

Die Symmetrieparametrisierung des umstülpbaren Würfels*[†]

Oliver Conrad

Die symmetrische und gleichmässig rhythmische Bewegungsführung des umstülpbaren Würfelgürtels bzw. Gelenkrings von PAUL SCHATZ [5] wurde bisher entweder durch technische Massnahmen realisiert¹ oder mit numerischen Methoden [4] bestimmt.

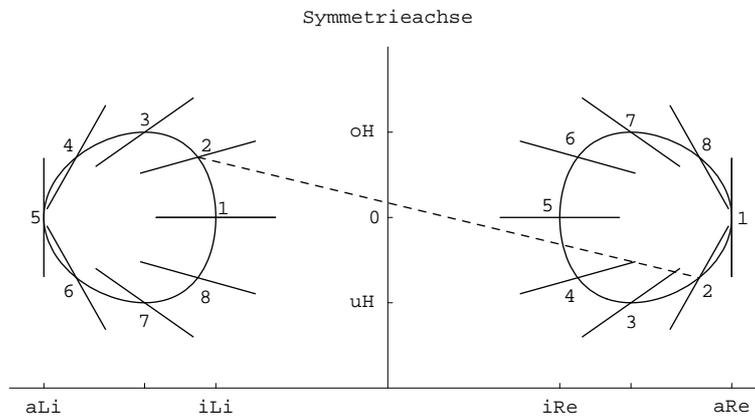


Abbildung 1: Bewegung von zwei gegenüberliegenden Ecken des umstülpbaren Würfels bei raumfest gehaltener Symmetrieachse (links M_1 und rechts M_4 ; vgl. die Bezeichnungen auf S. 27). Die einander entsprechenden Positionen der Würfecken sind mit den gleichen Nummern gekennzeichnet. In Position 2 ist zusätzlich die Würfel diagonale gestrichelt hervorgehoben. Ihre Länge bleibt während der ganzen Umstülpung erhalten. Die durchgezogenen Strecken geben zu jeder eingezeichneten Position die Richtung der Gelenkachse an.

In diesem Beitrag wird die Symmetrieparametrisierung des umstülpbaren Würfels hergeleitet. Wir gehen von der in [3, 1] eingeführten Pa-

*Die Symmetrieparametrisierung wurde im Oktober 2005 innerhalb der Mathematischen Studientage der Mathematisch-Astronomischen Sektion am Goetheanum in Dornach (Schweiz) vorgestellt.

[†]Ersch. in *Mathematisch-Physikalische Korrespondenz*, Nr. 230, S. 25-40, 2007.

¹Maschinen wie die Turbula, die Inversina, die Pulsina oder die Oloid-Rührer sind so gebaut und angetrieben, dass die Umstülpungsbewegung «gleichmässig» erfolgt.

parametrisierung aus, die den Winkel zwischen Gelenkachse und beliebiger Normalebene zur Symmetrieachse des Gelenkrings als Parameter benutzt, leiten dann die symmetrische Bewegungsführung auf algebraischem Wege her und betrachten zum Schluss die Geometrie der Symmetrieparametrisierung. Dabei zeigt sich, wo und wie sich die *gleichförmige* Kreisbewegung in die Umstülpung eingliedert.

Mit der Symmetrieparametrisierung ist eine erste Grundlage gegeben, um den umstülpbaren Gelenkring des Schatzschen Würfels in neuer Weise technisch nutzbar zu machen. Der aus der Symmetrieparametrisierung hervorgehende Antrieb und die entsprechende Lagerung des umstülpbaren Gelenkrings zeichnen sich dadurch aus, dass a) die Symmetrieachse des Gelenkrings raumfest bleibt und b) der Gelenkring als Ganzes zur Anwendung kommt.

Zusammenfassend kann man die neue symmetrische Bewegungsführung des umstülpbaren Gelenkrings so charakterisieren: Während sich alle Teile bewegen, bleibt das Gelenksystem als Ganzes in Ruhe.

Gelenkring des umstülpbaren Würfels

Die wichtigen geometrischen Eigenschaften und Symmetrien des umstülpbaren Würfels bzw. dessen Gelenkrings sind im Folgenden aufgeführt:

1. Alle sechs Glieder sind gleich lang: $l_i \equiv l \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. Der Winkel zwischen jeweils zwei aufeinanderfolgenden Gelenkachsen ist 90° . Man spricht von dem charakteristischen Winkel $\psi = 90^\circ$.
3. Jedes Paar gegenüberliegender Gelenkachsen a_i und a_{i+3} liegt in jedem Bewegungszustand des Gelenkrings in einer gemeinsamen Ebene $E_{i,i+3}$. Diese drei Ebenen $E_{1,4}$, $E_{2,5}$ und $E_{3,6}$ gehören einem Ebenenbüschel an, dessen Trägergerade σ die Symmetrieachse des Gelenkrings darstellt. Alle drei Ebenen schliessen jeweils einen 60° -Winkel ein.
4. Die Gelenkachsen a_1 , a_3 , a_5 gehören in jedem Bewegungszustand einem Strahlenbündel an, dessen Trägerpunkt U auf der Symmetrieachse σ liegt. Entsprechend gehören die Gelenkachsen a_2 , a_4 , a_6 einem zweiten Strahlenbündel an, dessen Träger V auch immer auf der Symmetrieachse σ liegt.
5. Jeweils zwei aufeinanderfolgende Gelenkachsen, also z.B. a_1 und a_2 , liegen in jedem Bewegungszustand des Gelenkrings windschief

zueinander mit dem (minimalen) Abstand l . Die Endpunkte dieses Abstandes sind die so genannten Mittelpunkte M_i der Gelenkachsen, in unserem Beispiel M_1 und M_2 .

6. Der Gelenkring geht in jedem Bewegungszustand bei einer Drehung von 120° um die Symmetrieachse σ in sich selbst über.

Bezeichnungen

l	Länge der Glieder
$\psi = 90^\circ$	Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gelenkachsen
a_i	i -te Gelenkachse
\mathbf{a}_i	Richtungsvektor der i -ten Gelenkachse
M_i	Mittelpunkt der i -ten Gelenkachse
ω_1	Winkel zwischen den Gliedern $\overline{M_6M_1}$ und $\overline{M_1M_2}$
ω_2	Winkel zwischen den Gliedern $\overline{M_3M_4}$ und $\overline{M_4M_5}$
σ	Symmetrieachse des Gelenkrings
α	Winkel zwischen a_1 und beliebiger Normalebene zu σ
β	Winkel zwischen a_4 und beliebiger Normalebene zu σ

Ansatz

Die drei Gelenkachsenmittelpunkte M_1, M_3, M_5 legen wegen der dreizähligen Symmetrie eine Ebene H_{135} fest, die senkrecht auf der Symmetrieachse σ steht. Entsprechendes gilt für die drei anderen Mittelpunkte M_2, M_4, M_6 , die die Ebene H_{246} bestimmen. Die Ebenen H_{135} und H_{246} liegen in jedem Bewegungszustand des umstülpbaren Würfels parallel zueinander. Wir legen nun fest, dass die Symmetrieachse σ des umstülpbaren Würfels mit der z -Achse eines kartesischen Koordinatensystems zusammenfallen und die Ebenen H_{135} und H_{246} stets gleich weit entfernt von und parallel zu der xy -Ebene des Koordinatensystems zu liegen kommen sollen. Die sechs Mittelpunkte M_i , die Schnittpunkte U und V und die sechs Richtungsvektoren \mathbf{a}_i der Gelenkachsen lassen sich daher folgendermassen ansetzen:

$$\overrightarrow{OM_k} = \begin{pmatrix} R_U \cos(-150^\circ + k \cdot 60^\circ) \\ R_U \sin(-150^\circ + k \cdot 60^\circ) \\ \frac{z}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{für } k = 1, 3, 5 \\ \text{und } R_U \geq 0, \end{array} \quad (1a)$$

$$\overrightarrow{OM_k} = \begin{pmatrix} R_V \cos(-150^\circ + k \cdot 60^\circ) \\ R_V \sin(-150^\circ + k \cdot 60^\circ) \\ -\frac{z}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{für } k = 2, 4, 6 \\ \text{und } R_V \geq 0, \end{array} \quad (1b)$$

$$U\left(0 \mid 0 \mid R_U \tan \alpha + \frac{z}{2}\right), \quad V\left(0 \mid 0 \mid -R_V \tan \beta - \frac{z}{2}\right), \quad (2)$$

$$\mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \sin ([k-1] \cdot 60^\circ) \\ \cos \alpha \cos ([k-1] \cdot 60^\circ) \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{für } k = 1, 3, 5, \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k &= -\begin{pmatrix} -\cos \beta \sin ([k-4] \cdot 60^\circ) \\ \cos \beta \cos ([k-4] \cdot 60^\circ) \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\cos(-\beta) \sin ([k-1] \cdot 60^\circ) \\ \cos(-\beta) \cos ([k-1] \cdot 60^\circ) \\ \sin(-\beta) \end{pmatrix}, \quad \text{für } k = 2, 4, 6. \quad (3b) \end{aligned}$$

Dieser Ansatz geht aus demjenigen von [3, S. 15] hervor, wenn bei letzterem

- erstens das Vorzeichen von z umgekehrt und
- zweitens eine Translation um $\frac{z}{2}$ in Richtung der z -Achse durchgeführt

wird. Unter Berücksichtigung dieser Transformation des Koordinatensystems und der Einschränkung auf den Fall des umstülpbaren Würfels, bei welchem der charakteristische Winkel $\psi = 90^\circ$ beträgt, können wir die Ergebnisse aus [3] übernehmen. In [3] wurde der Winkel α als Parameter der Umstülpbewegung gewählt und die vier Grössen β , $R_U \geq 0$, $R_V \geq 0$, z sowie die beiden Winkel ω_1 und ω_2 in Abhängigkeit von α berechnet.

Aus Gleichung (5) von [3] erhalten wir den Winkel β in Abhängigkeit von α ,

$$\sin \beta_{1/2} = \frac{\pm \cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha}}, \quad (4a)$$

$$\cos \beta_{1/2} = \frac{\pm 2 \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha}}, \quad (4b)$$

$$\tan \beta_1 = \tan \beta_2 = \frac{-\sin 2\alpha}{2(\cos 2\alpha - 1)} = \frac{1}{2} \cot \alpha \quad (4c)$$

und aus Gleichung (9) von [3] den Winkel ω_1 in Abhängigkeit von α ,

$$\tan \frac{\omega_1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sin \alpha}. \quad (5)$$

Eine Betrachtung des umstülpbaren Würfels zeigt, dass die Winkel ω_1 und ω_2 zwischen 60° und 300° liegen. Zusammen mit dieser Information legt die Gleichung (5) den Winkel ω_1 eindeutig fest.

Die restlichen vier Größen R_U , R_V , z und ω_2 hängen über die Gleichungen (4) und (5) nur noch von α und l ab. Siehe die Gleichungen (6) und (10) aus [3], die wir hier nochmals aufführen².

$$R_V = \frac{2}{\sqrt{3}}l \sin \frac{\omega_1}{2}, \quad (6a)$$

$$R_U = \frac{1}{\sqrt{3}}l \sin \frac{\omega_1}{2} - l \sin \alpha \cos \frac{\omega_1}{2}, \quad (6b)$$

$$z = -l \cos \alpha \cos \frac{\omega_1}{2}, \quad (6c)$$

$$\tan \frac{\omega_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sin \beta + 2 \cos \beta \tan \alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sin \beta}. \quad (6d)$$

Die Größen R_U , R_V und z lassen sich auch über den Winkel β bestimmen,

$$R_U = \frac{2}{\sqrt{3}}l \sin \frac{\omega_2}{2}, \quad (7a)$$

$$R_V = \frac{1}{\sqrt{3}}l \sin \frac{\omega_2}{2} + l \sin \beta \cos \frac{\omega_2}{2}, \quad (7b)$$

$$z = l \cos \beta \cos \frac{\omega_2}{2}. \quad (7c)$$

Siehe die Gleichungen (7) aus [3]³.

Lösungsweg

Die asymmetrische Bewegungsführung des umstülpbaren Würfels bei der Parametrisierung mit dem Winkel α wird deutlich, wenn man den Verlauf der Winkel ω_1 und ω_2 vergleicht. Siehe Abbildung 2.

Mit den z -Werten der Punkte U und V aus Gleichung (2),

$$z_U = R_U \tan \alpha + \frac{z}{2}, \quad z_V = -R_V \tan \beta - \frac{z}{2}, \quad (8)$$

²Die z -Koordinate trägt wegen der oben erwähnten Spiegelung das umgekehrte Vorzeichen im Vergleich zu Gleichung (6c) aus [3, S. 18].

³Die z -Koordinate trägt aus den in Anmerkung 2 genannten Gründen wieder das umgekehrte Vorzeichen.

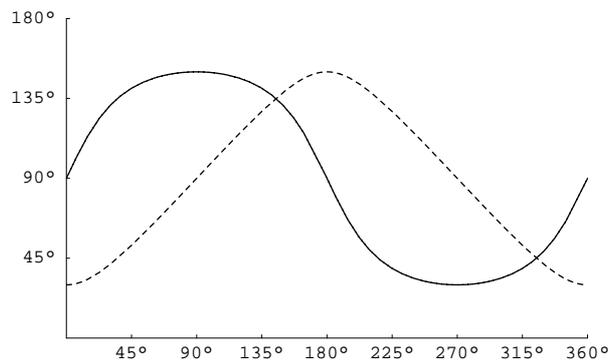


Abbildung 2: Vergleich der Winkel $\frac{\omega_1}{2}$ (durchgezogen) und $\frac{\omega_2}{2}$ (gestrichelt) in Abhängigkeit vom Parameter α .

erhalten wir das Produkt

$$p = z_U \cdot z_V = \frac{l^2 (3 \cos 2\alpha - 7)(3 \cos 2\alpha - 13)}{24 (3 \cos 2\alpha - 5)} \quad (9a)$$

$$= \frac{l^2 (3 \cos 2\beta - 7)(3 \cos 2\beta - 13)}{24 (3 \cos 2\beta - 5)} \quad (9b)$$

wahlweise in Abhängigkeit von α oder β . Da das Produkt p in gleicher Weise von α und β abhängt, betrachten wir zunächst nur die Funktion $p(\alpha)$. Das Produkt p bestätigt die asymmetrische Bewegungsführung des

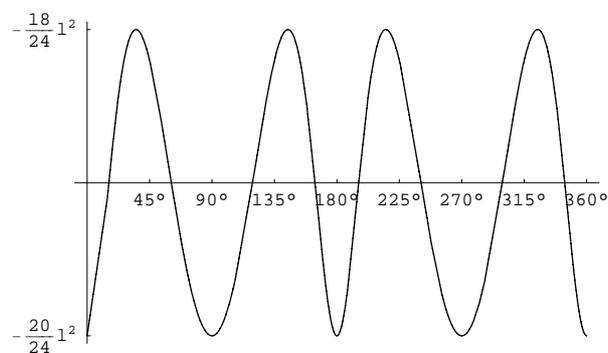


Abbildung 3: Das Produkt p in Abhängigkeit von α .

umstülpbaren Würfels bei der Parametrisierung mit dem Winkel α . Siehe Abbildung 3.

Es stellt sich nun die Frage, wie wir an die Symmetrieparametrisierung herankommen. Bei letzterer würde man erwarten, dass das Produkt

p «gleichmässig» vom gesuchten Parameter s abhängt. Wir symmetrisieren daher das Produkt p .

Mit Hilfe einer Kurvendiskussion findet man die Extrema der Funktion $p(\alpha)$,

$$p_{min} = -\frac{20}{24} l^2, \quad p_{max} = -\frac{18}{24} l^2. \quad (10)$$

Da die Produktfunktion $p(\alpha)$ wie eine in Richtung α verformte Kosinusfunktion aussieht, setzen wir für die Symmetrieparametrisierung folgende Produktfunktion an:

$$p(s) = -\frac{(\cos 4s + 19)}{24} l^2. \quad (11)$$

Die Variable s wird sich als der gesuchte und im Folgenden zu bestätigende Symmetrieparameter herausstellen. Die Abbildung 4 zeigt die beiden Produktfunktionen $p(\alpha)$ und $p(s)$ im Vergleich. Wenn die Winkelpara-

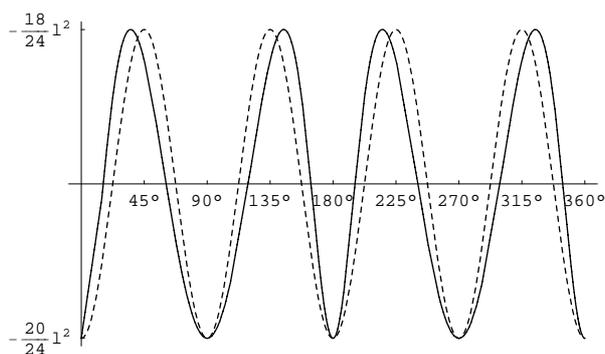


Abbildung 4: Das Produkt p in Abhängigkeit von α (durchgezogen) und dem Symmetrieparameter s (gestrichelt).

meter α und β in Abhängigkeit von dem neuen Parameter s ausgedrückt werden können, ist mit Hilfe der Gleichungen (1) bis (6) die Symmetrieparametrisierung des umstülpbaren Würfels bestimmt. Wir setzen daher die beiden Produktfunktionen gleich,

$$p(\alpha) \stackrel{!}{=} p(s), \quad (12)$$

erhalten durch einfaches Umformen

$$9 \cos^2 2\alpha + 3(\cos 4s - 1) \cos 2\alpha - (5 + 4 \cos 4s) = 0 \quad (13)$$

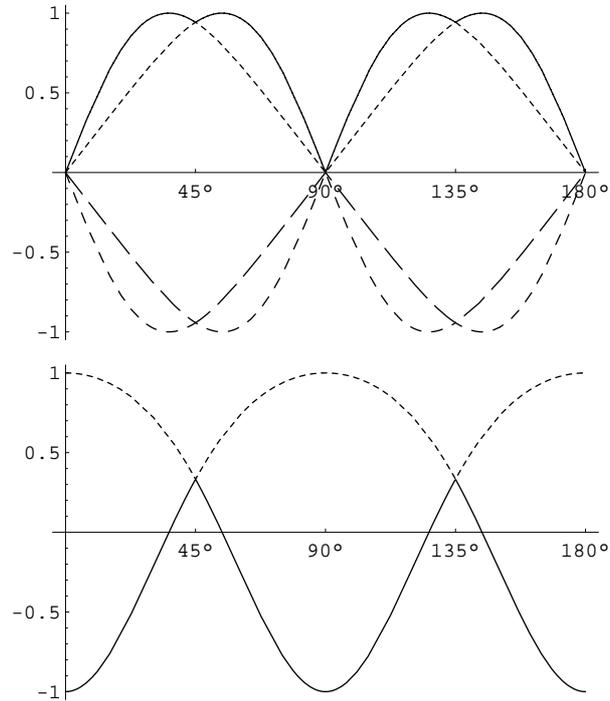


Abbildung 5: $\sin 2\alpha$ (oben) und $\cos 2\alpha$ (unten) in Abhängigkeit vom Symmetrieparameter s . Die vier bzw. zwei Lösungen aus Gleichung (16) sind durch verschiedenen Stricharten hervorgehoben.

und durch Einsetzen der Identitäten

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

die beiden in $\sin^2 \alpha$ und $\cos^2 \alpha$ quadratischen Gleichungen

$$36\sin^4 \alpha - 6(5 + \cos 4s)\sin^2 \alpha + 2(1 - \cos 4s) = 0, \quad (14a)$$

$$36\cos^4 \alpha - 6(7 - \cos 4s)\cos^2 \alpha + 8(1 - \cos 4s) = 0 \quad (14b)$$

mit den Lösungen

$$\sin^2 \alpha_{1/2} = \frac{1}{12} \left(5 + \cos 4s \pm \sqrt{17 + 18 \cos 4s + \cos^2 4s} \right), \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha_{1/2} &= 1 - \sin^2 \alpha_{1/2} \\ &= \frac{1}{12} \left(7 - \cos 4s \mp \sqrt{17 + 18 \cos 4s + \cos^2 4s} \right), \end{aligned} \quad (15b)$$

bzw.

$$\sin 2\alpha_{1/2} = \pm 2\sqrt{\sin^2 \alpha_{1/2} \cdot \cos^2 \alpha_{1/2}}, \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha_{1/2} &= \cos^2 \alpha_{1/2} - \sin^2 \alpha_{1/2} \\ &= \frac{1}{6} \left(1 - \cos 4s \mp \sqrt{17 + 18 \cos 4s + \cos^2 4s} \right). \end{aligned} \quad (16b)$$

Die Lösung (16b) erhält man auch direkt aus Gleichung (13).

Die Grafen der Abbildung 5 bestätigen, dass die Lösungen (16) für sich alleine genommen nicht-differenzierbare Stellen aufweisen. In der Gesamtheit ergeben sich durch Kombination verschiedener Lösungen allerdings jeweils differenzierbare Funktionen. Um letztere zu bestimmen, benutzen wir Vereinfachungen wie

$$\begin{aligned} 17 + 18 \cos 4s + \cos^2 4s &= 2 \cos^2 2s \cdot (17 + \cos 4s), \\ 9 + \cos 4s \pm \sqrt{2} \cos 2s \sqrt{17 + \cos 4s} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{17 + \cos 4s} \pm \cos 2s \right)^2 \end{aligned}$$

und ziehen dann die Wurzel. Solche Operationen kombinieren die verschiedenen Lösungen aus Gleichung (16) in neuer Weise. Man erhält die vollständig differenzierbaren Funktionen

$$\sin 2\alpha_{1/2} = \frac{\sin 2s}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{17 + \cos 4s} \pm \cos 2s \right), \quad (17a)$$

$$\cos 2\alpha_{1/2} = \frac{1}{6} \left(1 - \cos 4s \mp \cos 2s \cdot \sqrt{2(17 + \cos 4s)} \right), \quad (17b)$$

welche in Abbildung 6 dargestellt sind. Die verschiedenen Vorzeichen von $\sin 2\alpha_{1/2}$, welche in Gleichung (16a) aufgeführt wurden, haben wir bei den Lösungen (17) in den Parameter s hereingenommen.

Bei der Parametertransformation

$$s \longrightarrow s' = - \left(s + \frac{\pi}{2} \right) \quad (18)$$

gehen die beiden Lösungen (17) ineinander über, da

$$\begin{aligned} \sin \left(2 \left[- \left(s + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right) &= \sin 2s, \\ \cos \left(2 \left[- \left(s + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right) &= - \cos 2s, \\ \cos \left(4 \left[- \left(s + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right) &= \cos 4s. \end{aligned}$$

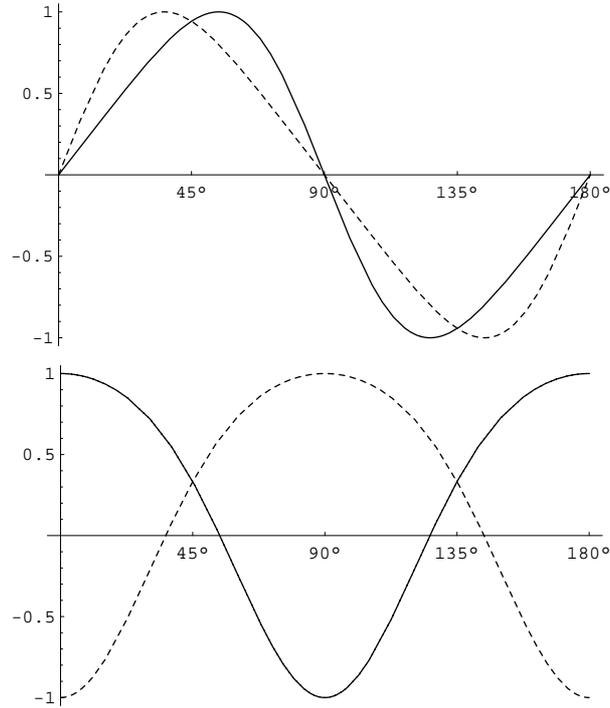


Abbildung 6: $\sin 2\alpha$ (oben) und $\cos 2\alpha$ (unten) in Abhängigkeit vom Symmetrieparameter s . Die erste Lösung aus Gleichung (17) ist jeweils gestrichelt dargestellt, die zweite mit einer durchgezogenen Linie.

Da die Produktfunktion p aus Gleichung (9) in gleicher Weise von den Winkeln α und β abhängt, gelten die Lösungen (17) auch für β . Wählt man für den Winkel α die zweite (bzw. untere) Lösung (17) mit der Anfangsbedingung $\alpha = 0$, $s = 0$, so geht aus den Gleichungen (4) hervor, dass für den Winkel β nur die erste (bzw. obere) Lösung (17) mit der (möglichen) Anfangsbedingung $\beta = -90^\circ$, $s = 0$ in Frage kommt,

$$\sin 2\alpha = \frac{\sin 2s}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{17 + \cos 4s} - \cos 2s \right), \quad (19a)$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{6} \left(1 - \cos 4s + \cos 2s \cdot \sqrt{2(17 + \cos 4s)} \right), \quad (19b)$$

$$\sin 2\beta = \frac{\sin 2s}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{17 + \cos 4s} + \cos 2s \right), \quad (19c)$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{6} \left(1 - \cos 4s - \cos 2s \cdot \sqrt{2(17 + \cos 4s)} \right). \quad (19d)$$

Wir bestimmen nun die Differenzwinkel

$$\Delta := s - \alpha, \quad \Delta' := s' - \beta, \quad (20)$$

zwischen den Parametern α und s einerseits und β und s' aus Gleichung (18) andererseits mit Hilfe des Sinus-Additionstheorems

$$\sin 2\Delta = \sin(2s - 2\alpha) = \frac{\sin 2s}{3}, \quad \sin 2\Delta' = \frac{\sin 2s'}{3} \quad (21)$$

und erhalten die Funktionen

$$\Delta(s) = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin 2s}{3}, \quad (22a)$$

$$\alpha(s) = s - \Delta(s) = s - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin 2s}{3}, \quad (22b)$$

$$\Delta'(s') = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin 2s'}{3}, \quad (22c)$$

$$\beta(s') = s' - \Delta'(s') = s' - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin 2s'}{3}. \quad (22d)$$

Mit den Gleichungen (18), (22b) und (22d) folgt die Beziehung zwischen den Winkeln α und β ,

$$\beta(s) = \alpha(s) - \left(2s + \frac{\pi}{2}\right) = \alpha(s'). \quad (23)$$

In Abhängigkeit vom Parameter s verändern sich die beiden Winkel ω_1 und ω_2 aus Gleichung (5) und (6d) nun gleichartig. Vergleiche die Abbildungen 2 und 7.

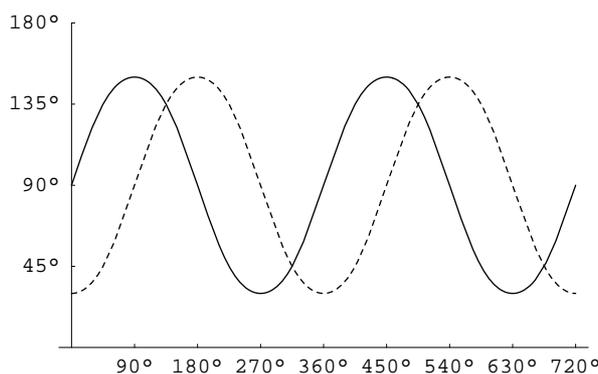


Abbildung 7: Vergleich der Winkel $\frac{\omega_1}{2}$ (durchgezogen) und $\frac{\omega_2}{2}$ (gestrichelt) in Abhängigkeit vom Symmetrieparameter s .

Um die Abhängigkeit der Grössen z , R_V und R_U (siehe Gleichungen (6)) von s zu bestimmen, betrachten wir die Verhältnisse

$$\frac{R_V}{z} = -\frac{2 \tan \frac{\omega_1}{2}}{\sqrt{3} \cos \alpha} = \frac{2}{3} \frac{1}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{4}{3} \frac{1}{\sin 2\alpha}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{R_U}{z} &= -\frac{1 \tan \frac{\omega_1}{2}}{\sqrt{3} \cos \alpha} + \tan \alpha = \frac{2}{3} \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \\ &= \frac{5 - 3 \cos 2\alpha}{3 \sin 2\alpha} \end{aligned} \quad (25)$$

und das Quadrat der Würfeldiagonalen

$$\begin{aligned} 3l^2 &= (R_U + R_V)^2 + z^2 = \left[\left(\frac{5 - 3 \cos 2\alpha}{3 \sin 2\alpha} + \frac{4}{3} \frac{1}{\sin 2\alpha} \right)^2 + 1 \right] z^2 \\ &= \frac{90 - 54 \cos 2\alpha}{9 \sin^2 2\alpha} z^2 = \frac{10 - 6 \cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} z^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Aus Gleichung (26) erhalten wir zusammen mit den Funktionen (19a) und (19b)

$$z = \frac{\sqrt{3}l \sin 2\alpha}{\sqrt{10 - 6 \cos 2\alpha}} = \frac{l}{\sqrt{3}} \cdot \sin 2s \quad (27a)$$

und schliesslich mit den Gleichungen (19a), (19b), (24), (25) und (27a)

$$\begin{aligned} R_V &= \frac{l}{2\sqrt{3}} \cdot \left(\cos 2s + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{17 + \cos 4s} \right) \\ &= \frac{l}{2\sqrt{3}} \cdot \left(\cos 2s + \sqrt{9 - \sin^2 2s} \right), \end{aligned} \quad (27b)$$

$$\begin{aligned} R_U &= \frac{l}{2\sqrt{3}} \cdot \left(-\cos 2s + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{17 + \cos 4s} \right) \\ &= \frac{l}{2\sqrt{3}} \cdot \left(-\cos 2s + \sqrt{9 - \sin^2 2s} \right). \end{aligned} \quad (27c)$$

Symmetrieparametrisierung

Was bedeutet die algebraisch bestimmte Symmetrieparametrisierung geometrisch? Man sieht leicht, dass sich die Bewegung des Mittelpunktes M_1 aus einer gleichförmigen Kreisbewegung und einer Translationsbewegung

zusammensetzt, wenn die Ausdrücke (27) in die Gleichung (1a) mit $k = 1$ eingesetzt werden,

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{l}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{9 - \sin^2 2s} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{l}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2s \\ \sin 2s \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Das Argument der Kreisbewegung ist $2s$. Wir ersetzen daher im Folgenden den Parameter s durch

$$t := 2s. \quad (29)$$

Der Radius des Kreises beträgt $l/(2\sqrt{3}) = l/\sqrt{12}$. Zu der gleichförmigen Kreisbewegung kommt eine hin- und herschwingende Translationsbewegung ihres Mittelpunktes hinzu.

Eine entsprechende Betrachtung gilt für die Bewegung des gegenüberliegenden Mittelpunktes M_4 , wenn die Ausdrücke (27) in die Gleichung (1b) mit $k = 4$ eingesetzt werden. Auch sie setzt sich aus einer gleichförmigen Kreisbewegung und einer hin- und herschwingenden Translationsbewegung zusammen,

$$\overrightarrow{OM_4} = \frac{l}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{9 - \sin^2(-t)} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{l}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Vergleicht man die Bewegungen der Mittelpunkte M_1 und M_4 miteinander, so zeigt sich erstens, dass die Mittelpunkte der beiden Kreisbewegungen in jedem Bewegungszustand vom Ursprung gleich weit entfernt liegen, und zweitens, dass sich der Drehsinn, nicht aber der Betrag der Drehgeschwindigkeit der beiden Kreisbewegungen unterscheidet.

Wegen der dreizähligen Symmetrie des Gelenkrings erhalten wir die Bewegungen der Gelenkachsenmittelpunkte M_3 , M_4 , M_5 und M_6 durch zweimalige 120° -Rotation von M_1 und M_4 um die Symmetrieachse σ . Die analytischen Ausdrücke ergeben sich aus den Gleichungen (1) und (27),

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_k} &= \frac{l}{2\sqrt{3}} \sqrt{9 - \sin^2 t} \begin{pmatrix} \cos(-150^\circ + k \cdot 60^\circ) \\ \sin(-150^\circ + k \cdot 60^\circ) \\ 0 \end{pmatrix} + \dots \\ &\dots + (-1)^k \frac{l}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \cos t \cdot \cos(-150^\circ + k \cdot 60^\circ) \\ \cos t \cdot \sin(-150^\circ + k \cdot 60^\circ) \\ -\sin t \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Alle sechs Gelenkachsenmittelpunkte M_k führen gleichförmige und gleichschnelle Kreisbewegungen aus, während gleichzeitig die Mittelpunkte K_k dieser sechs Kreise in Richtung Ursprung hin- und herschwingen und zwar so, dass zu jedem Zeitpunkt der Abstand zum Ursprung gleich gross ist,

$$|\overrightarrow{OK_k}| = \frac{l}{2\sqrt{3}}\sqrt{9 - \sin^2 t} \quad \text{für alle } k = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \quad (32)$$

Die Kreisbewegungen für $k = 1, 3, 5$ und $k = 2, 4, 6$ gehen durch Rotation um die Symmetrieachse σ gruppenweise ineinander über. Die Kreisbewegungen dieser beiden Gruppen unterscheiden sich durch eine Phasenverschiebung von π . So geht z.B. die Kreisbewegung von M_1 in diejenige von M_2 über, indem erstere bezüglich der eigenen Drehachse um π versetzt und mit 60° um die Symmetrieachse σ gedreht wird. Die Ortsvektoren für die Gelenkachsenmittelpunkte M_k können daher auch folgendermassen formuliert werden,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_k} = & \frac{l}{2\sqrt{3}}\sqrt{9 - \sin^2(t + k\pi)} \begin{pmatrix} \cos(-150^\circ + k \cdot 60^\circ) \\ \sin(-150^\circ + k \cdot 60^\circ) \\ 0 \end{pmatrix} + \dots \\ & \dots + \frac{l}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \cos(t + k\pi) \cdot \cos(-150^\circ + k \cdot 60^\circ) \\ \cos(t + k\pi) \cdot \sin(-150^\circ + k \cdot 60^\circ) \\ -\sin(t + k\pi) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Auch die Richtungsvektoren \mathbf{a}_k der Gelenkachsen lassen sich mit den Gleichungen (3), (22b) und (22d) in Abhängigkeit vom Symmetrieparameter $t = 2s$ kompakt ausdrücken,

$$\mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} -\cos \Gamma_k^t \cdot \sin([k-1] \cdot 60^\circ) \\ \cos \Gamma_k^t \cdot \cos([k-1] \cdot 60^\circ) \\ \sin \Gamma_k^t \end{pmatrix}, \quad (34)$$

$$\Gamma_k^t := \frac{1}{2} \left(t + [1 + (-1)^k] \frac{\pi}{2} + \arcsin \left[\frac{\sin(t + k\pi)}{3} \right] \right),$$

$$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Die Symmetrieparametrisierung des umstülpbaren Würfels ist nun vollständig gegeben. Die Gleichungen (33) beschreiben die Kinematik der sechs Gelenkachsenmittelpunkte M_k und die Gleichungen (34) die Kinematik der Richtungen \mathbf{a}_k der sechs Gelenkachsen.

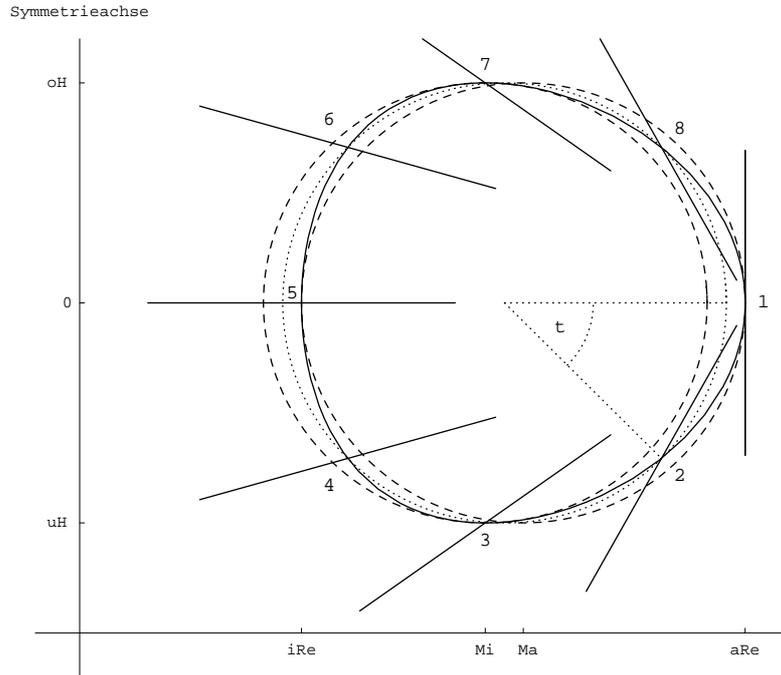


Abbildung 8: Die Bewegung des Gelenkachsenmittelpunktes M_4 (durchgezogenes Oval) wird aus einer gleichförmigen Rotation und einer schwingenden Translation erzeugt. Liegt M_4 in Position 1, so nimmt die Kreisbewegung die äusserste Lage ein (gestrichelter rechter Kreis), zu Position 3 gehört die innerste Lage der Kreisbewegung (gestrichelter linker Kreis), zu Position 5 wieder die äusserste und zu Position 7 wieder die innerste. Die Bezeichnungen M_i und M_a weisen auf die innerste bzw. äusserste Lage des Kreismittelpunkts K_4 hin (Gleichung (32)). Der gepunktet eingezeichnete Kreis gehört zur Position 2 von M_4 . Für diese Lage ist der Winkel t der Symmetrieparametrisierung eingezeichnet. Die Frequenzen von Rotation und Translation stehen im Verhältnis 1:2.

In Abbildung 8, die sich auf die rechte Hälfte von Abbildung 1 bezieht, ist die Symmetrieparametrisierung auch grafisch angedeutet.

Durch Berechnungen, die dem interessierten Leser bzw. der interessierten Leserin überlassen seien, können die geometrischen Eigenschaften des umstülpbaren Gelenkrings, welche auf Seite 26f aufgeführt wurden, bestätigt werden:

1. $\overline{M_k M_{k+1}} = l$ für alle k .
2. $\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_{k+1} = 0$ für alle k .
3. Die Ebenen $E_{1,4}: x = 0$, $E_{2,5}: x + \sqrt{3}y = 0$ und $E_{3,6}: x - \sqrt{3}y = 0$

enthalten alle die Symmetrie- bzw. z -Achse. Der Winkel zwischen jeweils zwei Ebenen ist 60° .

4. Die Gelenkachsen a_1 , a_3 und a_5 gehen durch den Punkt U , die Gelenkachsen a_2 , a_4 und a_6 durch den Punkt V .
5. Aus den Eigenschaften 3 und 4 und den Tatsachen, dass U und V nie zusammenfallen und die Gelenkachsenmittelpunkte nie auf die Symmetrieachse zu liegen kommen, folgt, dass jeweils aufeinanderfolgende Gelenkachsen immer windschief zueinander liegen.
6. Siehe Gleichung (33).

Erster Prototyp und Dank

In Zusammenarbeit mit den Firmen OLOID AG (Basel/Schweiz), WiN POLYTECH GmbH (Biel-Benken/Schweiz) und TuTech INNOVATION GmbH (Hamburg/Deutschland) wurde in den Werkstätten der Technischen Universität Hamburg-Harburg ein erster Prototyp gebaut, der die Symmetrieparametrisierung für den Antrieb des ganzen umstülpbaren Gelenkrings ($\psi = 90^\circ$) benutzt.

Für die Durchsicht des Manuskripts danke ich René Bartkowiak, Peter und Viola Gschwind und Robert Neumann.

Literatur

- [1] CONRADT, O.: *Variation der Diagonalen bei den umstülpbaren Modellen der Platonischen Körper. Berechnungen im ‘Turbula-Koordinatensystem’*. Nicht veröffentlicht, 2003.
- [2] CONRADT, O.: *Wie bewegt sich der Schwerpunkt des Mittelgliedes von Turbula-artigen Maschinen?* Nicht veröffentlicht, 2003.
- [3] CONRADT, O. und K. ERNHOFER: *Variation der Diagonalen bei den umstülpbaren Modellen der Platonischen Körper*. Mathematisch-Physikalische Korrespondenz, 211:13–24, 2002.
- [4] LÖSCHNER, M.: *Berechnung von Ovalradgetrieben für den Antrieb des Schatz-Mechanismus*. Nicht veröffentlicht.
- [5] SCHATZ, P.: *Rythmusforschung und Technik*. Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 2., erweiterte Auflage, 1998.