

# Imaginäre Geometrie

## Teile I und II

Matthias Lerchmüller, Mai 2018

### 1 Motivation

Sei  $k$  ein Kegelschnitt in einer Ebene mit zugehöriger Polarität  $\pi$ . Dann erzeugt  $\pi$  auf jeder Geraden  $a$ , die nicht Tangente an  $k$  ist, durch  $X \mapsto \pi(X) \wedge a$  eine Involution  $\pi_a$ . Wenn  $a$  den Kegelschnitt in den reellen Punkten  $A, B$  schneidet, ist  $\pi_a$  hyperbolisch und  $A, B$  sind die zugehörigen Doppelpunkte.

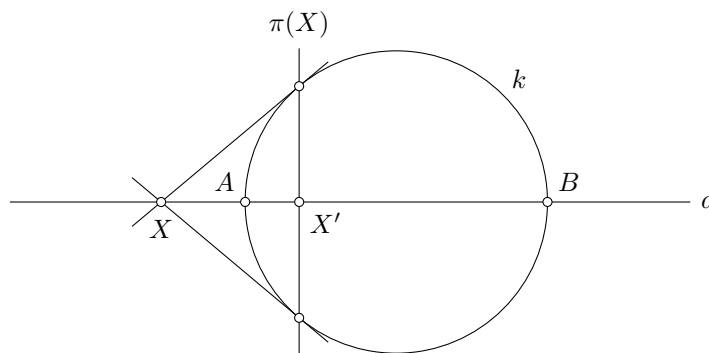


Abbildung 1.1: Kegelschnitt mit reell schneidender Gerade.

Wenn  $a$  den Kegelschnitt nicht reell schneidet, ist  $\pi_a$  elliptisch und kann als Darstellung der konjugiert imaginären Schnittpunkte bzw. Doppelpunkte  $A, \bar{A}$  aufgefasst werden. Weil  $\pi_a$  gleichsinnig ist, können  $A, \bar{A}$  durch die beiden Orientierungen auf  $a$  unterschieden werden.

### 2 Imaginäre Elemente

#### 2.1 Imaginäre Punkte

Ein imaginärer Punkt  $A$  wird eindeutig dargestellt durch

- (1) eine reelle Punktreihe mit Trägergeraden  $a$ ,
- (2) eine elliptische Involution  $\alpha$  in der Punktreihe und

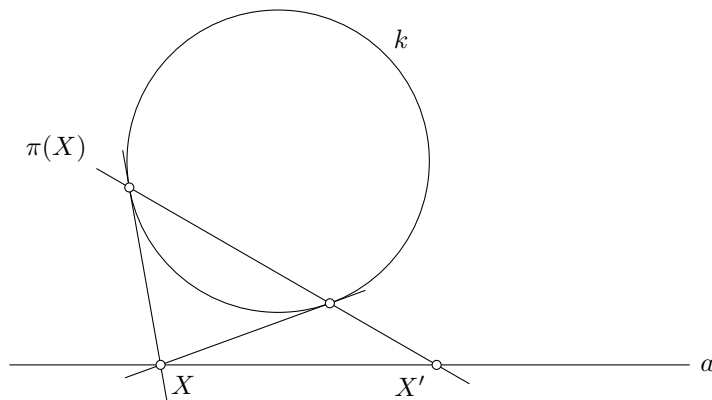


Abbildung 1.2: Kegelschnitt mit imaginär schneidender Gerade.

(3) eine Orientierung « $\rightarrow$ » in der Punktreihe.

Involution und Orientierung werden zusammengefasst zur *orientierten elliptischen Involution*  $\vec{\alpha}$ . Notation:

$$A = (a, \alpha, \rightarrow) = (a, \vec{\alpha}).$$

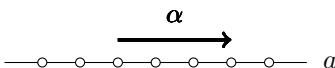


Abbildung 2.1: Darstellung eines imaginären Punktes  $A$  mit Trägergeraden  $a$ , elliptischer Involution  $\alpha$  und Orientierung « $\rightarrow$ ».

Der zu  $A$  *konjugiert imaginäre* Punkt  $\bar{A}$  wird durch den gleichen Träger, die gleiche Involution und die entgegengesetzte Orientierung dargestellt,

$$\bar{A} = (a, \alpha, \leftarrow) = (a, \overleftarrow{\alpha}).$$

Konjugierte Punkte haben als Verbindungsgerade ihren reellen Träger,

$$A \vee \bar{A} = (a, \vec{\alpha}) \vee (a, \overleftarrow{\alpha}) = a.$$

Es gibt  $\infty^4$  reelle Geraden und auf jeder von ihnen  $\infty^2$  Punktinvolutionen, also gibt es  $\infty^4 \cdot \infty^2 = \infty^6$  imaginäre Punkte.

Der Punkt  $A$  kann auf  $\infty^2$  Arten durch einen Punktwurf dargestellt werden, indem zwei Involutionspaare  $\{X, \alpha(X)\}$  und  $\{Y, \alpha(Y)\}$  so kombiniert werden, dass das Tripel  $(X, Y, \alpha(X))$  die Orientierung angibt:

$$(X, Y, \alpha(X), \alpha(Y)).$$

Umgekehrt beschreibt ein kollinear Punktwurf  $(X, Y, X', Y')$  eindeutig einen imaginären Punkt  $A = (a, \vec{\alpha})$ , wenn man folgendes festlegt:

- (1)  $a$  ist definiert durch  $a = X \vee Y$ ,

- (2)  $\alpha$  ist definiert durch die Paare  $\{X, X'\}$  und  $\{Y, Y'\}$ ,
- (3)  $\langle\!\langle \rightarrow \!\!\rangle\rangle$  ist definiert durch das Tripel  $(X, Y, X')$ .

Wir nennen  $(X, Y, X', Y')$  eine *Wurfdarstellung* von  $A$ . Wenn sich  $\{X, X'\}$  und  $\{Y, Y'\}$  harmonisch trennen, nennen wir die Darstellung *harmonisch*. Von jedem Punkt  $X \in a$  ausgehend gibt es eine eindeutige harmonische Wurfdarstellung.

## 2.2 Imaginäre Ebenen

Eine imaginäre Ebene  $B$  wird eindeutig dargestellt durch

- (1) ein reelles Ebenenbündel mit Trägergeraden  $b$ ,
- (2) eine elliptische Involution  $\beta$  im Ebenenbündel und
- (3) eine Orientierung  $\langle\!\langle \rightarrow \!\!\rangle\rangle$  im Ebenenbündel.

$$B = (b, \beta, \rightarrow) = (b, \overrightarrow{\beta}).$$

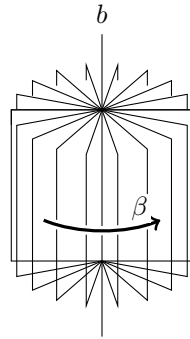


Abbildung 2.2: Darstellung einer imaginären Ebene  $B$  mit Trägergeraden  $b$ , elliptischer Involution  $\beta$  und Orientierung  $\langle\!\langle \rightarrow \!\!\rangle\rangle$ .

Die zu  $B$  konjugiert imaginäre Ebene wird durch  $\overline{B} = (b, \overleftarrow{\beta})$  dargestellt. Konjugierte Ebenen haben als Schnittgerade ihren reellen Träger:  $B \wedge \overline{B} = b$ .

Analog zu den Punkten gibt es  $\infty^4 \cdot \infty^2 = \infty^6$  imaginäre Ebenen.

Die Ebene  $B$  kann auf  $\infty^2$  Arten durch einen Ebenenwurf

$$(X, Y, \beta(X), \beta(Y))$$

dargestellt werden, wobei  $X, Y \in b$ .

## 2.3 Spezielle imaginäre Geraden

Eine spezielle imaginäre Gerade  $c$  (imaginäre Gerade I. Art, niederimaginäre Gerade) wird eindeutig dargestellt durch

- (1) ein reelles Strahlenbündel mit Trägerpunkt  $C^+$  und Trägerebene  $C^-$ ,
- (2) eine elliptische Involution  $\gamma$  im Strahlenbündel und
- (3) eine Orientierung « $\rightarrow$ » im Strahlenbündel.

$$c = (C^+/C^-, \gamma, \rightarrow) = (C^\pm, \vec{\gamma}).$$

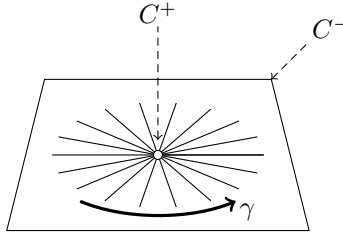


Abbildung 2.3: Darstellung einer speziellen imaginären Geraden  $c$  mit Trägerpunkt  $C^+$ , Trägerebene  $C^-$ , elliptischer Involution  $\gamma$  und Orientierung « $\rightarrow$ ».

Die zu  $c$  konjugiert imaginäre Gerade wird durch  $\bar{c} = (C^\pm, \overleftarrow{\gamma})$  dargestellt. Konjugierte spezielle Geraden treffen sich und haben als Schnittpunkt und Verbindungsebene ihre reellen Träger:  $c \wedge \bar{c} = C^+$ ,  $c \vee \bar{c} = C^-$ .

Es gibt  $\infty^3 \cdot \infty^2 = \infty^5$  reelle Strahlenbündel und in jedem von ihnen  $\infty^2$  Involutionen, also gibt es  $\infty^5 \cdot \infty^2 = \infty^7$  spezielle imaginäre Geraden.

Die Gerade  $c$  kann auf  $\infty^2$  Arten durch einen Strahlenwurf

$$(x, y, \gamma(x), \gamma(y))$$

dargestellt werden, wobei  $x, y \in C^\pm$ .

## 2.4 Allgemeine imaginäre Geraden

Eine allgemeine imaginäre Gerade  $c$  (imaginäre Gerade II. Art, hochimaginäre Gerade) wird eindeutig dargestellt durch

- (1) eine reelle elliptische lineare Strahlenkongruenz  $S$  mit zugehöriger elliptischer gescharter Involution  $\sigma$  und
- (2) eine Orientierung « $\rightarrow$ » in der Kongruenz, d.h. in allen zur Kongruenz gehörenden involutorischen Punktreihen, Ebenenbündeln und Regelscharen.

$$c = (S/\sigma, \rightarrow) = (S, \vec{\sigma}).$$

Die zu  $c$  konjugiert imaginäre Gerade wird durch  $\bar{c} = (S, \overleftarrow{\sigma})$  dargestellt. Konjugierte allgemeine Geraden sind windschief.

Es gibt  $\infty^8$  reelle elliptische Kongruenzen und damit  $\infty^8$  allgemeine imaginäre Geraden.

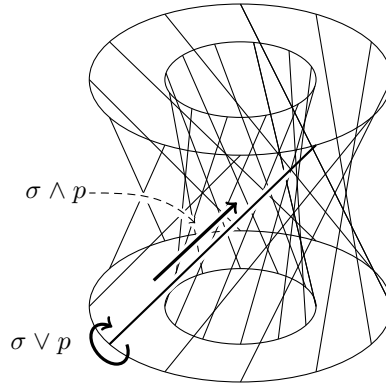


Abbildung 2.4: Darstellung einer allgemeinen imaginären Geraden  $c$  mit Trägerkongruenz  $S$ , elliptischer gescharter Involution  $\sigma$  und Orientierung « $\rightarrow$ ». Die Kongruenz erscheint als Bündel von koaxialen Regelscharen. Hervorgehoben ist eine Kongruenzgerade  $p \in S$  mit den zugehörigen Involutionen  $\sigma \wedge p$  in der Punkteihe und  $\sigma \vee p$  im Ebenenbündel.

Die Gerade  $c$  kann auf  $\infty^3 \cdot \infty^2 = \infty^5$  Arten durch einen Strahlenwurf

$$(x, y, \sigma(x), \sigma(y))$$

dargestellt werden, wobei  $x, y \in R$  in einer invarianten, involutorischen Regelschar  $R$  liegen, deren Leitschar  $L(R) \subset S$  zur Kongruenz gehört.

### 3 Eigenschaften

#### 3.1 Elliptische Involutionen

Eine elliptische Involution  $\alpha$  in einem einstufigen Grundgebilde  $a$  (Punkteihe, Ebenenbündel, Strahlenbündel) ist eine Projektivität  $\alpha : a \rightarrow a$  mit  $\alpha^2 = \text{id}$ , die keine reellen Doppelpunkte hat. Für sie gilt:

- (1) Je zwei Involutionenpaare  $\{x, \alpha(x)\}$  und  $\{y, \alpha(y)\}$  trennen sich.
- (2)  $\alpha$  ist durch zwei Involutionenpaare  $\{x, \alpha(x)\}$  und  $\{y, \alpha(y)\}$  eindeutig bestimmt.
- (3) Für jedes Element  $x$  gibt es ein eindeutig bestimmtes Element  $y$ , sodass  $(x, y, \alpha(x), \alpha(y))$  ein harmonischer Wurf ist (*harmonische Darstellung* von  $\alpha$  ausgehend von  $x$ ).
- (4)  $\alpha$  ist gleichsinnig, d.h. die Tripel  $(x, y, z)$  und  $(\alpha(x), \alpha(y), \alpha(z))$  haben die gleiche Orientierung. Durch Wahl einer Richtung in  $a$  kann man dadurch  $\alpha$  orientieren ( $\vec{\alpha}$  oder  $\overleftarrow{\alpha}$ ).
- (5) Eine Projektivität  $\varphi : a \rightarrow a$  ist involutorisch, wenn es zwei Elemente  $X, Y$  gibt mit  $\varphi(X) = Y$  und  $\varphi(Y) = X$ .

### 3.2 Elliptische Kongruenzen und gescharte Involutionen

Eine lineare elliptische Strahlenkongruenz  $S$  besteht aus  $\infty^2$  Geraden, die zueinander windschief sind und den Raum dicht ausfüllen.

- (1) In jeder Ebene liegt und durch jeden Punkt geht genau eine Kongruenzgerade  $p \in S$ .
- (2)  $S$  enthält mit drei windschiefen Geraden die ganze von ihnen aufgespannte Regelschar.
- (3)  $S$  ist durch vier windschiefe Kongruenzgeraden, die nicht in einer Regelschar liegen, eindeutig bestimmt.
- (4) Die Kongruenzgeraden, die eine Gerade  $x \notin S$  treffen, bilden eine Regelschar.
- (5)  $S$  ist der Schnitt zweier linearer Strahlenkomplexe  $K_1, K_2$ , die in einem elliptischen Komplexbüschel liegen,  $S = K_1 \cap K_2$ .
- (6) Für den Schnitt zweier verschiedener Kongruenzen  $S, T$  sind folgende Fälle möglich:
  - (a)  $S \cap T = \emptyset$ : disjunkt,
  - (b)  $S \cap T = \{p\}$ : eine gemeinsame Gerade  $p$ ,
  - (c)  $S \cap T = \{p, q\}$ : zwei gemeinsame Geraden  $p \neq q$ ,
  - (d)  $S \cap T = R$ : eine gemeinsame Regelschar  $R$ .

Zu jeder elliptischen Kongruenz  $S$  gehört eine eindeutig bestimmte, elliptische gescharte Involution  $\sigma$  und umgekehrt.  $\sigma$  ist eine Kollineation  $\sigma : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  mit  $\sigma^2 = \text{id}$ , die weder reelle Doppelpunkte noch reelle Doppelebenen hat.

- (1) Die reellen Doppelgeraden von  $\sigma$  sind die Strahlen der Kongruenz, d.h.  $\sigma(p) = p$  für alle  $p \in S$ .
- (2) Für jede Kongruenzgerade  $p \in S$  sind die Einschränkungen  $(\sigma|_p)^+ = \sigma \wedge p$  und  $(\sigma|_p)^- = \sigma \vee p$  elliptische Involutionen in der Punktreihe und im Ebenenbüschel mit Träger  $p$ .
- (3) Es gibt  $\infty^3$  Paare von zusammengehörigen Regel-/Leitscharen  $R/L$  mit
  - (a)  $\sigma(R) = R$  und  $\sigma|_R$  ist eine elliptische Involution,
  - (b)  $\sigma(L) = L$  und  $\sigma|_L = \text{id}$ , das heisst  $L \subset S$ .

$S$  und damit  $\sigma$  sind durch ein solches Paar eindeutig bestimmt.

- (4) Für je zwei verschiedene Kongruenzgeraden  $p, q \in S$  gilt  $(\sigma \wedge p) \vee q = \sigma \vee q$  und  $(\sigma \wedge q) \vee p = \sigma \vee p$ . Damit kann man die Punkt- und Ebeneninvolutionen auf allen Kongruenzgeraden konsistent orientieren und erhält die orientierte gescharte Involution  $(\vec{\sigma}$  oder  $\overleftarrow{\sigma})$ .

## 4 Inzidenzbeziehungen

### 4.1 Notation

Es seien  $a, b$  zwei windschiefe Geraden. Eine orientierte Involution  $\vec{\alpha}$  in der Punktreihe mit Träger  $a$  erzeugt durch Verbinden mit  $b$  eine orientierte Ebeneninvolution  $\vec{\beta}$  im Ebenenbündel mit Träger  $b$ . Notation:

$$\vec{\alpha} \vee b = \vec{\beta}.$$

Umgekehrt erzeugt die Ebeneninvolution  $\vec{\beta}$  durch Schnitt mit  $a$  die Punktinvolution  $\vec{\alpha}$ :

$$\vec{\beta} \wedge a = \vec{\alpha}.$$

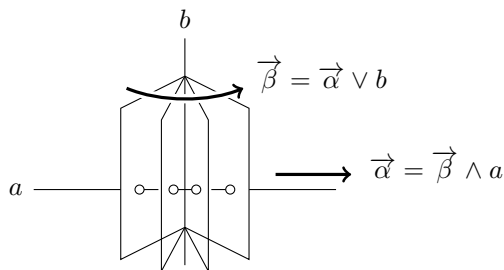


Abbildung 4.1: Notation: Durch Verbinden der Punktinvolution  $\vec{\alpha}$  mit  $b$  entsteht die Ebeneninvolution  $\vec{\beta} = \vec{\alpha} \vee b$  und umgekehrt.  $\vec{\alpha}$  und  $\vec{\beta}$  sind zueinander perspektiv.

Man sagt, die orientierten Involutionen  $\vec{\alpha}$  und  $\vec{\beta}$  seien zueinander *perspektiv*.

Wir verwenden diese Notation auch in anderen analogen Fällen und auch für die Einschränkungen einer orientierten gescharten Involution  $\vec{\sigma}$  auf die Punktreihen und Ebenenbündel mit Trägergeraden  $p \in S$  aus der zugehörigen Kongruenz:

$$(\vec{\sigma}|_p)^+ = \vec{\sigma} \wedge p, \quad (\vec{\sigma}|_p)^- = \vec{\sigma} \vee p.$$

### 4.2 Inzidenz von Punkt und Ebene

- (1) Ein reeller Punkt  $A$  liegt genau dann in einer reellen Ebene  $B$ , wenn  $A \in B$ .
- (2) Ein reeller Punkt  $A$  liegt genau dann in einer imaginären Ebene  $B = (b, \vec{\beta})$ , wenn  $A \in b$ .
- (3) Ein imaginärer Punkt  $A = (a, \vec{\alpha})$  liegt genau dann in einer reellen Ebene  $B$ , wenn  $a \in B$ .

- (4) Ein imaginärer Punkt  $A = (a, \vec{\alpha})$  liegt genau dann in einer imaginären Ebene  $B = (b, \vec{\beta})$ , wenn entweder
- (a)  $a = b$  oder
  - (b)  $a \cap b = \emptyset$  und  $\vec{\alpha} \vee b = \vec{\beta}$  (und damit auch  $\vec{\beta} \wedge a = \vec{\alpha}$ ).

### 4.3 Inzidenz von Punkt und Gerade

- (1) Ein reeller Punkt  $A$  liegt genau dann in einer reellen Geraden  $b$ , wenn  $A \in b$ .
- (2) Ein reeller Punkt  $A$  liegt genau dann in einer speziellen imaginären Geraden  $b = (B^\pm, \vec{\beta})$ , wenn  $A = B^+$ .
- (3) Ein reeller Punkt kann nicht in einer allgemeinen imaginären Geraden liegen.
- (4) Ein imaginärer Punkt  $A = (a, \vec{\alpha})$  liegt genau dann in einer reellen Geraden  $b$ , wenn  $a = b$ .
- (5) Ein imaginärer Punkt  $A = (a, \vec{\alpha})$  liegt genau dann in einer speziellen imaginären Geraden  $b = (B^\pm, \vec{\beta})$ , wenn  $a \in B^-$  und  $a \notin B^+$  und  $\vec{\alpha} \vee B^+ = \vec{\beta}$ .
- (6) Ein imaginärer Punkt  $A = (a, \vec{\alpha})$  liegt genau dann in einer allgemeinen imaginären Geraden  $b = (S, \vec{\sigma})$ , wenn  $a \in S$  und  $\vec{\alpha} = \vec{\sigma} \wedge a$ .

### 4.4 Inzidenz von Ebene und Gerade

- (1) Eine reelle Ebene  $A$  geht genau dann durch eine reelle Gerade  $b$ , wenn  $A \in b$ .
- (2) Eine reelle Ebene  $A$  geht genau dann durch eine spezielle imaginäre Gerade  $b = (B^\pm, \vec{\beta})$ , wenn  $A = B^-$ .
- (3) Eine reelle Ebene kann nicht durch eine allgemeine imaginäre Gerade gehen.
- (4) Eine imaginäre Ebene  $A = (a, \vec{\alpha})$  geht genau dann durch eine reelle Gerade  $b$ , wenn  $a = b$ .
- (5) Eine imaginäre Ebene  $A = (a, \vec{\alpha})$  geht genau dann durch eine spezielle imaginäre Gerade  $b = (B^\pm, \vec{\beta})$ , wenn  $a \in B^+$  und  $a \notin B^-$  und  $\vec{\alpha} \wedge B^- = \vec{\beta}$ .
- (6) Eine imaginäre Ebene  $A = (a, \vec{\alpha})$  geht genau dann durch eine allgemeine imaginäre Gerade  $b = (S, \vec{\sigma})$ , wenn  $a \in S$  und  $\vec{\alpha} = \vec{\sigma} \vee a$ .



## 5 Nachweis der Axiome

Axiome (Urphänomene) nach Locher-Ernst (1940, Anhang).

### 5.1 Axiome der Lage

Exemplarisch.

**G1** In einer Geraden  $a$  liegen unbegrenzt viele Punkte  $B$ ; die Gerade erscheint so als Punktreihe.

- (1) In einer reellen Geraden  $a$  liegen
  - (a)  $\infty^1$  reelle Punkte  $B \in a$ ,
  - (b)  $\infty^2$  imaginäre Punkte  $B = (b, \vec{\beta})$  mit  $b = a$ .
- (2) In einer speziellen imaginären Geraden  $a = (A^\pm, \vec{\alpha})$  liegen
  - (a) 1 reeller Punkt  $B = A^+$ ,
  - (b)  $\infty^2$  imaginäre Punkte  $B = (b, \vec{\beta})$  mit  $b \in B^-$ ,  $b \notin B^+$  und  $\vec{\beta} = \vec{\alpha} \wedge b$ .
- (3) In einer allgemeinen imaginären Geraden  $a = (S, \vec{\sigma})$  liegen  $\infty^2$  imaginäre Punkte  $B = (b, \vec{\beta})$  mit  $b \in S$  und  $\vec{\beta} = \vec{\sigma} \wedge b$ .

**G2** In einer Ebene  $A$  liegen unbegrenzt viele Punkte  $B$ ; die Ebene erscheint so als Punktfeld.

- (1) In einer reellen Ebene  $A$  liegen
  - (a)  $\infty^2$  reelle Punkte  $B \in A$ ,
  - (b)  $\infty^4$  imaginäre Punkte  $B = (b, \vec{\beta})$  mit  $b \in A$ .
- (2) In einer imaginären Ebene  $A = (a, \vec{\alpha})$  liegen
  - (a)  $\infty^1$  reelle Punkte  $B \in a$ ,
  - (b)  $\infty^2$  imaginäre Punkte  $B = (b, \vec{\beta})$  mit  $b = a$ ,
  - (c)  $\infty^4$  imaginäre Punkte  $B = (b, \vec{\beta})$  mit  $b \cap a = \emptyset$  und  $\vec{\beta} \vee a = \vec{\alpha}$ .

### 5.2 Axiome der Verknüpfung

Vollständig (ausser dual).

**V1** Zwei verschiedene Punkte  $A, B$  haben genau eine Verbindungsgerade  $c = A \vee B$ .

- (1)  $A$  und  $B$  reell:  $c = A \vee B$  reell;

- (2)  $A$  reell und  $B = (b, \vec{\beta})$  imaginär:
- (a)  $A \in b$ :  $c = b$  reell.
  - (b)  $A \notin b$ :  $c = (C^\pm, \vec{\gamma})$  speziell imaginär mit  $C^+ = A$ ,  $C^- = A \vee b$ ,  $\vec{\gamma} = A \vee \vec{\beta}$ .
- (3)  $A = (a, \vec{\alpha})$  und  $B = (b, \vec{\beta})$  imaginär:
- (a)  $a = b$ :  $c = a$  reell.
  - (b)  $a \neq b$  und  $a \cap b \neq \emptyset$ :  $c = (C^\pm, \vec{\gamma})$  speziell imaginär mit  $C^+ \in a \vee b$ ,  $C^+ \notin a$ ,  $C^+ \notin b$ ,  $C^- = a \vee b$ ,  $\vec{\gamma} \wedge a = \vec{\alpha}$  und  $\vec{\gamma} \wedge b = \vec{\beta}$  (harmonische Konstruktion).
  - (c)  $a \cap b = \emptyset$ :  $c = (S, \vec{\sigma})$  allgemein imaginär mit  $a \in S$ ,  $b \in S$ ,  $\vec{\sigma} \wedge a = \vec{\alpha}$  und  $\vec{\sigma} \wedge b = \vec{\beta}$ .

**V2** Ein Punkt  $A$  und eine nicht durch ihn gehende Gerade  $b$  haben genau eine Verbindungsebene  $C = A \vee b$ .

- (1)  $A$  und  $b$  reell:  $C = A \vee b$  reell.
- (2)  $A$  reell und  $b = (B^\pm, \vec{\beta})$  speziell imaginär:
- (a)  $A \in B^-$ :  $C = B^-$  reell.
  - (b)  $A \notin B^-$ :  $C = (A \vee B^+, A \vee \vec{\beta})$  imaginär.
- (3)  $A$  reell und  $b = (S, \vec{\sigma})$  allgemein imaginär: sei  $p \in S$  die eindeutig bestimmte Kongruenzgerade durch  $A$ , dann ist  $C = (p, \vec{\sigma} \vee p)$  imaginär.
- (4)  $A = (a, \vec{\alpha})$  imaginär und  $b$  reell:
- (a)  $a \cap b \neq \emptyset$ :  $C = a \vee b$  reell.
  - (b)  $a \cap b = \emptyset$ :  $C = (b, \vec{\alpha} \vee b)$  imaginär.
- (5)  $A = (a, \vec{\alpha})$  imaginär und  $b = (B^\pm, \vec{\beta})$  speziell imaginär:
- (a)  $a \in B^-$ :  $C = B^-$  reell.
  - (b)  $a \notin B^-$  und  $a \in B^+$ :  $C = (a, \vec{\beta} \vee a)$  imaginär.
  - (c)  $a \notin B^-$  und  $a \notin B^+$ :  $C = (c, \vec{\gamma})$  mit  $c \in B^+$ ,  $c \notin B^-$ ,  $\vec{\gamma} \wedge a = \vec{\alpha}$  und  $\vec{\gamma} \wedge B^- = \vec{\beta}$  (harmonische Konstruktion).
- (6)  $A = (a, \vec{\alpha})$  imaginär und  $b = (S, \vec{\sigma})$  allgemein imaginär:
- (a)  $a \in S$ :  $C = (a, \vec{\sigma} \wedge a)$ .
  - (b)  $a \notin S$ :  $C = (c, \vec{\gamma})$  mit  $c \in S$ ,  $c \cap a = \emptyset$ ,  $\vec{\gamma} = \vec{\sigma} \vee c$  (harmonische Konstruktion).

**V3** Zwei verschiedene Geraden  $a, b$  haben entweder genau einen Schnittpunkt  $C = a \wedge b$  und genau eine Verbindungsebene  $D = a \vee b$  (sie treffen sich) oder weder einen Schnittpunkt noch eine Verbindungsebene (sie sind windschief).

(1)  $a$  und  $b$  reell:

(a)  $a \cap b \neq \emptyset$ :  $C = a \wedge b$  und  $D = a \vee b$  reell.

(b)  $a \cap b = \emptyset$ : windschief.

(2)  $a$  reell und  $b = (B^\pm, \vec{\beta})$  speziell imaginär:

(a)  $a \in B^+$  und  $a \in B^-$ :  $C = B^+$  und  $D = B^-$  reell.

(b)  $a \in B^+$  und  $a \notin B^-$ :  $C = B^+$  reell,  $D = (a, \vec{\beta} \vee a)$  imaginär.

(c)  $a \notin B^+$  und  $a \in B^-$ :  $C = (a, \vec{\beta} \wedge a)$  imaginär,  $D = B^-$  reell.

(d)  $a \notin B^+$  und  $a \notin B^-$ : windschief.

(3)  $a$  reell und  $b = (S, \vec{\sigma})$  allgemein imaginär:

(a)  $a \in S$ :  $C = (a, \vec{\sigma} \wedge a)$  und  $D = (a, \vec{\sigma} \vee a)$  imaginär.

(b)  $a \notin S$ : windschief.

(4)  $a = (A^\pm, \vec{\alpha})$  und  $b = (B^\pm, \vec{\beta})$  speziell imaginär:

(a)  $A^+ = B^+$  und  $A^- = B^-$ :  $C = A^+$  und  $D = A^-$  reell.

(b)  $A^+ = B^+$  und  $A^- \neq B^-$ :  $C = A^+$  reell,  
 $D = (d, \vec{\delta})$  imaginär mit  $d \in A^+$  und  $\vec{\delta} = \vec{\alpha} \vee d = \vec{\beta} \vee d$ .

(c)  $A^+ \neq B^+$  und  $A^- = B^-$ :  $C = (c, \vec{\gamma})$  imaginär  
mit  $c \in A^-$  und  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} \wedge c = \vec{\beta} \wedge c$ ,  $D = A^-$  reell.

(d)  $A^+ \neq B^+$  und  $A^- \neq B^-$  und  $A^+ \in B^-$ : windschief.

(e)  $A^+ \neq B^+$  und  $A^- \neq B^-$  und  $A^- \in B^+$ : windschief.

(f)  $A^+ \notin B^-$  und  $A^- \notin B^+$ : seien  $p = A^- \wedge B^-$  und  $q = A^+ \vee B^+$ :

(i)  $\vec{\alpha} \wedge p = \vec{\beta} \wedge p$ :  $C = (p, \vec{\alpha} \wedge p)$  und  $D = (q, \vec{\alpha} \vee q)$  imaginär.

(ii)  $\vec{\alpha} \wedge p \neq \vec{\beta} \wedge p$ : windschief.

(5)  $a = (A^\pm, \vec{\alpha})$  speziell und  $b = (S, \vec{\sigma})$  allgemein imaginär: seien  $p, q \in S$  die eindeutig bestimmten Kongruenzgeraden mit  $p \in A^-$  und  $q \in A^+$ :

(a)  $p = q$ : windschief.

(b)  $p \neq q$ :

(i)  $\vec{\alpha} \wedge p = \vec{\sigma} \wedge p$ :  $C = (p, \vec{\alpha} \wedge p)$  und  $D = (q, \vec{\alpha} \vee q)$  imaginär.

(ii)  $\vec{\alpha} \wedge p \neq \vec{\sigma} \wedge p$ : windschief.

(6)  $a = (S, \vec{\sigma})$  und  $b = (T, \vec{\tau})$  allgemein imaginär:

- (a)  $S = T$ : windschief (konjugiert imaginär).
- (b)  $S \cap T = R$  (Regelschar): windschief.
- (c)  $S \cap T = \{p, q\}$  mit  $p \neq q$ :
  - (i)  $\vec{\sigma} \wedge p = \vec{\tau} \wedge p$ :  $C = (p, \vec{\sigma} \wedge p)$  und  $D = (q, \vec{\sigma} \vee q)$  imaginär.
  - (ii)  $\vec{\sigma} \vee p = \vec{\tau} \vee p$ :  $C = (q, \vec{\sigma} \wedge q)$  und  $D = (p, \vec{\sigma} \vee p)$  imaginär.
  - (iii)  $\vec{\sigma} \wedge p \neq \vec{\tau} \wedge p$  und  $\vec{\sigma} \vee p \neq \vec{\tau} \vee p$ : windschief.
- (d)  $S \cap T = \{p\}$ :
  - (i)  $\vec{\sigma} \wedge p = \vec{\tau} \wedge p$ :  $C = (p, \vec{\sigma} \wedge p)$  und  $D = (p, \vec{\sigma} \vee p)$  imaginär.
  - (ii)  $\vec{\sigma} \wedge p \neq \vec{\tau} \wedge p$ : windschief.
- (e)  $S \cap T = \emptyset$ : windschief.

### 5.3 Axiome der Anordnung

Sind für imaginäre Elemente im Allgemeinen nicht erfüllt, weil der Begriff des «Sich Trennens» nicht definiert ist. Dadurch unterscheiden sich reelle und imaginäre Elemente.

## 6 Konstruktionen

### 6.1 Elliptische Involution

Gegeben: Gerade  $a$  und zwei Paare  $\{X, \alpha(X)\}$  und  $\{Y, \alpha(Y)\}$  einer elliptischen Involution  $\alpha$ .

Gesucht: weitere Involutionenpaare.

Konstruktion:

- (1) wähle Kegelschnitt (Kreis)  $k$  und Punkt  $U \in k$
- (2) übertrage  $X, Y, \alpha(X), \alpha(Y)$  durch Verbinden mit  $U$  auf  $k$ :  $X', Y', X'', Y''$
- (3) Zentrum  $Z = (X' \vee X'') \wedge (Y' \vee Y'')$
- (4) weitere Paare durch Geraden durch  $Z \dots$

### 6.2 Harmonische Darstellung

Gegeben: Gerade  $a$  und elliptische Involution  $\alpha$ .

Gesucht: harmonische Darstellung  $(P, Q, \alpha(P), \alpha(Q))$  von  $\alpha$ .

Konstruktion:

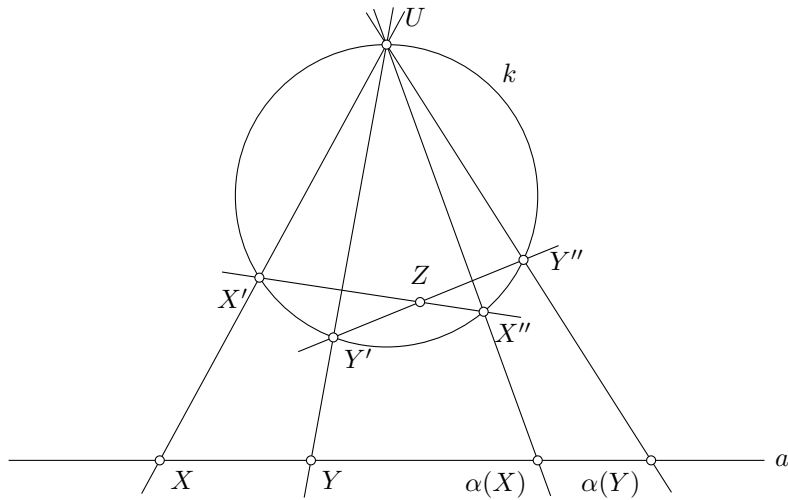


Abbildung 6.1: Konstruktion einer elliptischen Involution.

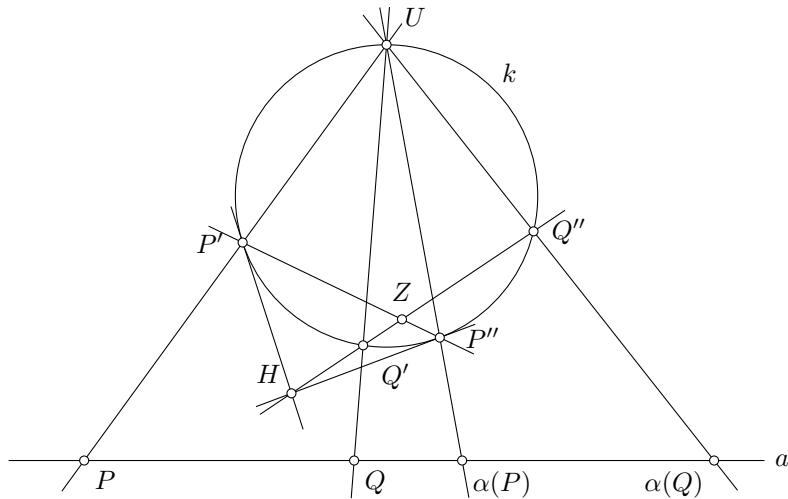


Abbildung 6.2: Konstruktion der harmonischen Darstellung einer Involution.

- (1) Kreis  $k$ , Punkt  $U \in k$ , Zentrum  $Z$  wie oben
- (2)  $P' = (P \vee U) \cap k$
- (3)  $P'' = (P' \vee Z) \cap k$
- (4)  $H = \text{Pol von } P' \vee P'' \text{ bezüglich } k$
- (5)  $\{Q', Q''\} = (H \vee Z) \cap k$ , übertragen auf  $a \dots$

### 6.3 Spezielle Verbindungsgerade

Gegeben: zwei imaginäre Punkte  $A = (a, \vec{\alpha})$  und  $B = (b, \vec{\beta})$ , deren Träger verschieden sind und in der gemeinsamen Ebene  $C^- = a \vee b$  liegen.

Gesucht: spezielle imaginäre Verbindungsgerade  $c = A \vee B = (C^\pm, \gamma)$ .

Konstruktion:

- (1)  $X = a \wedge b$
- (2) harmonische Darstellung  $(X, Y, \alpha(X), \alpha(Y))$  von  $A$
- (3) harmonische Darstellung  $(X, Z, \beta(X), \beta(Z))$  von  $B$
- (4)  $C^+ = (Y \vee Z) \wedge (\alpha(X) \vee \beta(X))$
- (5) Wegen Harmonieerhaltung auch  $\alpha(Y) \vee \beta(Z) \in C^+$  und damit  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} \vee C^+ = \vec{\beta} \vee C^+$ .

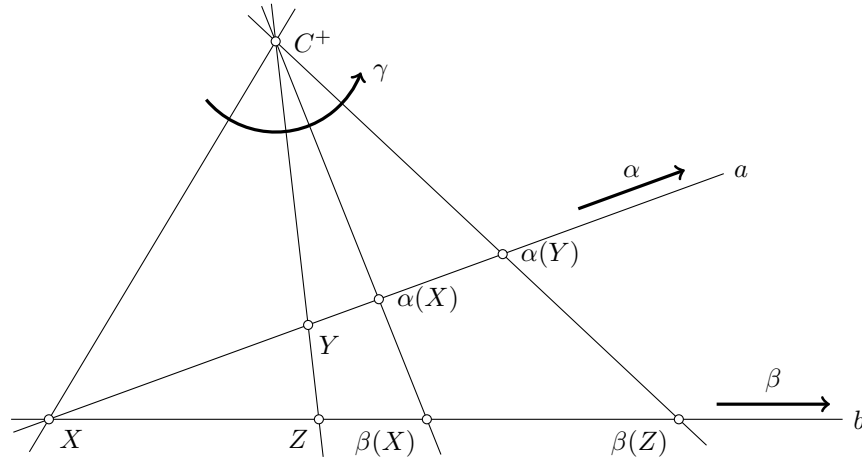


Abbildung 6.3: Konstruktion der speziellen imaginären Verbindungsgeraden zweier imaginärer Punkte.

## 6.4 Allgemeine Verbindungsgerade

Gegeben: zwei imaginäre Punkte  $A = (a, \vec{\alpha})$  und  $B = (b, \vec{\beta})$  mit windschiefen Trägern.

Gesucht: allgemeine imaginäre Verbindungsgerade  $c = A \vee B = (S, \vec{\sigma})$ .

Konstruktion: wir wählen einen reellen Punkt  $X \notin S$  und suchen die imaginäre Verbindungsebene  $E = c \vee X = A \vee B \vee X = (e, \vec{e})$ .

- (1)  $X \in a$ :  $E = (a, a \vee \vec{\beta})$ .
- (2)  $X \in b$ :  $E = (b, b \vee \vec{\alpha})$ .
- (3)  $X \notin a$  und  $X \notin b$ :
  - (a)  $x =$  Transversale durch  $X$  an  $a$  und  $b$
  - (b)  $m = X \vee A = (M^\pm, \vec{\mu})$  speziell imaginär mit  $M^+ = X$ ,  $M^- = X \vee a$  und  $\vec{\mu} = X \vee \vec{\alpha}$

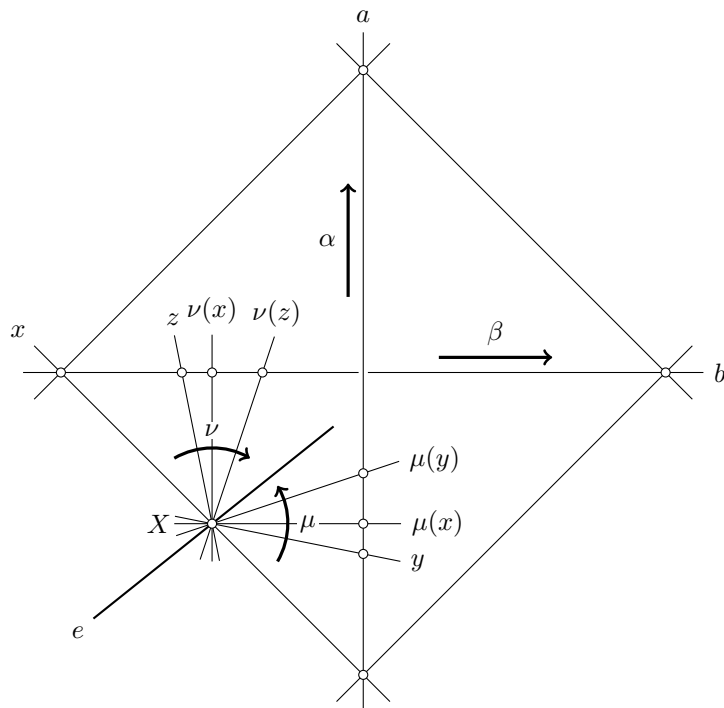


Abbildung 6.4: Konstruktion der allgemeinen imaginären Verbindungsgeraden zweier imaginärer Punkte.

- (c)  $n = X \vee B = (N^\pm, \vec{\nu})$  speziell imaginär mit  $N^+ = X$ ,  $N^- = X \vee b$  und  $X \vee \vec{\nu} = \vec{\beta}$
- (d) harmonische Darstellung  $(x, y, \mu(x), \mu(y))$  von  $m$
- (e) harmonische Darstellung  $(x, z, \nu(x), \nu(z))$  von  $n$
- (f)  $e = (y \vee z) \wedge (\mu(x) \vee \nu(x))$  mit  $e \in X$
- (g)  $E = m \vee n$  mit  $\vec{e} = \vec{\mu} \vee e = \vec{\nu} \vee e$

## 7 Karl Georg Christian von Staudt

- 1798 geboren am 24. Januar in Rothenburg ob der Tauber
- 1819 Schüler von Carl Friedrich Gauss in Göttingen
- 1832 Heirat mit Jeanette Drechsler (2 Kinder)
- 1835 Professor für Mathematik an der Universität Erlangen
- 1847 *Geometrie der Lage*
- 1856 *Beiträge zur Geometrie der Lage*. Erstes Heft
- 1857 *Beiträge zur Geometrie der Lage*. Zweites Heft
- 1860 *Beiträge zur Geometrie der Lage*. Drittes Heft
- 1867 gestorben am 1. Juni in Erlangen

## 8 Texte

### 8.1 Staudt (1856): Vorwort.

Indem die Mathematik darnach strebt, Ausnahmen von Regeln zu beseitigen und verschiedene Sätze aus einem Gesichtspunkte aufzufassen, wird sie häufig genöthigt, Begriffe zu erweitern oder neue Begriffe aufzustellen, was beinahe immer einen Fortschritt in der Wissenschaft bezeichnet. Dahin gehört namentlich die Einführung von imaginären Grössen in der Analysis und die Einführung von imaginären Elementen in der Geometrie. Dass eine Ellipse oder Hyperbel durch ihre Brennpunkte und eine Tangente bestimmt ist, war schon den ältern Geometern bekannt. Dass aber die Curve aus dem Grunde bestimmt ist, weil von ihr eigentlich fünf Tangenten gegeben sind, und dass also der erwähnte Satz nur ein besonderer Fall von einem allgemeineren Satze ist, ergab sich erst aus der Betrachtung der imaginären Elemente. In meiner im Jahr 1847 erschienenen Geometrie der Lage aber konnte ich in die Lehre von den imaginären Elementen, deren Begründung der nächste Zweck dieser Beiträge ist, schon deshalb nicht tiefer eingehen, weil es mir damals noch nicht gelungen war, zwei einander conjungirte imaginäre Elemente von einander zu unterscheiden.

Dass die Theorie der imaginären Elemente, durch welche das Gebiet der Geometrie um ein Bedeutendes erweitert und zugleich die Übersicht über die Sätze erleichtert wird, eine gewisse Ausführlichkeit in der Behandlung erfordert, liegt in der Natur der Sache. Sind ja selbst bei dem Satze, dass durch zwei Punkte eine Gerade bestimmt ist, sechs Fälle zu betrachten. In der analytischen Geometrie nennt man, was sehr einfach zu sein scheint, einen Punkt imaginär, wenn seine Coordinaten nicht sämmtlich reell sind. Indessen ist hiedurch nur die Sprache der Algebra auf die Geometrie übertragen, keineswegs aber nachgewiesen, dass ein imaginärer Punkt, gleichwie ein reeller Punkt, etwas vom Coordinatensysteme Unabhängiges sei. Wo ist, fragt sich wohl Jeder, der imaginäre Punkt, wenn man vom Coordinatensysteme abstrahirt? So entbehrte denn bisher die Geometrie, wenn sich's um imaginäre Elemente handelte, der Evidenz, welche man sonst an ihr rühmt und wohl auch mit Recht von ihr verlangt.

Erlangen, im Mai 1856. Der Verfasser.

### 8.2 Staudt (1856): §7. Imaginäre Elemente.

116. Wenn man mit einem involutorischen einförmigen Gebilde,  $AA_1 \cdot BB_1 \cdots$ , welches keine Ordnungselemente hat, einen bestimmten in demselben enthaltenen Sinn  $ABA_1$  verbindet, so hat man ein imaginäres Element  $ABA_1B_1$  I. Art, nämlich einen imaginären Punkt, oder eine imaginäre Gerade I. Art oder eine imaginäre Ebene, je nachdem das einförmige Gebilde ein Punktgebilde oder ein Strahlenbüschel oder ein Ebenenbüschel ist. Verbindet man mit



demselben involutorischen Gebilde den entgegengesetzten Sinn, so erhält man das imaginäre Element  $A_1BAB_1$ , welches dem erstern conjugirt heissen soll. Elemente werden aber dergleichen Verbindungen zweier Begriffe nur aus dem Grunde genannt, weil sie häufig die Stelle von wirklichen (reellen) Elementen vertreten.

Ist von einem imaginären Elemente  $ABA_1B_1$  I. Art die Rede, so versteht es sich von selbst, dass  $A, B, A_1, B_1$  vier reelle Elemente eines und desselben einförmigen Gebildes und in diesem die Elemente  $A, A_1$  durch die Elemente  $B, B_1$  getrennt sind. Das imaginäre Element  $EFE_1F_1$  fällt mit dem erstern zusammen, sodass also  $ABA_1B_1, EFE_1F_1$  nur verschiedene Darstellungen eines und desselben imaginären Elementes sind, wenn das involutorische Gebilde  $EE_1 \cdot FF_1 \cdots$  mit dem involutorischen Gebilde  $AA_1 \cdot BB_1 \cdots$  identisch ist und überdiess der Sinn  $EFE_1$  mit dem Sinn  $ABA_1$  übereinstimmt. Namentlich kann also das imaginäre Element  $ABA_1B_1$  auch durch  $BA_1B_1A$  oder  $A_1B_1AB$  oder  $B_1ABA_1$  und das demselben conjugirte Element  $A_1BAB_1$  auch durch  $BAB_1A_1$  oder  $AB_1A_1B$  oder  $B_1A_1BA$  dargestellt werden.

117. Verbindet man mit einem geschaart-involutorischen Systeme  $aa_1 \cdot bb_1 \cdots$ , welches keine Ordnungslinien hat, einen bestimmten in der involutorischen Regelschaar  $aa_1 \cdot bb_1 \cdots$  enthaltenen Sinn  $aba_1$ , so hat man eine imaginäre Gerade  $aba_1b_1$  II. Art. Verbindet man mit demselben Systeme den entgegengesetzten Sinn, so erhält man die der erstern Geraden conjugirte Gerade  $a_1bab_1$ .

Ist von einer imaginären Geraden  $aba_1b_1$  II. Art die Rede, so versteht es sich von selbst, dass  $a, b, a_1, b_1$  vier reelle Gerade einer und derselben Regelschaar und in dieser die Geraden  $a, a_1$  durch die Geraden  $b, b_1$  getrennt sind. Die imaginäre Gerade  $efe_1f_1$  fällt mit der ersteren zusammen, so dass also  $aba_1b_1, efe_1f_1$  nur verschiedene Darstellungen einer und derselben imaginären Geraden sind, wenn das involutorische System  $ee_1 \cdot ff_1 \cdots$  mit dem involutorischen System  $aa_1 \cdot bb_1 \cdots$  identisch ist und überdiess der Sinn  $efe_1$  mit dem Sinne  $aba_1$  übereinstimmt. Namentlich kann also die imaginäre Gerade  $aba_1b_1$  auch durch  $ba_1b_1a$  oder  $a_1b_1ab$  oder  $b_1aba_1$  und die ihr conjugirte Gerade  $a_1bab_1$  auch durch  $bab_1a_1$  oder  $ab_1a_1b$  oder  $b_1a_1ba$  dargestellt werden.

Ausser den in dieser und der vorigen Nummer erwähnten imaginären Elementen gibt es keine andern.

118. Die Darstellungen  $aba_1b_1, efe_1f_1$  von zwei imaginären Elementen oder auch zwei Darstellungen  $aba_1b_1, efe_1f_1$  eines und desselben imaginären Elements sollen zu einander projektivisch heissen, wenn die beiden Würfe  $aba_1b_1, efe_1f_1$  zu einander projektivisch sind. Ist ein imaginäres Element durch einen harmonischen Wurf  $aba_1b_1$  dargestellt, so soll diese Darstellung desselben eine harmonische heissen. – Unter allen Darstellungen eines und desselben imaginären Elements  $ghg_1h_1$ , welche von einem und demselben Elemente  $e$  ausgehen, ist eine aber auch nur eine, welche zu einer gegebenen Darstellung  $aba_1b_1$  eines andern oder auch desselben imaginären Elements projektivisch, und also auch nur eine, welche harmonisch ist.

Ist  $ghg_1h_1$  ein imaginäres Element I. Art, so giebt es (83) zu jedem reellen Elemente  $e$ , welches dem einförmigen Gebilde  $ghg_1 \dots$  angehört, drei andere reelle Elemente  $e_1, f, f_1$ , so dass  $efe_1f_1$  eine zu  $aba_1b_1$  projektivische Darstellung des imaginären Elements  $ghg_1h_1$  ist. Ist  $ghg_1h_1$  eine imaginäre Gerade II. Art, so sind durch jede reelle Gerade  $e$ , welche kein Leitstrahl des involutorischen Systems  $gg_1 \cdot hh_1 \dots$  ist, drei andere reelle Gerade  $e_1, f, f_1$  bestimmt, so dass  $efe_1f_1$  eine zu  $aba_1b_1$  projektivische Darstellung der imaginären Geraden  $ghg_1h_1$  ist. Alle Leitstrahlen des involutorischen Systems  $gg_1 \cdot hh_1 \dots$ , welche die Gerade  $e$  schneiden, gehören einer und derselben Regelschaar an, welche von einer in dem Systeme enthaltenen involutorischen Regelschaar  $ee_1 \cdot ff_1 \dots$  die Leitschaar ist.

119. Von einem imaginären Elemente  $ABA_1B_1$  soll gesagt werden, dass es

in dem reellen Elemente  $u$  liege, wenn in diesem alle Elemente des involutorischen Gebildes  $AA_1 \cdot BB_1 \dots$  liegen. Jeder imaginäre Punkt liegt daher in *einer* reellen Geraden und in allen den reellen Ebenen, welche in dieser Geraden (dem reellen Träger des imaginären Punkts) sich schneiden.

durch das reelle Element  $s$  gehe, wenn durch dieses alle Elemente des involutorischen Gebildes  $AA_1 \cdot BB_1 \dots$  gehen. Jede imaginäre Ebene geht hier nach durch *eine* reelle Gerade und durch alle die reellen Punkte, welche in dieser Geraden (der reellen Axe der imaginären Ebene) sich befinden.

Jede imaginäre Gerade I. Art liegt in einer reellen Ebene und geht durch einen reellen Punkt, während eine imaginäre Gerade II. Art weder in einer reellen Ebene liegt noch durch einen reellen Punkt geht. – Ob man sagt, dass ein Element in einem anderen liege oder dass dieses durch jenes gehe, ist ganz einerlei.

Geht ein reelles Element durch das eine von zwei einander conjungirten imaginären Elementen, so geht es auch durch das andere.

Liegt ein reelles Element in dem einen von zwei einander conjungirten imaginären Elementen, so liegt es auch im andern.

120. Von einem imaginären Punkte  $ABA_1B_1$  soll gesagt werden, dass er in der imaginären Ebene  $EFE_1F_1$  liege, wenn entweder der reelle Träger  $u$  des imaginären Punkts mit der reellen Axe  $s$  der imaginären Ebene zusammenfällt, oder wenn das involutorische gerade Gebilde  $AA_1 \cdot BB_1 \dots$  und der involutorische Ebenenbüschel  $EE_1 \cdot FF_1 \dots$  zu einander perspektivisch sind und überdiess der Sinn  $ABA_1$  mit dem Sinne  $EFE_1$  übereinstimmt. Im letztern Falle ist zu jeder Darstellung  $ABA_1B_1$  des imaginären Punkts eine Darstellung  $s(ABA_1B_1)$  der imaginären Ebene und zu jeder Darstellung  $EFE_1F_1$  der imaginären Ebene eine Darstellung  $u(EFE_1F_1)$  des imaginären Punkts perspektivisch.

Ein imaginärer Punkt  $ABA_1B_1$  wird aus jeder reellen Geraden  $s$ , welche mit ihm nicht in einer und derselben reellen Ebene liegt, durch eine imaginäre Ebene  $s(ABA_1B_1)$  projicirt.

Eine imaginäre Ebene  $EFE_1F_1$  wird von jeder reellen Geraden  $u$ , welche mit der Ebene keinen reellen Punkt gemein hat, in einem imaginären Punkte  $u(EFE_1F_1)$  geschnitten.

121. Von einer imaginären Geraden  $ghg_1h_1$  I. Art soll gesagt werden, dass sie durch den imaginären Punkt  $ABA_1B_1$  gehe, wenn der involutorische Strahlenbüschel  $gg_1 \cdot hh_1 \dots$  und das involutorische gerade Gebilde  $AA_1 \cdot BB_1 \dots$  zu einander perspektivisch sind und überdiess der Sinn  $ghg_1$  mit dem Sinne  $ABA_1$  übereinstimmt, mithin zu jeder Darstellung des einen von den beiden imaginären Elementen eine Darstellung des andern perspektivisch ist.

in der imaginären Ebene  $EFE_1F_1$  liege, wenn der involutorische Strahlenbüschel  $gg_1 \cdot hh_1 \dots$  und der involutorische Ebenenbüschel  $EE_1 \cdot FF_1 \dots$  zu einander perspektivisch sind und überdiess der Sinn  $ghg_1$  mit dem Sinne  $EFE_1$  übereinstimmt, demnach zu jeder Darstellung des einen von den beiden imaginären Elementen eine Darstellung des andern perspektivisch ist.

Jeder imaginäre Punkt  $ABA_1B_1$  wird aus jedem reellen Punkte  $S$ , welcher mit ihm nicht in einer und derselben reellen Geraden liegt, durch eine imaginäre Gerade  $S(ABA_1B_1)$  I. Art, jede imaginäre Gerade  $aba_1b_1$  I. Art aus jedem reellen Punkte  $M$ , welcher mit ihr nicht in einer und derselben reellen Ebene liegt, durch eine imaginäre Ebene  $M(aba_1b_1)$  projicirt. Dieselbe Ebene projicirt auch die imaginäre Gerade aus der reellen Geraden, welche den reellen Punkt der erstern mit dem Punkte  $M$  verbindet.

Jede imaginäre Ebene  $EFE_1F_1$  wird von jeder reellen Ebene  $U$ , welche nicht durch die reelle Axe der erstern Ebene geht, in einer imaginären Geraden  $U(EFE_1F_1)$  I. Art, jede imaginäre Gerade  $efe_1f_1$  I. Art von jeder reellen Ebene  $V$ , welche nicht durch den reellen Punkt der imaginären Geraden geht, in einem imaginären Punkte  $V(efe_1f_1)$  geschnitten. In demselben Punkte schneiden sich auch die imaginäre Gerade und die reelle Gerade, in welcher der reelle Träger der erstern von der Ebene  $V$  geschnitten wird.

Zwei imaginäre Gerade I. Art, welche einen imaginären Punkt mit einander gemein haben, liegen in einer und derselben reellen oder imaginären Ebene, je nachdem die Gerade, welche ihre reellen Punkte mit einander verbindet, den reellen Träger jenes imaginären Punktes schneidet oder nicht schneidet.

Zwei imaginäre Gerade I. Art, welche in einer und derselben imaginären Ebene liegen, haben einen reellen oder imaginären Punkt mit einander gemein, je nachdem die Schnittlinie ihrer reellen Träger die reelle Axe jener imaginären Ebene schneidet oder nicht schneidet.

122. Von einer imaginären Geraden  $ghg_1h_1$  II. Art soll gesagt werden, dass sie

durch den imaginären Punkt  $ABA_1B_1$  gehe, wenn das involutorische gerade Gebilde  $AA_1 \cdot BB_1 \dots$  in dem involutorischen Systeme  $gg_1 \cdot hh_1 \dots$  enthalten ist und überdiess der Sinn  $ABA_1$  mit dem Sinne  $ghg_1$  übereinstimmt, mithin zu jeder Darstellung  $ABA_1B_1$  des imaginären Punktes unendlich viele Darstellungen der imaginären Geraden perspektivisch sind.

in der imaginären Ebene  $EFE_1F_1$  liege, wenn der involutorische Ebenenbüschel  $EE_1 \cdot FF_1 \dots$  in dem involutorischen Systeme  $gg_1 \cdot hh_1 \dots$  enthalten ist und überdiess der Sinn  $EFE_1$  mit dem Sinne  $ghg_1$  übereinstimmt, mithin zu jeder Darstellung  $EFE_1F_1$  der imaginären Ebene unendlich viele Darstellungen der imaginären Geraden perspektivisch sind.

Es sei  $a$  irgend eine reelle Gerade, welche den Träger  $p$  des involutorischen Gebildes  $AA_1 \cdot BB_1 \dots$  im Punkte  $A$  schneidet. Es seien ferner  $q, r$  noch zwei Leitstrahlen des involutorischen Systems  $gg_1 \cdot hh_1 \dots$ , welche die Gerade  $a$  schneiden. Sind nun  $b, a_1, b_1$  diejenigen Leitstrahlen der Regelschaar  $pqr$ , welche beziehlich durch die Punkte  $B, A_1, B_1$  gehen, so ist  $aba_1b_1$  eine zu  $ABA_1B_1$  perspektivische Darstellung der imaginären Geraden  $ghg_1h_1$ . Eben so giebt es zu jeder reellen Geraden  $e$ , welche in der Ebene  $E$  liegt und die Gerade  $EF$  schneidet, drei andere reelle Gerade  $f, e_1, f_1$ , so dass  $efe_1f_1$  eine zu  $EFE_1F_1$  perspektivische Darstellung der imaginären Geraden  $ghg_1h_1$  ist. [...]

### 8.3 Locher-Ernst (1940): Kapitel II.6.

[...] Entschliesst man sich, das ruhende Element als Ergebnis von gewissen Bewegungen aufzufassen, so kann man sagen: Die ungleichsinnigen hyperbolischen Involutionen ergeben als *Stauprodukt* je zwei reelle Punkte bzw. Geraden, die gleichsinnigen elliptischen Involutionen ergeben aber keine anschaulichen reellen Ergebnisse, hingegen weisen sie auf zwei imaginäre Punkte bzw. Geraden hin.

Es war ein genialer Einfall *von Staudts*, durch den er die beiden durch eine elliptische Involution dargestellten imaginären Elemente einzeln zu fassen vermochte: Die zwei gepaarten entsprechenden gleichsinnig laufenden reellen Punkte  $X, X'$  (bzw. Strahlen  $x, x'$ ) können die Involutionen im einen oder diesem entgegengesetzten Sinne durchlaufen. Die im einen Sinne durchlaufene elliptische Involution stellt den einen, die im entgegengesetzten Sinne durchlaufene elliptische Involution stellt den anderen imaginären Punkt (bzw. Gerade) dar. *Ein imaginäres Element wird also durch eine gerichtete elliptische Involution dargestellt.*

Die Untersuchung der imaginären Elemente im Gesamtraum würde den Rahmen dieses Buches überschreiten. Wir wollen aber wenigstens für die Geometrie in der Ebene zeigen, dass die Urphänomene  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{V}$  auch für die erweiterten Begriffe Punkt und Gerade erfüllt sind. Eben dadurch zeigt die Erweiterung ihre Berechtigung. Die Anordnungsphänomene im neuen Bereich

sind durch die Sätze **A** nicht ohne weiteres zu charakterisieren. Jedoch auch hier lässt sich einsehen, in welcher Art die Anordnungssachverhalte **A** als besondere Fälle allgemeinerer Beziehungen sich darstellen. [...]

Abgesehen vom Begriff des Denkens, kann ein Begriff nicht aus sich selbst – ohne Hilfe anderer Begriffe – verstanden werden. Einen Begriff auffassen heisst, sein Verwobensein, seine verschiedenartige Verflechtung innerhalb der gesamten Begriffswelt im Bewusstsein aufleuchten lassen zu können. Die Bedeutung des Begriffes Punkt erscheint uns dadurch, dass er in gewisse, ganz bestimmte Zusammenhänge mit anderen Begriffen einverwoben gedacht werden kann. Diese Verflechtungen werden in den Urphänomenen **G** und **V** geschildert. Zunächst war es die Vorstellung des reellen Punktes, welche uns Beispiele dieses Begriffes «Punkt» lieferte. Aber der Begriff des imaginären Punktes ist genau so ein Beispiel (hier wenigstens für die Geometrie in der Ebene gezeigt). Innerhalb des durch **G**, **V** gegebenen Bereiches kann man zwischen reellem und imaginärem Punkt noch gar nicht unterscheiden. Erst durch die Hinzunahme der Anordnungseigenschaften **A** wird aus diesem umfassenden Begriff «Punkt» ein *Sondergebiet* herauskristallisiert: der reelle Punkt.

#### 8.4 Locher-Ernst (1949): Kapitel I.2.

[...] Durchläuft  $P$  die Punktreihe in einem bestimmten Sinne, so durchläuft der in einer elliptischen Involution zugeordnete Punkt  $P_1$  die Punktreihe im gleichen Sinne, bei einer hyperbolischen Involution hingegen im entgegengesetzten Sinne. Wir können die Doppelpunkte einer hyperbolischen Involution als *die Treffpunkte dieser entgegengesetzten Bewegungen* auffassen. Bei einer elliptischen Involution treffen sich die zugeordneten Punkte  $P$ ,  $P_1$  im Reellen nicht. Die elliptische Involution bestimmt aber eindeutig zwei imaginäre Punkte als Doppelpunkte. Durchläuft  $P$  die Punktreihe in einem bestimmten Sinne, so wird durch eine elliptische Involution dieser Bewegung von  $P$  eine gleichsinnige Bewegung des entsprechenden Punktes  $P_1$  zugeordnet.

*Diese koordinierten Bewegungen betrachten wir als reelles Bild des einen imaginären Doppelpunktes; der andere imaginäre Doppelpunkt wird gegeben durch die koordinierte Bewegungen in entgegengesetzter Richtung.* Kurz: eine gerichtete elliptische Involution stellt einen imaginären Punkt dar, und umgekehrt kann jeder imaginäre Punkt der betrachteten Geraden durch eine gerichtete elliptische Involution gegeben werden. [...]

#### 8.5 Adams (1989): Anhang I.1.

[...] Den Ausdruck «hoch-imaginär» für die hier in Betracht kommende imaginäre Linie im Raume habe ich vermieden, weil es bei der Suche nach dem im eigentlichen Sinne «Über-Imaginären» zu Konfusionen führen könnte. – Es handelt sich darum, *wie* das betreffende imaginäre Gebilde in unserem

gegebenen, reellen Raum seinen Niederschlag findet. Eine «nieder-imaginäre Linie» hat mit diesem reellen Raum einen Punkt und eine Ebene gemeinsam; eine «hoch-imaginäre» weder Punkt noch Ebene. Sie ist in einem naheliegenden Sinne zum reellen Raume *windschief*; wir möchten sie daher eher als «*windschief-imaginäre Linie*» bezeichnen – in diesem Namen käme auch ihre anschauliche Qualität zum Ausdruck. Die nieder-imaginären Linien wären in diesem Sinne mit dem reellen Raume «inzident».

## Literatur

- Adams, Georg (1989): *Lemniskatische Regelflächen. Eine anschauliche Einführung in die Liniengeometrie und Imaginärtheorie*. Mathematisch-Astronomische Blätter, Neue Folge 14. Dornach: Verlag am Goetheanum.
- Haid, Carola (2004): «Synthetische Imaginärtheorie: Einfache Ketten und Fundamentalsatz». Staatsexamensarbeit im Fach Mathematik. Universität Konstanz.
- Juel, Christian (1934): *Vorlesungen über projektive Geometrie. Mit besonderer Berücksichtigung der v. Staudtschen Imaginärtheorie*. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 42. Berlin: Springer.
- Kowol, Gerhard (2009): *Projektive Geometrie und Cayley-Klein Geometrien der Ebene*. Basel: Birkhäuser.
- Kötter, Dieter (1982): «Synthetische Erzeugung und einige Eigenschaften imaginärer linearer Komplexe». In: *Mathematisch-Physikalische Korrespondenz* 123, 124.
- Locher-Ernst, Louis (1940): *Projektive Geometrie und die Grundlagen der Euklidischen und Polareuklidischen Geometrie*. Zürich: Orell Füssli. (Nachdruck 2. Auflage: Dornach: Verlag am Goetheanum 1980).
- Locher-Ernst, Louis (1949): «Das Imaginäre in der Geometrie». In: *Elemente der Mathematik* IV/5, IV/6. (Wiederabdruck: Louis Locher-Ernst: Geometrische Metamorphosen, Dornach: Verlag am Goetheanum 1970).
- Staudt, Karl G. Chr. von (1856): *Beiträge zur Geometrie der Lage*. Heft 1. Nürnberg: Bauer und Raspe.
- Stoss, Hanns-Jörg (2009): *Koordinaten im projektiven Raum*. Mathematisch-Astronomische Blätter, Neue Folge 27. Dornach: Verlag am Goetheanum.
- Zindler, Konrad (1902): *Liniengeometrie mit Anwendungen*. Bd. 1. Sammlung Schubert 34. Leipzig: Göschen.