzeugendentypen einer allgemeinen in der Kongruenz enthaltenen Regelschar.

Im folgenden werden die differentialgeometrischen Eigenschaften allgemeiner in der linearen Strahlenkongruenz enthaltener Regelscharen untersucht. Die Methode, die sich eng an die in den vorhergehenden Abschnitten zur Untersuchung der Polarität im R^2-Raum angewendete anschließt, gestattet auf analytischer Grundlage ganz allgemein das Verhalten eines der Regelschar angehörenden Strahles und seiner Umgebung zu charakterisieren.

Die allgemeine hyperbolische lineare Strahlenkongruenz sei dargestellt durch

$$62a)\qquad \begin{cases} p_2 - \dfrac{c}{m} p_5 = 0 \\ p_3 + c m p_6 = 0 . \end{cases}$$

Diese Darstellung versagt lediglich bei der axial translatorischen Kongruenz, die deshalb getrennt behandelt werden muß. Die entsprechende Normalform der elliptischen Kongruenz lautet:

$$62\,b)\qquad \begin{cases} p_2 - \dfrac{c}{m} p_5 = 0 \\ p_3 - c m p_6 = 0 . \end{cases}$$

Beide Normalformen lassen sich zusammenfassen in die Form

$$63)\qquad \begin{cases} p_2 - \dfrac{c}{m} p_5 = 0 \\ p_3 + c m p_6 = 0 , \end{cases}$$

wo reelles c und m die hyperbolische, rein imaginäres c und m die elliptische Kongruenz kennzeichnet.

Bei der angegebenen Normalform gehen die Brennlinien durch die Punkte

$$z = +c, \quad z = -c$$

parallel zur x, y-Ebene eines rechtwinkligen kartesischen x, y, z-Koordi-

natensystems. Die x, z-Ebene halbiert den Schränkungswinkel 2α der Brennlinien, und es ist

$$\operatorname{tg} \alpha = m .$$

Demnach fällt der Hauptstrahl c_h der Kongruenz mit der z-Achse zusammen; der unendlichferne Kongruenzstrahl c_∞ liegt in der x, y-Ebene. Die x, y-Ebene ist die Fluchtebene des mit der Kongruenz verbundenen geschart involutorischen Raumes. Das Vorzeichen von c entscheidet darüber, ob die Brennlinien der Kongruenz rechts oder links gewunden sind.

Eine herausgegriffene (algebraische oder transzendente) Regelschar R der Kongruenz ist analytisch bestimmt, wenn die Linienkoordinaten ihrer Erzeugenden als Funktionen $p_i(t)$ eines reellen Parameters t gegeben sind. Für alle Werte von t erfüllen die Funktionen $p_i(t)$ neben der Fundamentalrelation

$$p_1(t)\, p_4(t) + p_2(t)\, p_5(t) + p_3(t)\, p_6(t) = 0$$

die Gleichungen

$$64)\qquad \begin{cases} p_2(t) - \dfrac{c}{m} p_5(t) = 0 \\ p_3(t) + c m p_6(t) = 0 . \end{cases}$$

Über die Funktionen $p_i(t)$ sei vorausgesetzt, daß ihre zweiten Ableitungen nach t existieren und stückweise stetig sind. Solche Erzeugenden, für die sämtliche erste oder zweite Ableitungen oder gleichzeitig beide ersten Ableitungen der $p_i(t)$ nach t verschwinden, werden als besondere (singuläre) Erzeugendentypen von der Behandlung ausgeschlossen.

Eliminiert man aus der Fundamentalrelation mittels Gleichung (64) die Funktionen $p_2(t)$ und $p_3(t)$, und deutet man

$$p_5 = \xi_1 ;\ p_6 = \xi_2 ;\ p_1 = \xi_3 ;\ p_4 = \xi_4$$

als homogene Punktkoordinaten eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems

$$\xi = \frac{\xi_1}{\xi_4} ;\ \eta = \frac{\xi_2}{\xi_4} ;\ \zeta = \frac{\xi_3}{\xi_4} ,$$

so entspricht jeder Regelschar R der Kongruenz im Raume der ξ, η, ζ eine auf der Fundamentalfläche zweiter Ordnung

$$65)\qquad \frac{c}{m} \xi^2 - c m \eta^2 + \zeta = 0$$

liegende Kurve C mit der Parameterdarstellung $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$.

In jedem regulären Punkte t_0 der Kurve C läßt sich eine die Kurve C oskulierende Kurve zweiter Ordnung C^2 bestimmen. Die Kurve C^2 wird durch die Schmiegungsebene der Kurve C in t_0 aus der Fundamentalfläche (65) ausgeschnitten. Der Kurve C^2 entspricht im Linienraum die in der Kongruenz enthaltene Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$, welche die Regelschar $\mathfrak{R}$ in der Erzeugenden t_0 oskuliert und mit $\mathfrak{R}$ drei Nachbarerzeugende gemein hat. Aus dem Charakter der oskulierenden Regelschar $\mathfrak{R}^2$ und der besonderen Lage des Regelstrahles $p_i(t_0)$ auf ihr läßt sich das Verhalten der Regelschar $\mathfrak{R}$ in der Nachbarschaft von t_0 vollständig diskutieren.

Die oskulierende Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$ ist immer als Schnitt eines dem Γ-Raum der Kongruenz angehörigen Komplexes Γ^0 mit der linearen Kongruenz darstellbar. Sind t_0, t_1, t_2 die Parameterwerte dreier Nachbarerzeugenden der Regelschar, so ergibt sich nach einem Grenzübergang t_1 gegen t_0 und t_2 gegen t_0 für den Komplex Γ^0 die Form:

$$66)\qquad \Gamma^0 = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \\ p_1(t_0) & p_2(t_0) & p_3(t_0) & p_4(t_0) & p_5(t_0) & p_6(t_0) \\ p_1'(t_0) & p_2'(t_0) & p_3'(t_0) & p_4'(t_0) & p_5'(t_0) & p_6'(t_0) \\ p_1''(t_0) & p_2''(t_0) & p_3''(t_0) & p_4''(t_0) & p_5''(t_0) & p_6''(t_0) \\ 0 & -\frac{c}{m} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & cm & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Er heiße der die Regelschar $\mathfrak{R}$ in t_0 „oskulierende Komplex" des Γ-Raumes. Der oskulierende Komplex bestimmt umgekehrt zusammen mit

$$p_2 - \frac{c}{m} p_5 = 0; \quad p_3 + cm p_6 = 0$$

die in t_0 oskulierende Regelschar $\mathfrak{R}^2$.

Entwickelt man Γ^0 nach den Elementen der ersten Zeile der Determinante und bedenkt, daß

$$67)\qquad \begin{cases} p_2(t_0) - \frac{c}{m} p_5(t_0) = 0; & p_3(t_0) + cm p_6(t_0) = 0 \\ p_2'(t_0) - \frac{c}{m} p_5'(t_0) = 0; & p_3'(t_0) + cm p_6'(t_0) = 0 \\ p_2''(t_0) - \frac{c}{m} p_5''(t_0) = 0; & p_3''(t_0) + cm p_6''(t_0) = 0 \end{cases}$$

gilt, so wird

$$\Gamma^0 \equiv -4c^2 \begin{vmatrix} p_4(t_0) & p_5(t_0) & p_6(t_0) \\ p_4'(t_0) & p_5'(t_0) & p_6'(t_0) \\ p_4''(t_0) & p_5''(t_0) & p_6''(t_0) \end{vmatrix} p_1 - 2cm \begin{vmatrix} p_1(t_0) & p_4(t_0) & p_6(t_0) \\ p_1'(t_0) & p_4'(t_0) & p_6'(t_0) \\ p_1''(t_0) & p_4''(t_0) & p_6''(t_0) \end{vmatrix} p_2$$

$$68)\qquad -2\frac{c}{m} \begin{vmatrix} p_1(t_0) & p_4(t_0) & p_5(t_0) \\ p_1'(t_0) & p_4'(t_0) & p_5'(t_0) \\ p_1''(t_0) & p_4''(t_0) & p_5''(t_0) \end{vmatrix} p_3 + 4c^2 \begin{vmatrix} p_1(t_0) & p_5(t_0) & p_6(t_0) \\ p_1'(t_0) & p_5'(t_0) & p_6'(t_0) \\ p_1''(t_0) & p_5''(t_0) & p_6''(t_0) \end{vmatrix} p_4$$

$$-2c^2 \begin{vmatrix} p_1(t_0) & p_4(t_0) & p_6(t_0) \\ p_1'(t_0) & p_4'(t_0) & p_6'(t_0) \\ p_1''(t_0) & p_4''(t_0) & p_6''(t_0) \end{vmatrix} p_5 + 2c^2 \begin{vmatrix} p_1(t_0) & p_4(t_0) & p_5(t_0) \\ p_1'(t_0) & p_4'(t_0) & p_5'(t_0) \\ p_1''(t_0) & p_4''(t_0) & p_5''(t_0) \end{vmatrix} p_6$$

Setzt man

$$\begin{vmatrix} p_i(t_0) & p_k(t_0) & p_l(t_0) \\ p_i'(t_0) & p_k'(t_0) & p_l'(t_0) \\ p_i''(t_0) & p_k''(t_0) & p_l''(t_0) \end{vmatrix} = \{p_i(t_0),\ p_k(t_0),\ p_l(t_0)\};$$

so lautet die zu Γ^0 isomorphe Ebene E im Raume der $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$:

$$69)\qquad \begin{aligned} E \equiv & -\{p_1(t_0)\, p_4(t_0)\, p_6(t_0)\}\,\xi_1 + \{p_1(t_0)\, p_4(t_0)\, p_5(t_0)\}\,\xi_2 \\ & -\{p_4(t_0)\, p_5(t_0)\, p_6(t_0)\}\,\xi_3 + \{p_1(t_0)\, p_5(t_0)\, p_6(t_0)\}\,\xi_4 = 0. \end{aligned}$$

E ist die Schmiegungsebene der Kurve C im Punkte t_0. Die Schnittkurve C^2 von E mit der Fundamentalfläche oskuliert die Kurve in t_0.

Mit Hilfe der dreireihigen Determinanten

$$\{p_1(t_0)\, p_4(t_0)\, p_6(t_0)\};\quad \{p_1(t_0)\, p_4(t_0)\, p_5(t_0)\};$$
$$\{p_4(t_0)\, p_5(t_0)\, p_6(t_0)\};\quad \{p_1(t_0)\, p_5(t_0)\, p_6(t_0)\}$$

läßt sich eine vollständige analytische Diskussion der Erzeugendentypen durchführen.

1. Die regulären und orthoiden Erzeugenden.

Sind die Koeffizienten des Oskulationskomplexes Γ^0 sämtlich von Null verschieden, so ist die von Γ^0 aus der Kongruenz ausgeschnittene Regelfläche zweiter Ordnung ein einschaliges Hyperboloid, dessen Gleichung sich nach Nr. (14) als

$$70)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{R}^2 \equiv\ & cm a_4 x^2 - \frac{c}{m} a_4 y^2 - a_1 z^2 + a_1 c^2 - a_6 xz - a_5 yz + cm a_5 x \\ & + \frac{c}{m} a_6 y = 0 \end{aligned}$$

ergibt. Hierin bedeuten:

70 a) $a_1 = \{p_1 p_5 p_6\}$; $a_5 = \{p_1 p_4 p_6\}$; $a_6 = \{p_1 p_4 p_5\}$; $a_4 = \{p_4 p_5 p_6\}$.
Der Strahl $p_i(t_0)$ ist eine reguläre Erzeugende.

Fällt speziell die Erzeugende t_0 mit einer orthoiden Erzeugenden des Oskulationshyperboloides $\mathfrak{R}^2$ zusammen, so ist auch $p_i(t_0)$ eine orthoide Erzeugende der Regelschar $\mathfrak{R}$. Die Entscheidung über das Eintreffen dieses Falles läßt sich mittels der Invarianten der Koeffizientenmatrix

$$71)\qquad \begin{vmatrix} c m a_4 & 0 & -a_6 & c m a_5 \\ 0 & -\frac{c}{m} a_4 & -a_5 & +\frac{c}{m} a_6 \\ -a_6 & -a_5 & -a_1 & 0 \\ +c m a_5 & +\frac{c}{m} a_6 & 0 & +a c^2 \end{vmatrix}$$

der Oskulationsregelschar $\mathfrak{R}^2$ allein treffen.

2. Die Wendeerzeugende.

Wird der Koeffizient $\{p_4 p_5 p_6\}$ des Oskulationskomplexes

$$\Gamma^0 \equiv -4c^2\{p_4 p_5 p_6\} p_1 - 2cm\{p_1 p_4 p_6\} p_2 - 2\frac{c}{m}\{p_1 p_4 p_5\} p_3$$
$$+4c^2\{p_1 p_5 p_6\} p_4 - 2c^2\{p_1 p_4 p_6\} p_5 + 2c^2\{p_1 p_4 p_5\} p_6 = 0$$

Null, so nimmt die isomorphe Ebene E die Gestalt

$$72)\qquad -\{p_1 p_4 p_6\}\xi_1 + \{p_1 p_4 p_5\}\xi_2 + \{p_1 p_5 p_6\}\xi_4 = 0$$

an.

Die der oskulierenden Regelschar $\mathfrak{R}^2$ isomorphe Kurve C^2 geht durch den unendlichfernen Punkt $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = 0:0:1:0$ des Fundamentalparaboloides

$$72\text{ a})\qquad \frac{c}{m}\xi_1^2 - cm\,\xi_2^2 + \xi_3\xi_4 = 0.$$

Da diesem Punkte im Linienraum der unendlichferne Kongruenzstrahl

$$c_\infty \equiv p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6 = 1:0:0:0:0:0$$

entspricht, so ist die oskulierende Regelschar $\mathfrak{R}^2$ demnach ein Paraboloid. Die Erzeugende $p_i(t_0)$ der Regelschar $\mathfrak{R}$ ist eine Wendeerzeugende.

Die Gleichung der in $p_i(t_0)$ oskulierenden Regelschar $\mathfrak{R}^2$ lautet:

$$73)\qquad \mathfrak{R}^2 \equiv -a_1 z^2 - a_6 x z - a_5 y z + c m a_5 x + \frac{c}{m} a_6 y + a_1 c^2 = 0.$$

Hierin sind:

73 a) $a_1 = \{p_1 p_5 p_6\}$; $a_5 = \{p_1 p_4 p_6\}$; $a_6 = \{p_1 p_4 p_5\}$; $a_4 = \{p_4 p_5 p_6\}$.
Der Stellungsvektor $\bar{\nu} = \nu_x i + \nu_y j + \nu_z k$ der Richtebene der Wendeerzeugenden t_0 und ihrer Nachbarerzeugenden ergibt sich aus den Parametern

$$74)\qquad n = \frac{\{p_1 p_4 p_5\}}{\{p_1 p_4 p_6\}}; \quad p = \frac{\{p_1 p_5 p_6\}}{\{p_1 p_4 p_6\}}$$

der Oskulationsregelschar $\mathfrak{R}^2$ wie folgt.

Sind

$$75)\qquad \begin{cases} p_2 - \frac{c}{m} p_5 = 0; \quad p_3 + c m p_6 = 0; \\ -2cm p_2 - 2\frac{c}{m} n p_3 + 4c^2 p p_4 - 2c^2 p_5 + 2c^2 n p_6 = 0 \end{cases}$$

die drei die Regelschar $\mathfrak{R}^2$ bestimmenden Komplexe, so ergeben sich die Linienkoordinaten a_i der Leitstrahlen dieser Regelschar als:

$$76)\qquad \begin{cases} a_1 = 4c^2 p; \quad a_2 = -2c^2 - \lambda\frac{c}{m}; \quad a_3 = 2c^2 n + \mu c m; \\ a_4 = 0; \quad a_5 = -2cm + \lambda; \quad a_6 = -2\frac{c}{m} n + \mu. \end{cases}$$

Die Parameter λ und μ erfüllen die Bedingung

$$76\text{ a})\qquad \left(-2c^2 - \lambda\frac{c}{m}\right)(-2cm + \lambda) + (2c^2 n + \mu c m)\left(-2\frac{c}{m} n + \mu c m\right) = 0.$$

Wählt man

$$\lambda = -2cm; \qquad \mu = -\frac{2cn}{m},$$

so erhält man mit diesen Parameterwerten den in der Fluchtebene $z = 0$ der Kongruenz liegenden Leitstrahl des Paraboloides $\mathfrak{R}^2$. Seine Linienkoordinaten lauten:

$$77)\qquad \begin{cases} a_1 = 4c^2 p; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = 0; \\ a_4 = 0; \quad a_5 = -4cm; \quad a_6 = -\frac{4cn}{m}. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich die Gleichung des Leitstrahles in Punktkoordinaten als:

$$77\text{ a})\qquad y = -\frac{m^2}{n} x - \frac{cm}{n} p; \quad z = 0.$$

Der geschart involutorische Raum der Kongruenz erzeugt eine involutorische Paarung der Leitstrahlen des Paraboloides. Die Fixelemente der Involution sind die Brennlinien der Kongruenz. Die Involution ist daher für die hyperbolische Kongruenz hyperbolisch, für die elliptische Kongruenz elliptisch. Dem in der Fluchtebene $z=0$ liegenden Leitstrahle l_i ist der unendlichferne Leitstrahl c_∞^L des Paraboloides durch die Involution zugeordnet. Da die Richtebene der Erzeugenden des Paraboloides zu jeder beliebigen Erzeugenden desselben parallel ist und den unendlichfernen Leitstrahl c_∞^L enthält, so ist sie auch parallel zu jeder Geraden g, die zum Leitstrahl c_∞^L parallel ist. Alle Geraden g haben mit dem unendlichfernen Leitstrahl c_∞^L des Paraboloides auf dem unendlichfernen Kongruenzstrahl c_∞ den Punkt $P(x_1:x_2:0:0)$ gemein. Der Punkt P und der unendlichferne Punkt $P'\left(1:-\frac{m^2}{n}:0:0\right)$ des in der Fluchtebene liegenden Leitstrahles l_i werden durch die unendlichfernen Punkte $\mathfrak{B}_1(1:m:0:0)$ und $\mathfrak{B}_2(1:-m:0:0)$ der Brennlinien der Kongruenz harmonisch getrennt.

Die Geraden

$$y=\frac{x_2}{x_1}x; \qquad y=-\frac{m^2}{n}x$$

werden daher harmonisch durch die Geraden

$$y=mx; \qquad y=-mx$$

getrennt.

Daraus ergibt sich für die homogenen Punktkoordinaten des Punktes P:

$$x_1:x_2:0:0=-1:n:0:0.$$

Die Geraden g sind daher parallel zu der Geraden

$$y+nx=0.$$

Daraus folgt, daß der Stellungsvektor $\bar{\nu}$ der Richtebene senkrecht zum Vektor

$$-\mathfrak{i}+n\mathfrak{j}$$

ist; und da er ferner senkrecht zum Richtungsvektor

$$-\frac{p}{n}\mathfrak{i}+\mathfrak{k}$$

einer beliebig wählbaren Erzeugenden

$$p_1:p_2:p_3:p_4:p_5:p_6=-\frac{p^2mc}{n^2}:0:-\frac{mc}{n}p:-1:0:\frac{p}{n}$$

des Paraboloides ist, so ergibt sich für ihn:

78 a) $$\bar{\nu}=\nu_x\mathfrak{i}+\nu_y\mathfrak{j}+\nu_z\mathfrak{k}=\begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ -1 & n & 0 \\ -\frac{p}{n} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

78) $$\bar{\nu}=n\mathfrak{i}+\mathfrak{j}+p\mathfrak{k}.$$

Man erhält damit den Satz:

Ist für einen Parameterwert t_0 die Determinante

$$\{p_4(t_0),\ p_5(t_0),\ p_6(t_0)\}=0,$$

so ist die zu t_0 gehörende Erzeugende der Regelschar $\mathfrak{R}$ eine Wendeerzeugende. Die Komponenten ν_x, ν_y, ν_z des Stellungsvektors der Richtebene sind bestimmt durch:

$$\nu_x:\nu_y:\nu_z$$
$$=\{p_1(t_0),p_4(t_0),\ p_5(t_0)\}:\{p_1(t_0),p_4(t_0),\ p_6(t_0)\}:\{p_1(t_0),p_5(t_0),\ p_6(t_0)\}.$$

Projiziert man im Isomorphieraum die der Regelschar $\mathfrak{R}$ entsprechende Kurve C senkrecht auf die ξ, η-Ebene, so besitzt die Projektionskurve von C in Punkten, die Wendeerzeugenden entsprechen, Wendepunkte; die Wendetangente ist das Bild der Schmiegungsebene E.

3. Die orthoide Wendeerzeugende.

Werden für einen Parameterwert t_0 die Koeffizienten $\{p_4p_5p_6\}$ und $\{p_1p_5p_6\}$ des Oskulationskomplexes

$$\Gamma^0\equiv-4c^2\{p_4p_5p_6\}p_1-2cm\{p_1p_4p_6\}p_2-2\frac{c}{m}\{p_1p_4p_5\}p_3$$
$$+4c^2\{p_1p_5p_6\}p_4-2c^2\ \{p_1p_4p_6\}p_5+2c^2\{p_1p_4p_5\}p_6=0$$

Null, so nimmt die dem Komplex Γ^0 isomorphe Ebene E die Gestalt

79) $$E\equiv-\{p_1p_4p_6\}\xi_1+\{p_1p_4p_5\}\xi_2=0$$

an.

Die der oskulierenden Regelschar $\mathfrak{R}^2$ entsprechende Kurve C^2 geht durch den unendlichfernen Punkt $\xi_1:\xi_2:\xi_3:\xi_4=0:0:1:0$ und durch den Punkt $\xi_1:\xi_2:\xi_3:\xi_4=0:0:0:1$ des Fundamentalparaboloides. Die oskulierende Regelschar $\mathfrak{R}^2$ geht also durch den unendlichfernen Kongruenzstrahl c_∞ und den ihn senkrecht kreuzenden Hauptstrahl der Kongruenz. Die oskulierende Regelschar

80) $$\mathfrak{R}^2 \equiv -a_6 x z - a_5 y z + c m a_5 x + \frac{c}{m} a_6 y = 0$$

mit $a_6 = \{p_1 p_4 p_5\}$; $a_5 = \{p_1 p_4 p_6\}$ ist ein gleichseitiges Paraboloid. Die Erzeugende $p_i(t_0)$ ist daher eine orthoide Wendeerzeugende. Der Stellungsvektor ihrer Richtebene ist bestimmt durch

81) $$\nu_x : \nu_y : \nu_z = \{p_1(t_0), p_4(t_0), p_5(t_0)\} : \{p_1(t_0), p_4(t_0), p_6(t_0)\} : 0 .$$

Projiziert man die der Regelschar $\mathfrak{R}$ isomorphe Kurve C senkrecht auf die ξ, η-Ebene, so hat die Projektionskurve in Punkten, die orthoiden Wendeerzeugenden entsprechen, Wendepunkte, deren Wendetangente durch den Koordinatenanfangspunkt $\xi = \eta = \xi = 0$ gehen.

4. Die Torsallinie.

Erfüllen die Koeffizienten des Oskulationskomplexes

$$\Gamma^0 \equiv -4c^2\{p_4 p_5 p_6\} p_1 - 2cm\{p_1 p_4 p_6\} p_2 - 2\frac{c}{m}\{p_1 p_4 p_5\} p_3$$
$$+ 4c^2\{p_1 p_5 p_6\} p_4 - 2c^2\{p_1 p_4 p_6\} p_5 + 2c^2\{p_1 p_4 p_5\} p_6 = 0$$

die Bedingung

82) $$\frac{m}{c}\{p_1 p_4 p_6\}^2 - \frac{1}{cm}\{p_1 p_4 p_5\}^2 - 4\{p_1 p_5 p_6\}\{p_4 p_5 p_6\} = 0$$

für einen Parameterwert t_0, so ist die zu Γ^0 isomorphe Ebene

83) $$E \equiv -\{p_1 p_4 p_6\}\xi_1 + \{p_1 p_4 p_5\}\xi_2 - \{p_4 p_5 p_6\}\xi_3 + \{p_1 p_5 p_6\}\xi_4 = 0$$

Tangentialebene des Fundamentalparaboloides. Ihre Berührpunktkoordinaten lauten:

84) $$\xi_1' : \xi_2' : \xi_3' : \xi_4' = \frac{m}{c}\{p_1 p_4 p_6\} : \frac{1}{cm}\{p_1 p_4 p_5\} : 2\{p_1 p_5 p_6\} : -2\{p_4 p_5 p_6\}.$$

Wegen der über die Funktionen $p_i(t)$ getroffenen Voraussetzungen kann dieser Fall nicht in der elliptischen Kongruenz auftreten, denn dann würde in ihr für t_0 eine isolierte Erzeugende vorliegen, die anfangs von den Untersuchungen ausgeschlossen wurde.

Im Falle der hyperbolischen Kongruenz enthält die Schmiegungsebene E der Kurve C die durch $\xi_1' : \xi_2' : \xi_3' : \xi_4'$ gehenden reellen Erzeugenden des Fundamentalparaboloides

$$\frac{m}{c}\xi_1^2 - cm\,\xi_2^2 + \xi_3 \xi_4 = 0 .$$

Demnach gehört im Linienraum die Erzeugende $p_i(t_0)$ und ihre Nachbarerzeugende dem ebenen Strahlenbüschel erster Ordnung

85) $$\left|\begin{array}{ll} (\sigma p_1(t_0) + \tau 4c^2\{p_1 p_5 p_6\}); & (\sigma p_2(t_0) - \tau 2c^2\{p_1 p_4 p_6\}; \\ (\sigma p_3(t_0) + \tau 2c^2\{p_1 p_4 p_5\}); & (\sigma p_4(t_0) - \tau 4c^2\{p_4 p_5 p_6\}; \\ (\sigma p_5(t_0) - \tau 2cm\{p_1 p_4 p_6\}); & \left(\sigma p_6(t_0) - \tau 2\frac{c}{m}\{p_1 p_4 p_5\}\right) \end{array}\right.$$

an. Dabei sind σ und τ zwei reelle Parameter, deren Verhältnis von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft.

Es sei

$$4c^2\{p_1 p_5 p_6\} = q_1; \quad -2c^2\{p_1 p_4 p_6\} = q_2; \quad 2c^2\{p_1 p_4 p_5\} = q_3;$$
$$-4c^2\{p_4 p_5 p_6\} = q_4; \quad -2cm\{p_1 p_4 p_5\} = q_5; \quad -2\frac{c}{m}\{p_1 p_4 p_5\} = q_6 .$$

Die Schnittbedingung der beiden Strahlen p_i und q_i nimmt die Gestalt

$$\Omega(p_i q_i) = 4c^2 \begin{vmatrix} p_4 & p_1 & p_5 & p_6 \\ p_4 & p_1 & p_5 & p_6 \\ p_4' & p_1' & p_5' & p_6' \\ p_4'' & p_1'' & p_5'' & p_6'' \end{vmatrix} = 0$$

an.

Für t_0 liegt eine reguläre Torsallinie vor. Der Kuspidalpunkt der Torsallinie ist das Zentrum des ebenen Büschels

$$\sigma p_i(t_0) + \tau q_i(t_0).$$

In einer hyperbolischen Kongruenz liegt daher der Kuspidalpunkt einer Torsallinie stets auf einer der beiden Brennlinien der Kongruenz.

Die zur Erzeugenden t_0 gehörige Torsalebene bestimmt sich aus den p_i und q_i wie folgt:

Es sei $\bar{\varrho}$ der Ortsvektor des Schnittpunktes der beiden Strahlen p_i und q_i, und es sei $\bar{R}$ der Ortsvektor der durch p_i und q_i bestimmten Ebene T. Werden unter $\bar{\sigma}_1$ und $\bar{\sigma}_2$ die Richtungsvektoren der Strahlen p_i und q_i verstanden, so lautet die Gleichung der Ebene T:

$$\alpha) \quad T \equiv (\bar{R} - \bar{\varrho})[\bar{\sigma}_1 \times \bar{\sigma}_2] = 0$$

mit $\bar{\sigma}_1 = q_6 \mathrm{i} - q_5 \mathrm{j} + q_4 \mathrm{k}$; $\bar{\sigma}_2 = p_6 \mathrm{i} - p_5 \mathrm{j} + p_4 \mathrm{k}$.

Aus (α) folgt: $\bar{R} \cdot [\bar{\sigma}_1 \times \bar{\sigma}_2] - \bar{\varrho} \cdot [\bar{\sigma}_1 \times \bar{\sigma}_2] = 0$

oder $\bar{R} \cdot [\bar{\sigma}_1 \times \bar{\sigma}_2] - \bar{\sigma}_2 [\bar{\varrho} \times \bar{\sigma}_1] = 0$.

Nun ist: $[\bar{\sigma}_1 \times \bar{\sigma}_2] = \begin{vmatrix} q_4 & q_5 \\ p_4 & p_5 \end{vmatrix} \cdot \mathfrak{i} + \begin{vmatrix} q_4 & q_6 \\ p_4 & q_6 \end{vmatrix} \cdot \mathfrak{j} + \begin{vmatrix} q_5 & q_6 \\ p_5 & p_6 \end{vmatrix} \cdot \mathfrak{k}$

und $$[\bar{\varrho} \times \bar{\sigma}_1] = q_3\,\mathfrak{i} - q_2\,\mathfrak{j} + q_1\,\mathfrak{k}.$$

Die Gleichung der Torsalebene T lautet daher:

$$T = x \cdot \begin{vmatrix} q_4 & q_5 \\ p_4 & p_5 \end{vmatrix} + y \cdot \begin{vmatrix} q_4 & q_6 \\ p_4 & p_6 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} q_5 & q_6 \\ p_5 & p_6 \end{vmatrix} - (q_3 p_6 + q_2 p_5 + q_1 p_4) = 0,$$

oder auch wegen

$$q_1 p_4 + q_2 p_5 + q_3 p_6 + q_4 p_1 + q_5 p_2 + q_6 p_3 = 0$$

$$T \equiv x \cdot \begin{vmatrix} p_4 p_5 \\ q_4\, q_5 \end{vmatrix} + y \cdot \begin{vmatrix} p_4 p_6 \\ q_4\, q_6 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} p_5 p_6 \\ q_5\, q_6 \end{vmatrix} - (p_1 q_4 + p_2 q_5 + p_3 q_6) = 0.$$

Die Ebenenkoordinaten der Torsalebene T ergeben sich daher als:

$$86)\quad \begin{cases} u_1 = \left(4\,c^2 p_5(t_0)\,\{p_4 p_5 p_6\} - 2\,c\,m\,p_4(t_0)\,\{p_1 p_4 p_6\}\right) \\ u_2 = \left(4\,c^2 p_6(t_0)\,\{p_4 p_5 p_6\} - 2\,\dfrac{c}{m}\,p_4(t_0)\,\{p_1 p_4 p_5\}\right) \\ u_3 = \left(2\,c\,m\,p_6(t_0)\{p_1 p_4 p_6\} - 2\,\dfrac{c}{m}\,p_5(t_0)\,\{p_1 p_4 p_5\}\right) \\ u_4 = \left(4\,c^2 p_1(t_0)\{p_4 p_5 p_6\} + 2\,c\,m\,p_2(t_0)\{p_1 p_4 p_6\} + 2\,\dfrac{c}{m}\,p_3(t_0)\{p_1 p_4 p_5\}\right). \end{cases}$$

Der Kuspidalpunkt K ergibt sich als Durchstoßpunkt der nicht in der Torsalebene T liegenden Brennlinie mit T.

5. Die Wendetorsallinie.

Erfüllen die Koeffizienten des Oskulationskomplexes die Bedingung

$$87)\quad \frac{m}{c}\{p_1 p_4 p_6\}^2 - \frac{1}{c\,m}\{p_1 p_4 p_5\}^2 - 4\,\{p_1 p_5 p_6\}\{p_4 p_5 p_6\} = 0$$

für einen Parameterwert t_0 und ist dazu

$$88)\quad p_4(t_0) = 0,$$

wodurch entweder

$$p_5 - m\,p_5 = 0 \quad \text{oder} \quad p_5 + m\,p_6 = 0$$

bedingt ist, so ist die Erzeugende $p_i(t_0)$ eine Wendetorsallinie. Über Torsalebene und Kuspidalpunkt gilt das in der vorigen Nummer Gesagte.

6. Die zylinderische Erzeugende.

Ist für einen Parameterwert t_0

$$89)\quad \begin{cases} \alpha) & \dfrac{m}{c}\{p_1 p_4 p_6\}^2 - \dfrac{1}{c\,m}\{p_1 p_4 p_5\}^2 - 4\,\{p_1 p_5 p_6\}\{p_4 p_5 p_6\} = 0 \\ \beta) & \{p_4 p_5 p_6\} = 0 \\ \gamma) & p_4(t_0) = 0 \end{cases}$$

erfüllt, so liegt wegen (89 γ) die Erzeugende t_0 und der unendlichferne Strahl c_∞ der Kongruenz in einem ebenen Strahlenbüschel erster Ordnung. Wegen (89 β) liegt aber auch die Nachbarerzeugende von $p_i(t_0)$ in dem gleichen Strahlenbüschel erster Ordnung, wie unmittelbar aus der Parameterdarstellung

$$90)\quad \begin{cases} \left(\sigma p_1(t_0) + \tau\,4\,c^2\{p_1 p_5 p_6\}\right); & \left(\sigma p_2(t_0) - \tau\,2\,c^2\{p_1 p_4 p_6\}\right); \\ \left(\sigma p_3(t_0) + \tau\,2\,c^2\{p_1 p_4 p_5\}\right); & 0 \qquad ; \\ \left(\sigma p_5(t_0) - \tau\,2\,c\,m\{p_1 p_4 p_6\}\right); & \left(\sigma\, p_6(t_0) - 2\,\dfrac{c}{m}\{p_1 p_4 p_5\}\right) \end{cases}$$

dieses Büschels folgt.

Die Erzeugende t_0 ist eine zylinderische Erzeugende. Die Ebene Z der Zylindererzeugenden hat die Ebenenkoordinaten:

$$91)\quad \begin{cases} u_1 = 0, \\ u_2 = 0, \\ u_3 = \left(2\,c\,m\,p_6(t_0)\,\{p_1 p_4 p_6\} - 2\,\dfrac{c}{m}\,p_5(t_0)\,\{p_1 p_4 p_5\}\right), \\ u_4 = \left(2\,c\,m\,p_2(t_0)\,\{p_1 p_4 p_6\} + 2\,\dfrac{c}{m}\,p_3(t_0)\,\{p_1 p_4 p_5\}\right). \end{cases}$$

Ist unter den Bedingungen (89 α, β, γ) die Erzeugende t_0 mit dem unendlichfernen Kongruenzstrahl c_∞ identisch, so ist in diesem Fall $p_i(t_0)$ eine zylinderische Wendeerzeugende.

Allgemein erhält man damit den Satz, daß in einer hyperbolischen Kongruenz nur der unendlichferne Kongruenzstrahl selbst zylinderische Wendeerzeugende einer Regelschar sein kann.

Wir wenden uns nunmehr der Untersuchung der axial translatorischen Kongruenz zu, die nicht in der Darstellungsform (63) enthalten ist und sich damit den soeben entwickelten Untersuchungsmethoden entzieht.

Durch eine starre Transformation des Raumes ist es stets möglich, die axial translatorische Kongruenz auf die Normalform

92) $$p_1 + m p_3 = 0; \quad p_4 = 0$$

zu bringen.

Bei Annahme dieser Normalform liegt die unendlichferne Brennlinie der Kongruenz in der xy-Ebene, die im Endlichen liegende Brennlinie geht durch den Nullpunkt des Koordinatensystems und verläuft in der x, z-Ebene. Ist ω der Winkel, den die im Endlichen liegende Brennlinie mit der z-Achse einschließt, so gilt $\operatorname{tg}\omega = m$. Die y-Achse ist der Hauptstrahl der Kongruenz.

Die Linienkoordinaten $p_i(t)$ einer in der Kongruenz enthaltenen Regelschar $\mathfrak{R}$ erfüllen für alle Werte von t die Gleichungen

$$p_4(t) = 0; \quad p_1(t) + m p_3(t) = 0.$$

Da die Untersuchungsmethoden der Regelscharen in der axial translatorischen Kongruenz im wesentlichen den für die elliptische und hyperbolische (mit im Endlichen liegenden Brennlinien) verwendeten Methoden nachgebildet sind, geben wir die für die axial translatorische Kongruenz gültigen Resultate in aller Kürze wieder.

Die in $p_i(t_0)$ die Regelschar $\mathfrak{R}$ oskulierende Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$ läßt sich als Schnitt eines dem Γ-Raum der Kongruenz angehörigen Komplexes Γ^0 mit der Kongruenz darstellen.

Γ^0 hat die Gestalt:

93) $$\Gamma^0 = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \\ p_1(t_0) & p_2(t_0) & p_3(t_0) & p_4(t_0) & p_5(t_0) & p_6(t_0) \\ p_1'(t_0) & p_2'(t_0) & p_3'(t_0) & p_4'(t_0) & p_5'(t_0) & p_6'(t_0) \\ p_1''(t_0) & p_2''(t_0) & p_3''(t_0) & p_4''(t_0) & p_5''(t_0) & p_6''(t_0) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & m \end{vmatrix} = 0.$$

Mit

$$\begin{vmatrix} p_i(t_0) & p_k(t_0) & p_l(t_0) \\ p_i'(t_0) & p_k'(t_0) & p_l'(t_0) \\ p_i''(t_0) & p_k''(t_0) & p_l''(t_0) \end{vmatrix} = \{p_i\, p_k\, p_l\}$$

nimmt Γ^0 die Gestalt:

94) $$\begin{cases} \Gamma^0 \equiv \{p_3 p_5 p_6\} p_2 - \{p_2 p_5 p_6\} p_3 + m\{p_2 p_3 p_5\} p_4 + \{p_2 p_3 p_6\} p_5 \\ \qquad\qquad - \{p_2 p_3 p_5\} p_6 - 0 \end{cases}$$

an.

Da die Strahlen der Kongruenz alle parallel zur x, y-Ebene sind, haben die Erzeugenden jeder in der Kongruenz enthaltenen Regelschar $\mathfrak{R}$ die x, y-Ebene als Richtebene. Alle nicht zerfallenden Regelscharen zweiter Ordnung, die die Regelschar $\mathfrak{R}$ oskulieren, sind daher hyperbolische Paraboloide.

Die Gleichung einer die Regelschar $\mathfrak{R}$ in t_0 oskulierenden Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{R}^2$ lautet nach (14):

95) $$\begin{cases} \mathfrak{R}^2 \equiv m\{p_3 p_5 p_6\} z^2 - \{p_3 p_5 p_6\} x z + \{p_2 p_5 p_6\} y z + \{p_2 p_3 p_5\} x \\ \qquad + \{p_2 p_3 p_6\} y - m\{p_2 p_3 p_5\} z = 0. \end{cases}$$

Alle Erzeugenden einer in der axial translatorischen Kongruenz liegenden Regelschar $\mathfrak{R}$ sind Wendeerzeugende, wenn die oskulierende Regelschar zweiter Ordnung nicht zerfällt.

Die orthoide Wendeerzeugende.

Wird für einen Parameterwert t_0 die Determinante

96) $$\{p_3 p_5 p_6\} = 0$$

Null, so nimmt die oskulierende Regelschar die Gestalt

$$\mathfrak{R}^2 \equiv \{p_2 p_5 p_6\} y z - m\{p_2 p_3 p_5\} z + \{p_2 p_3 p_5\} x + \{p_2 p_3 p_6\} y = 0$$

oder

97) $$\begin{cases} \dfrac{\{p_2 p_3 p_5\}}{\{p_2 p_5 p_6\}} x + \left(y - m\dfrac{\{p_2 p_3 p_5\}}{\{p_2 p_5 p_6\}}\right)\left(z + \dfrac{\{p_2 p_3 p_6\}}{\{p_2 p_5 p_6\}}\right) \\ \qquad\qquad + m\dfrac{\{p_2 p_3 p_5\}\cdot\{p_1 p_3 p_6\}}{\{p_2 p_5 p_6\}^2} = 0 \end{cases}$$

an.

Die Regelschar $\mathfrak{R}^2$ ist ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid. Für t_0 liegt also eine orthoide Wendeerzeugende vor. Die Richtebene der Erzeugenden $p_i(t_0)$ und ihrer Nachbarerzeugenden ist parallel zur x, y-Ebene.

Die torsale Erzeugende.

Erfüllen die Koeffizienten von Γ^0 für einen Parameterwert t_0 die Gleichung

98) $$\{p_3 p_5 p_6\}\{p_2 p_3 p_6\} + \{p_2 p_5 p_6\}\{p_2 p_3 p_5\} = 0,$$

so liegt die Erzeugende $p_i(t_0)$ und ihre Nachbarerzeugende in einem ebenen Strahlenbüschel erster Ordnung, das sich in der Parameterform

$$99)\quad \begin{cases} \left(\sigma p_1(t_0) + \tau m \{p_2 p_3 p_5\}\right); & \left(\sigma p_2(t_0) + \tau \{p_2 p_3 p_6\}\right); \\ & \left(\sigma p_3(t_0) - \tau \{p_2 p_3 p_5\}\right); \\ 0 \quad ; & \left(\sigma p_5(t_0) + \tau \{p_3 p_5 p_6\}\right); \\ & \left(\sigma p_6(t_0) - \tau \{p_2 p_5 p_6\}\right) \end{cases}$$

darstellen läßt.

Die Ebenenkoordinaten des Strahlenbüschels (99) lauten:

$$100)\quad \begin{cases} u_1 = 0; \quad u_3 = -\left(p_5(t_0)\{p_2 p_5 p_6\} + p_6(t_0)\{p_3 p_5 p_6\}\right) \\ u_2 = 0; \quad u_4 = -\left(p_2(t_0)\{p_3 p_5 p_6\} - p_3(t_0)\{p_2 p_5 p_6\}\right). \end{cases}$$

Die Erzeugende $p_i(t_0)$ ist eine Wendetorsallinie. Der Kuspidalpunkt hat die Koordinaten:

$$101)\quad \begin{cases} x = -m \dfrac{\left(p_2(t_0)\{p_3 p_5 p_6\} - p_3(t_0)\{p_2 p_5 p_6\}\right)}{\left(p_5(t_0)\{p_2 p_5 p_6\} + p_6(t_0)\{p_3 p_5 p_6\}\right)} \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{\left(p_2(t_0)\{p_3 p_5 p_6\} - p_3(t_0)\{p_2 p_5 p_6\}\right)}{\left(p_5(t_0)\{p_2 p_5 p_6\} + p_6(t_0)\{p_3 p_5 p_6\}\right)}. \end{cases}$$

Die Torsalebene T lautet:

$$102)\quad z = -\frac{\left(p_2(t_0)\{p_3 p_5 p_6\} - p_3(t_0)\{p_2 p_5 p_6\}\right)}{\left(p_5(t_0)\{p_2 p_5 p_6\} + p_6(t_0)\{p_3 p_5 p_6\}\right)}.$$

Die zylinderische Erzeugende.

Erfüllen die Koeffizienten des Oskulationskomplexes Γ^0 für einen Parameterwert t_0 außer Gleichung (98) die Gleichungen

$$103)\quad -\left(p_5(t_0)\{p_2 p_5 p_6\} + p_6(t_0)\{p_3 p_5 p_6\}\right) = 0$$

$$p_1(t_0) : p_2(t_0) : p_3(t_0) = m\{p_2 p_3 p_5\} : \{p_2 p_3 p_6\} : -\{p_2 p_5 p_6\},$$

so liegt für t_0 eine reguläre zylinderische Erzeugende vor. Die Ebene Z der zylinderischen Erzeugenden lautet:

$$104)\quad Z \equiv x p_5(t_0) + y p_6(t_0) - m p_6(t_0) z = 0.$$

Die homogenen Punktkoordinaten des unendlichfernen Kuspidalpunktes sind:

$$105)\quad \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = -p_6(t_0) : p_5(t_0) : 0 : 0.$$

Damit sind alle Erzeugendentypen, die in Regelscharen der axial translatorischen Kongruenz auftreten können, aufgezählt.

Zum Abschluß der Untersuchungen geben wir noch kurz die Resultate für die parabolische Kongruenz wieder.

Unschwer lassen sich die Ergebnisse, die für die hyperbolische Kongruenz (mit im Endlichen liegenden Leitlinien) gelten, durch einen Grenzübergang auf die parabolische Kongruenz übertragen.

Es sei $y = \varkappa x z$ ein gleichseitiges Paraboloid. Faßt man die Erzeugenden $z = c$ und $z = -c$ des Paraboloides als Brennlinien einer hyperbolischen Kongruenz auf, so lautet deren Darstellung in Linienkoordinaten

$$106)\quad p_2 - \frac{c}{m} p_5 = 0; \quad p_3 + c m p_6 = 0,$$

und es ist $m = \varkappa c$. Vollzieht man den Grenzübergang $c \to 0$, so vereinigen sich die Brennlinien zur x-Achse. Die hyperbolische Kongruenz geht bei diesem Grenzprozeß in die parabolische Kongruenz

$$107)\quad p_2 - \frac{1}{\varkappa} p_5 = 0; \quad p_3 = 0$$

über. Die Fluchtebene der Kongruenz ist die xy-Ebene, der Hauptstrahl die z-Achse.

Die Linienkoordinaten einer in der parabolischen Kongruenz enthaltenen Regelschar $p_i(t)$ erfüllen außer der Fundamentalrelation die beiden Gleichungen:

$$p_2(t) - \frac{1}{\varkappa} p_5(t) = 0, \quad p_3(t) = 0.$$

Im Anschluß an die Untersuchungen über die hyperbolische Kongruenz mit im Endlichen liegenden Leitlinien ergeben sich folgende Sätze über die parabolische Kongruenz:

Die regulären und orthoiden Erzeugenden.

Sind für einen Parameterwert t_0 alle Determinanten

$$\{p_1 p_5 p_6\}; \quad \{p_1 p_4 p_6\}; \quad \{p_1 p_4 p_5\}; \quad \{p_4 p_5 p_6\}$$

von Null verschieden, so ist die in t_0 oskulierende Regelschar zweiter Ordnung

$$108)\quad \mathfrak{R}^2 \equiv -\frac{1}{\varkappa}\{p_4 p_5 p_6\} y^2 - \{p_1 p_5 p_6\} z^2 - \{p_1 p_4 p_5\} x z -$$

$$- \{p_1 p_4 p_6\} y z + \frac{1}{\varkappa}\{p_1 p_4 p_5\} y = 0$$

ein einschaliges Hyperboloid.

Die Erzeugende $p_i(t_0)$ ist eine reguläre Erzeugende.

Fällt speziell die Erzeugende $p_i(t_0)$ mit einer orthoiden Erzeugenden des Oskulationshyperboloides zusammen, so ist auch $p_i(t_0)$ eine orthoide Erzeugende der Regelschar $\mathfrak{R}$.

Die Wendeerzeugende.

Wird für einen Parameterwert t_0 die Determinante $\{p_4 p_5 p_6\}$ Null, so ist die in t_0 oskulierende Regelschar zweiter Ordnung

109) $$\mathfrak{R}^2 \equiv -\{p_1 p_5 p_6\} z^2 - \{p_1 p_4 p_5\} x z - \{p_1 p_4 p_6\} y z + \\ + \frac{1}{\varkappa}\{p_1 p_4 p_5\} y = 0$$

ein gewöhnliches hyperbolisches Paraboloid.

$p_i(t_0)$ ist eine gewöhnliche Wendeerzeugende der Regelschar $\mathfrak{R}$. Der Stellungsvektor der Richtebene hat die Koordinaten

110) $$\nu_x : \nu_y : \nu_z = \{p_1 p_4 p_5\} : \{p_1 p_4 p_6\} : \{p_1 p_5 p_6\}.$$

Die orthoide Wendeerzeugende.

Wird außer $\{p_4 p_5 p_6\}$ auch die Determinante $\{p_1 p_5 p_6\}$ für einen Wert t_0 Null, so lautet die in $p_i(t_0)$ oskulierende Regelschar zweiter Ordnung:

111) $$\mathfrak{R}^2 \equiv -\{p_1 p_4 p_5\} x z - \{p_1 p_4 p_6\} y z + \frac{1}{\varkappa}\{p_1 p_4 p_5\} y = 0.$$

$\mathfrak{R}^2$ ist ein gleichseitiges Paraboloid, daraus folgt, daß die Erzeugende $p_i(t_0)$ eine orthoide Wendeerzeugende der Regelschar $\mathfrak{R}$ ist. Der Stellungsvektor der Richtebene hat die Komponenten:

112) $$\nu_x : \nu_y : \nu_z = \{p_1 p_4 p_5\} : \{p_1 p_4 p_6\} : 0.$$

Die Torsallinie.

Wird für einen Parameterwert t_0 die Ableitung von

113) $$\{p_4(t) p_1(t) + p_2(t) p_5(t)\}$$

Null, so ist $p_i(t_0)$ eine Torsallinie der Regelschar $\mathfrak{R}$. Die Torsalebene T lautet:

114) $$T \equiv p_4(t_0) y + p_5(t_0) z = 0.$$

Der Kuspidalpunkt hat die Koordinaten:

115) $$x_0 = -\frac{1}{\varkappa}\frac{p_5(t_0)}{p_4(t_0)};\ y_0 = 0;\quad z_0 = 0.$$

Die zylinderische Erzeugende.

Wird für einen Parameterwert t_0

116) $$p_2(t_0) = 0,\quad p_5(t_0) = 0,\\ p_1'(t_0) p_4(t_0) + p^1(t_0) p_4'(t_0) = 0,$$

so liegt für t_0 eine zylinderische Erzeugende der Regelschar vor.

Die Zylinderebene Z ist die xy-Ebene.

Der Kuspidalpunkt ist der unendlichferne Punkt der x-Achse.

Damit sind alle Erzeugendentypen, die unter den für die $p_i(t)$ getroffenen Voraussetzungen in der hyperbolischen, parabolischen und elliptischen Kongruenz auftreten können, aufgezählt und analytisch charakterisiert. Analog zur Kurventheorie hat sich daran die Theorie derjenigen Erzeugenden einer Regelschar anzuschließen, für die eine oder andere über die $p_i(t)$ getroffene Voraussetzung fallen gelassen wird. Auf die Behandlung dieser Erzeugendentypen soll jedoch im Rahmen dieser Untersuchung verzichtet werden. Methodisch ist der für diese Untersuchungen einzuschlagende Weg der gleiche.

Lebenslauf.

Am 22. März 1909 wurde ich als Sohn des Lehrers A. Roßbach in Eisenach geboren.

Nach vierjährigem Besuch der Bürgerschule und achtjährigem Besuch des Realgymnasiums (Ernst-Abbe-Schule) zu Eisenach legte ich Ostern 1927 die Reifeprüfung ab. Vom 1. Mai bis 1. Oktober 1927 arbeitete ich im Magnetwerk zu Eisenach praktisch. Im Herbst 1927 bezog ich die Technische Hochschule zu Berlin, um Mathematik und Physik zu studieren. Nach bestandenem Diplomexamen trat ich im November 1931 bei Siemens & Halske, Berlin (Zentrallaboratorium, Abteilung Optik) ein. Im Februar 1932 schied ich aus dieser Stellung aus, um im Optischen Institut der Hochschule Berlin mich weiter in technischer Optik auszubilden. Seit dem W.S. 1929/30 war ich an den Lehrstühlen für Mathematik (Prof. Hamel) und für Geometrie (Prof. Salkowski) als Assistent tätig. Im April 1933 übernahm ich die Assistentenstelle am Lehrstuhl für Geometrie der Technischen Hochschule Karlsruhe.

Während meines Studiums nahm ich hauptsächlich an den Vorlesungen, Übungen und Seminaren der folgenden Herrn Professoren und Dozenten teil:

an der Technischen Hochschule: Hamel, Scheffers, Hertz, Weber, Becker, Salkowski, Reißner, Rothe, Jacobsthal, Weidert, Picht, Westphal.

an der Universität: Schur, Schmidt, Bieberbach, Planck, v. Mises.

Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit erhielt ich durch einen Vortrag des Herrn Professor Dr.-Ing. Haenzel.

Ich danke Herrn Prof. Haenzel an dieser Stelle für die Förderung, die er meiner Arbeit zuteil werden ließ.

Herrn Professor Dr. Boehm danke ich für das Interesse, das er als Korreferent der Arbeit zeigte.

Heinrich Fr. Roßbach.