Die geometrische Algebra der ebenen Vektorgeometrie*

Oliver Conradt

Dieser Aufsatz richtet sich in erster Linie an Mathematiklehrerinnen und -lehrer der Oberstufe und an die Freunde der Vektorgeometrie. Im Zentrum steht die Idee, wie man in der ebenen Vektorgeometrie eine Multiplikation einführen kann, die die gewöhnliche skalare Multiplikation und das gewöhnliche Skalarprodukt als Teile enthält, und selbst so umfassend ist, dass sie auch noch den Weg zu einem weiteren Produkt, dem sogenannten äusseren Produkt, weist. Diese umfassende Multiplikation, das geometrische Produkt, erweitert den Grössenbereich der Vektorgeometrie, wo wir es mit reellen Zahlen (oder Skalaren) und Vektoren zu tun haben, um die Grösse der *Gegenzahl*. Von der ebenen Vektorgeometrie werden wir so zu der geometrischen Algebra geführt, die die Grössen der Zahl, des Vektors und der Gegenzahl zu *einem* Bereich zusammenschliesst. Die geometrische Algebra rechnet sowohl mit Zahlen, wie auch mit Vektoren und Gegenzahlen.

Ich habe mich bemüht, den geometrischen Gehalt der eingeführten algebraischen Begriffe in dieser Darstellung besonders herauszuarbeiten, und bin überzeugt, dass die vorgestellten Ideen dem Vektorgeometrieunterricht an der einen oder anderen Stelle neue Impulse verleihen können.

Das Konzept zum Aufbau dieses Aufsatzes stammt aus dem Abschnitt 2.2 des englischsprachigen Artikels *Clifford Algebras and Spinor Operators* von Pertti Lounesto [1].

Rechengesetze der Vektorgeometrie

Wir gehen von der Vektorgeometrie in der Ebene aus. Ein Vektor wird durch die Angaben der *Richtung*, der *Orientierung* innerhalb dieser Richtung und durch seine *Länge* vollständig bestimmt. Eine bestimmte Wahl des Anfangspunktes oder des Endpunktes ist im Konzept des freien Vektors nicht enthalten. Sobald aber einer dieser beiden Punkte festgelegt wird, ist auch der andere durch den Vektor bestimmt. Insbesondere sprechen wir von

*Erschienen in *Mathematisch-Physikalische Korrespondenz*, Nr. 204, S. 3-19, 2001.

einem *Ortsvektor*, wenn der Anfangspunkt des Vektors mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammenfällt, da seine Komponenten in diesem Fall gerade mit den Komponenten des Endpunktes übereinstimmen. Ein Vektor $\mathbf{r}$ kann als *Spalte*, welche die x- und y-Komponente enthält, oder als *Linearkombination* der beiden Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ aufgeschrieben werden,

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2.$$

Siehe auch Abbildung 1. Wir werden in diesem Abschnitt beide Schreibweisen parallel anführen, im Folgenden uns aber auf die Schreibweise der Linearkombination konzentrieren.

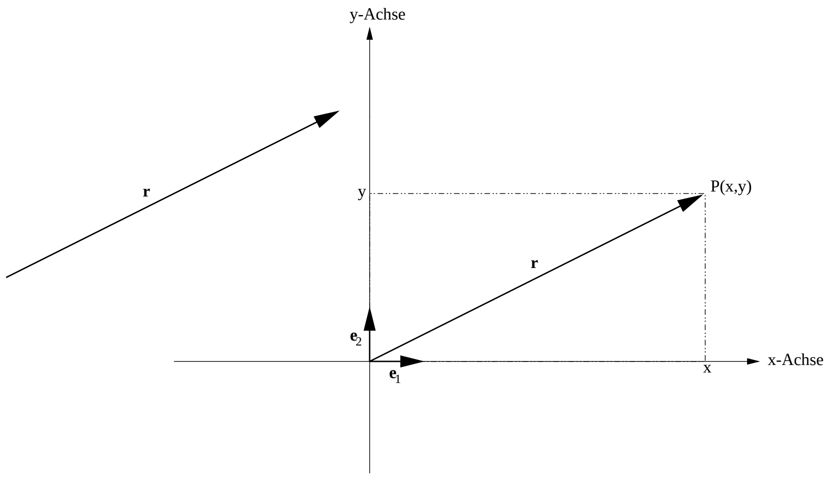

Abbildung 1: Vektor und Ortsvektor

Vektoren lassen sich *addieren*,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) + (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2) = (a_1 + b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{e}_2,\end{aligned}$$

und bilden bezüglich der Addition eine Abel'sche Gruppe, d. h. es gelten folgende Rechengesetze:

$$\text{Assoziativität} \qquad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}), \tag{1a}$$

$$\text{Nullelement} \qquad \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}, \tag{1b}$$

$$\text{inverses Element} \qquad \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}, \tag{1c}$$

$$\text{Kommutativität} \qquad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}. \tag{1d}$$

Die Rechengesetze für die Addition von Vektoren sind die gleichen wie diejenigen für die Addition von reellen Zahlen.

Die Multiplikation tritt in der Vektorgeometrie in mehreren Varianten auf. Es gibt die *skalare Multiplikation* mit einer beliebigen reellen Zahl λ,

$$\begin{aligned}\lambda\mathbf{r} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \\ &= \lambda(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = (\lambda x)\mathbf{e}_1 + (\lambda y)\mathbf{e}_2,\end{aligned}$$

die sich mit der Multiplikation der reellen Zahlen assoziativ verträgt, ein Einselement enthält und kommutativ ist,

$$\text{Assoziativität} \qquad (\lambda\mu)\mathbf{r} = \lambda(\mu\mathbf{r}), \tag{2a}$$
$$\text{Einselement} \qquad 1\mathbf{r} = \mathbf{r}, \tag{2b}$$
$$\text{Kommutativität} \qquad \lambda\mathbf{r} = \mathbf{r}\lambda. \tag{2c}$$

Das Einselement der skalaren Multiplikation ist zugleich auch das Einselement der reellen Multiplikation. Zur Addition verhält sich die skalare Multiplikation gemäss dem Gesetz der Distributivität,

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, \tag{3a}$$
$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}. \tag{3b}$$

Weiter gibt es das *Skalarprodukt*, welches zwei Vektoren miteinander zu der reellen Zahl

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

verknüpft. In der Basis-Schreibweise sieht die gleiche Rechnung so aus,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) \cdot (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2) \\ &= (a_1 b_1)\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + (a_1 b_2)\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + (a_2 b_1)\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 + (a_2 b_2)\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2,\end{aligned}$$

wobei die Skalarprodukte zwischen den Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1, \qquad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0,$$

benutzt wurden. Als Besonderheit enthält dieses Produkt die sogenannte *Quadratregel*, d. h., wenn ein beliebiger Vektor $\mathbf{a}$ mit sich selber skalar multipliziert wird, so kommt gerade das Quadrat seiner Länge heraus,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2.$$

Das Skalarprodukt ist kommutativ und steht bezüglich der Addition von Vektoren in dem Verhältnis der Distributivität,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a},$$
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}.$$

Weitere Rechengesetze wie die Assoziativität, die Existenz eines Einselementes oder die Existenz eines eindeutig bestimmten Inversen fehlen beim Skalarprodukt. Zusammenfassend können wir feststellen, dass der Begriff der Multiplikation, so wie er in der ebenen Vektorgeometrie gewöhnlicherweise auftaucht, einerseits in zwei verschiedene Arten der Multiplikation zerfällt (skalare Multiplikation, Skalarprodukt) und andererseits das Skalarprodukt nur noch wenige der Rechengesetze zeigt, welche wir von der Multiplikation der reellen Zahlen her kennen. Es scheint, wie wenn sich in der skalaren Multiplikation und dem Skalarprodukt nur noch die Fragmente einer umfassenderen Multiplikation zeigten und das einheitliche Prinzip noch gar nicht vor unseren Augen stehen würde.

Im Folgenden soll eine alles umfassende Multiplikation, das geometrische Produkt, entwickelt werden. Das Skalarprodukt und die skalare Multiplikation fügen sich in dieses einheitliche Ganze wie Teile ein.

Geometrisches Produkt

Wir führen in der Ebene ein neues *geometrisches Produkt*[1] ein, das die folgenden Rechengesetze erfüllen soll:

Assoziativität
$$(\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{bc}), \tag{4a}$$

Distributivität
$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) &= \mathbf{ab} + \mathbf{ac} \\ (\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} &= \mathbf{ac} + \mathbf{bc} \end{aligned} \right\}, \tag{4b}$$

Einselement
$$\mathbf{1a} = \mathbf{a1} = \mathbf{a}, \tag{4c}$$

Kommutativität des skalaren Anteils der Multiplikation
$$\lambda\mathbf{a} = \mathbf{a}\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4d}$$

Weiter fordern wir die Regel, dass jeder Vektor $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ mit der Länge $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ bei der Multiplikation bezüglich des geometrischen

[1] Das geometrische Produkt wird in der Fachliteratur auch oft als *Clifford Produkt* bezeichnet.

Produktes mit sich selbst gerade das Quadrat der eigenen Länge ergibt[2],

$$\text{Quadratregel} \qquad \mathbf{r}^2 = |\mathbf{r}|^2. \tag{4e}$$

Mit diesen fünf Regeln lässt sich das geometrische Produkt genauer studieren. Aus der Quadratregel folgt zunächst,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^2 &= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)^2 \\
&= x^2\mathbf{e}_1^2 + y^2\mathbf{e}_2^2 + xy(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) \\
&\stackrel{!}{=} x^2 + y^2 \\
&= |\mathbf{r}|^2,
\end{aligned}$$

dass die Quadrate der Basisvektoren (bezüglich des geometrischen Produktes) Eins ergeben und die geometrischen Produkte $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$ sich durch Addition aufheben müssen,

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{1}, \tag{5}$$

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1. \tag{6}$$

Was bedeutet das Produkt $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$? Ist es eine reelle Zahl oder ein Vektor? Jede reelle Zahl quadriert zu einer positiven reellen Zahl oder zu Null; und gemäss der Quadratregel (4e) quadriert auch jeder Vektor (bezüglich des geometrischen Produktes) zu einer reellen Zahl grösser oder gleich Null. Zu welcher Zahl quadriert $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$? Mit der Assoziativität (4a), dem Einselementes (4c), und den Gleichungen (5) und (6) haben wir alle Mittel in der Hand, um diese Frage zu beantworten.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 &= (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \\
&= (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) \\
&= -\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1 \\
&= -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 \\
&= -\mathbf{1}
\end{aligned}$$

Das Produkt $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ ist weder eine reelle Zahl noch ein Vektor, da es zu $-\mathbf{1}$ quadriert. Es erweist sich als eine *neue* Grösse; wir bezeichnen sie mit

$$\mathbf{I} := \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2.$$

[2] Die Quadratregel kann allgemeiner gefasst werden, indem nur gefordert wird, dass $\mathbf{r}^2$ ein Skalar sei. Neben der euklidischen Version (4e) umfasst diese allgemeinere Definition noch weitere nicht-euklidische Massbestimmungen.

$\mathbf{I}$ kann mit einem beliebigen Vektor multipliziert werden,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}' &= \mathbf{r}\mathbf{I} & \mathbf{r}'' &= \mathbf{I}\mathbf{r} \\
&= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)\mathbf{I} & &= \mathbf{I}(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) \\
&= x\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + y\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 & &= x\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 \\
&= x\mathbf{e}_2 - y\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 & &= -x\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_1 \\
&= x\mathbf{e}_2 - y\mathbf{e}_1, & &= -x\mathbf{e}_2 + y\mathbf{e}_1,
\end{aligned}$$

wobei sich zeigt, dass die Multiplikationen von links und von rechts sich um das Vorzeichen unterscheiden,

$$\mathbf{r}\mathbf{I} = -\mathbf{I}\mathbf{r}.$$

$\mathbf{r}'$ und $\mathbf{r}''$ haben die gleiche Länge und liegen in der gleichen Richtung (d.h. parallel zur gleichen Geraden) mit entgegengesetzter Orientierung. Beide stehen senkrecht zu $\mathbf{r}$; $\mathbf{r}'$ im mathematisch positiven Sinn und $\mathbf{r}''$ im mathematisch negativen Sinn. Als Merksatz können wir formulieren:

> Die geometrische Multiplikation eines Vektors $\mathbf{r}$ mit der Zahl $\mathbf{I}$ dreht den Vektor $\mathbf{r}$ um 90°; die rechtsseitige Multiplikation mit $\mathbf{I}$ im mathematisch positiven Sinn und die linksseitige Multiplikation mit $\mathbf{I}$ im mathematisch negativen Sinn.

So wie das Einselement mit einer beliebigen reellen Zahl multipliziert werden kann,

$$\lambda\mathbf{1} = \mathbf{1}\lambda = \lambda,$$

so kann auch $\mathbf{I}$ mit einer beliebigen reellen Zahl multipliziert werden,

$$\lambda\mathbf{I} = \mathbf{I}\lambda.$$

Beide Zahlenarten, die Zahl $\lambda\mathbf{1}$ und die *Gegenzahl*[3] $\lambda\mathbf{I}$ — so soll diese letztere Zahlenart zur Unterscheidung von der ersteren genannt werden —, weisen eine lineare Ordung auf, d. h., wenn zwei Zahlen $\lambda\mathbf{1}$ und $\mu\mathbf{1}$ oder zwei Gegenzahlen $\lambda\mathbf{I}$ und $\mu\mathbf{I}$ gegeben sind, so gilt genau eine der drei Relationen

$$\lambda\mathbf{1} < \mu\mathbf{1}, \qquad \lambda\mathbf{1} = \mu\mathbf{1}, \qquad \lambda\mathbf{1} > \mu\mathbf{1}$$

beziehungsweise

$$\lambda\mathbf{I} < \mu\mathbf{I}, \qquad \lambda\mathbf{I} = \mu\mathbf{I}, \qquad \lambda\mathbf{I} > \mu\mathbf{I}.$$

[3]In der Fachliteratur spricht man meistens von einem *Pseudoskalar*.

Der gegensätzliche Charakter der beiden Zahlenarten zeigt sich hier auch in den Quadraten. Eine beliebige Zahl quadriert zu einer Zahl, welche grösser oder gleich Null ist, und eine beliebige Gegenzahl quadriert zu einer Zahl, die kleiner oder gleich Null ist,

$$(\lambda\mathbf{1})^2 = \lambda^2\mathbf{1}^2 = \lambda^2 \geq 0, \qquad (\lambda\mathbf{I})^2 = \lambda^2\mathbf{I}^2 = -\lambda^2 \leq 0.$$

Wir haben nun alles beisammen, um den gesamten Bereich zu überblicken, auf welchen sich die ersten vier Rechengesetze des geometrischen Produktes beziehen. Von einem allgemeinen Vektor $\mathbf{r}$ sind sowohl die Zahl $\lambda\mathbf{1}$ wie auch die Gegenzahl $\mu\mathbf{I}$ zu unterscheiden; trotzdem lassen sich alle drei Grössen miteinander geometrisch multiplizieren. Es ist deshalb möglich, die drei Elemente zu *einer* Grösse, dem soganannten *Multivektor*, additiv zusammenzufassen.

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \lambda\mathbf{1} + \mathbf{r} + \mu\mathbf{I}\\ &= \lambda\mathbf{1} + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + \mu\mathbf{I}\end{aligned}$$

Ein allgemeiner Multivektor ist im Falle der ebenen Vektorgeometrie eine Linearkombination zu den vier Basiselementen $\mathbf{1}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{I}$. Damit gliedert sich jeder Multivektor in die drei Grössen Zahl, Vektor und Gegenzahl; die zugehörige Schreibweise ist die folgende:

$$\begin{array}{ll}\text{(reelle) Zahl} & \langle\mathbf{a}\rangle_0 = \lambda\mathbf{1},\\ \text{(reeller) Vektor} & \langle\mathbf{a}\rangle_1 = \mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2,\\ \text{(reelle) Gegenzahl} & \langle\mathbf{a}\rangle_2 = \mu\mathbf{I}\end{array}$$

oder

$$\mathbf{a} = \langle\mathbf{a}\rangle_0 + \langle\mathbf{a}\rangle_1 + \langle\mathbf{a}\rangle_2.$$

Die Rechengesetze (4a)–(4d) beziehen sich auf beliebige Multivektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$; sie gelten also nicht nur für Vektoren. Die Quadratregel (4e) hingegen beschränkt sich auf beliebige Vektoren $\mathbf{r}$. Würde man sie auf die reellen Zahlen anwenden, so stellte sie keine neue Forderung dar; und mit den Gegenzahlen steht sie im Widerspruch.

Beispiele: Multipliziere die Multivektoren $\mathbf{a} = 3 + 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 10\mathbf{I}$ und $\mathbf{b} = -11 + 5\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 + \mathbf{I}$ mit dem geometrischen Produkt.

$$\begin{aligned}\mathbf{ab} =&(3 + 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 10\mathbf{I})(-11 + 5\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 + \mathbf{I})\\ =&(-33 + 10 - 6 + 10) + (15 - 22 + 1 - 60)\mathbf{e}_1 +\\ &+ (18 + 2 + 11 + 50)\mathbf{e}_2 + (3 + 12 + 5 + 110)\mathbf{I}\\ =&- 19 - 66\mathbf{e}_1 + 81\mathbf{e}_2 + 130\mathbf{I}\end{aligned}$$

Gegeben: $\mathbf{a} = \mathbf{1} + \mathbf{e}_1$, $\mathbf{b} = -\mathbf{1} + \mathbf{e}_1$. Berechne $\mathbf{ab}$.

$$\mathbf{ab} = (\mathbf{1} + \mathbf{e}_1)(-\mathbf{1} + \mathbf{e}_1) = -\mathbf{1} + \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 + \mathbf{1} = 0$$

Das geometrische Produkt zweier Zahlen, welche beide ungleich Null sind, kann also verschwinden!

Übung 1: Vervollständige die Multiplikationstafel für die Basiselemente der geometrischen Algebra.

	$\mathbf{1}$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{I}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{I}$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$			
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$			
$\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$			$-\mathbf{1}$

Übung 2: Gegeben: $\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{e}_1)$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{I}$. Berechne $\mathbf{a}^2$ und $\mathbf{b}^2$.

Die Menge aller Multivektoren bildet einen Vektorraum[4] und zusammen mit dem nicht-kommutativen geometrischen Produkt eine Algebra[5]. Sie wird *geometrische Algebra* (oder auch Clifford Algebra) $\mathcal{G}_2$ genannt. Der Index 2 steht für unseren Ausgangspunkt: die zweidimensionale Ebene der Vektorgeometrie. Die geometrische Algebra $\mathcal{G}_2$ selber ist aber eine $2^2 = 4$-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Wie steht es mit der Division?

Es kann die Frage auftauchen, ob die geometrische Multiplikation umkehrbar sei. Gibt es zu jedem Multivektor $\mathbf{a}$ ein ein- bzw. beidseitiges inverses Element $\mathbf{a}^{-1}$, sodass $\mathbf{a}(\mathbf{a}^{-1}) = \mathbf{1}$ oder $(\mathbf{a}^{-1})\mathbf{a} = \mathbf{1}$ bzw. $\mathbf{a}(\mathbf{a}^{-1}) = (\mathbf{a}^{-1})\mathbf{a} = \mathbf{1}$

[4] Es handelt sich bei der Menge aller Multivektoren um einen *reellen Vektorraum*, d.h., per definitionem gilt:

(i) Die Menge aller Multivektoren bildet bezüglich der Addition eine Abel'sche Gruppe. (Vgl. auch die Gleichungen (1).)

(ii) Die skalare Multiplikation ist assoziativ mit der Multiplikation reeller Zahlen und enthält die reelle Zahl 1 als Einselement. (Vgl. mit den Gleichungen (2).)

(iii) Es gelten die zwei Distributivgesetze der Gleichungen (3).

Im Unterschied zu den Gleichugen (1)–(3) beziehen sich die Forderungen (i)–(iii) auf die Menge aller Multivektoren und nicht bloss auf die Menge aller Vektoren.

[5] Die Menge aller Multivektoren bildet eine Algebra, da sie bezüglich der Addition eine Abel'sche Gruppe darstellt und mit der geometrischen Multiplikation ein assoziatives Produkt mit Einselement besitzt. Zusätzlich gelten die Distributivgesetze.

gilt? Von den fünf Rechenregeln (4a)–(4e) wird die Existenz eines solchen Elementes nicht gefordert. Es ist nur verlangt, dass die geometrische Multiplikation ein Einselement besitze. Zu jeder Zahl, zu jeder Gegenzahl und zu jedem Vektor (jeweils ungleich Null) gehört ein eindeutig bestimmtes, beidseitiges inverses Element.

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{a} = \lambda\mathbf{1} & \mathbf{a}^{-1} = \dfrac{\mathbf{1}}{\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R} & \mathbf{a}(\mathbf{a}^{-1}) = (\mathbf{a}^{-1})\mathbf{a} = \mathbf{1} \\
\mathbf{a} = \lambda\mathbf{I} & \mathbf{a}^{-1} = -\dfrac{\mathbf{I}}{\lambda} = \dfrac{\mathbf{1}}{\lambda\mathbf{I}}, \quad \lambda \in \mathbb{R} & \mathbf{a}(\mathbf{a}^{-1}) = (\mathbf{a}^{-1})\mathbf{a} = \mathbf{1} \\
\mathbf{r} = \langle\mathbf{r}\rangle_1 & \mathbf{r}^{-1} = \dfrac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}^2} = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}} & \mathbf{r}(\mathbf{r}^{-1}) = (\mathbf{r}^{-1})\mathbf{r} = \mathbf{1}
\end{array}
$$

Geometrisch gesehen handelt es sich beim Übergang von dem Vektor $\mathbf{r}$ zu seinem multiplikativen Inversen $\mathbf{r}^{-1}$ um die Spiegelung am Einheitskreis. Siehe Abbildung 2. Durch reine Zahlen, durch reine Gegenzahlen und durch

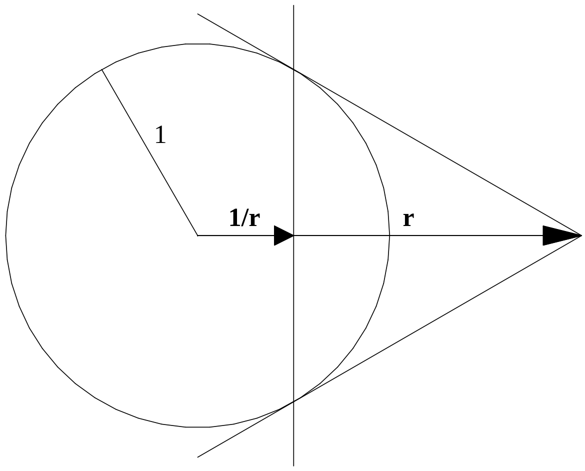

Abbildung 2: Vektor $\mathbf{r}$ und sein multiplikativ inverser Vektor $\mathbf{r}^{-1}$ gehen durch Spiegelung am Einheitskreis auseinander hervor.

reine Vektoren lässt sich also dividieren, indem man mit dem multiplikativ inversen Element multipliziert. Wie steht es mit einem allgemeinen Multivektor? Die folgenden Beispiele zeigen, dass es im Bereich der Multivektoren im Allgemeinen kein multiplikativ inverses Element gibt.

Beispiele: Gegeben seien die Multivektoren $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2 - \mathbf{I}$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ und

$\mathbf{c} = \mathbf{1} + \mathbf{e}_2$. Berechne die Produkte $\mathbf{ab}$ und $\mathbf{ac}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{ab} &= (\mathbf{e}_2 - \mathbf{I})(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \mathbf{1} - \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{I} \\ \mathbf{ac} &= (\mathbf{e}_2 - \mathbf{I})(\mathbf{1} + \mathbf{e}_2) = \mathbf{1} - \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{I}\end{aligned}$$

Die beiden Produkte sind gleich: $\mathbf{ab} = \mathbf{ac}$, obwohl $\mathbf{b} \neq \mathbf{c}$ ist. Zu dem Multivektor $\mathbf{a}$ gibt es offensichtlich kein linksseitiges multiplikativ inverses Element.

Gegeben seien die Multivektoren $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{I}$ und $\mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{e}_1)$. Berechne das Produkt $\mathbf{ba}$.

$$\mathbf{ba} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_2 + \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2 + \mathbf{I} + \mathbf{I} + \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{I} = \mathbf{a}$$

Hier gibt es zum Multivektor $\mathbf{a}$ kein rechtsseitges inverses Element, da $\mathbf{b} \neq \mathbf{1}$ ist.

Inneres und äusseres Produkt

Das geometrische Produkt zweier beliebiger Vektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{s}$ resultiert in einer Summe von Zahl und Gegenzahl,

$$\begin{aligned}\mathbf{rs} &= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)(u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2) \\ &= (xu + yv)\mathbf{1} + (xv - yu)\mathbf{I}.\end{aligned}$$

Es kann deshalb in ein *inneres Produkt*

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} := \langle \mathbf{rs} \rangle_0 = (xu + yv)\mathbf{1}$$

und ein *äusseres Produkt*

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{s} := \langle \mathbf{rs} \rangle_2 = (xv - yu)\mathbf{I}$$

additiv zerlegt werden,

$$\mathbf{rs} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{s}.$$

Das innere Produkt besteht aus dem symmetrischen Anteil der geometrischen Multiplikation, besitzt vertauschbare Faktoren und resultiert in einer reellen Zahl,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{rs} + \mathbf{sr}).$$

Das äussere Produkt besteht aus dem antisymmetrischen Anteil der geometrischen Multiplikation, wechselt das Vorzeichen beim Vertauschen der Faktoren und resultiert in einer reellen Gegenzahl,

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{s} = -\mathbf{s} \wedge \mathbf{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{rs} - \mathbf{sr}).$$

Das innere Produkt zwischen zwei Vektoren stimmt mit dem gewöhnlichen Skalarprodukt der ebenen Vektorgeometrie bis in jedes Detail überein. Wir sehen hier also, wie sich letzteres in das umfassendere geometrische Produkt

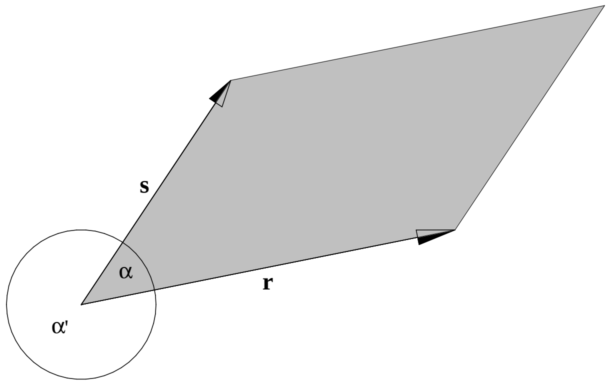

Abbildung 3: Illustration zum äusseren Produkt

einfügt. Die geometrische Interpretation des inneren Produktes ist wie beim gewöhnlichen Skalarprodukt durch das Produkt der Längen der Vektoren **r** und **s** multipliziert mit dem Cosinus ihres Zwischenwinkels α gegeben,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = (|\mathbf{r}||\mathbf{s}| \cos\alpha)\, \mathbf{1}. \tag{7}$$

Das äussere Produkt misst in der ebenen Vektorgeometrie den orientierten Flächeninhalt des von den Vektoren **r** und **s** aufgespannten Parallelogrammes. Siehe Abbildung 3.

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{s} = (|\mathbf{r}||\mathbf{s}| \sin\alpha)\, \mathbf{I} \qquad \mathbf{s} \wedge \mathbf{r} = \left(|\mathbf{r}||\mathbf{s}| \sin\alpha'\right) \mathbf{I} \tag{8}$$

Geometrisch gesehen wird die Fläche durch die Reihenfolge der Seiten **r** und **s** orientiert. Zu der Reihenfolge $\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}$ gehört der Zwischenwinkel α, welcher entsteht, indem **r** im mathematisch positiven Sinn und abgesehen von der eigenen Länge in die Lage von **s** gedreht wird. Zu der entgegengesetzten Reihenfolge $\mathbf{s} \wedge \mathbf{r}$ gehört der Zwischenwinkel α', welcher entsteht, indem **s** im mathematisch positiven Sinn in die Lage von **r** gedreht wird. In beiden Fällen wird der erste Vektor in mathematisch positiver Drehrichtung in die Lage des zweiten Vektors gedreht, um den zu der entsprechenden Reihenfolge gehörigen Zwischenwinkel zu bestimmen. Die beiden Winkel α und α' ergänzen sich zu 360°.

Übung 3: Beweise (mit Hilfe des Satzes von Gnomon), dass das äussere

Produkt zweier Vektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{s}$ gerade den Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogrammes ergibt.

Mit dem inneren und dem äusseren Produkt lässt sich leicht feststellen, ob zwei Vektoren parallel oder senkrecht zueinander stehen.

> Zwei Vektoren verlaufen *parallel*, wenn ihr äusseres Produkt verschwindet:
> $$\mathbf{r} \| \mathbf{s} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{r} \wedge \mathbf{s} = 0.$$

Der Beweis ergibt sich aus den Gleichungen (8). Wenn die Vektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{s}$ parallel sind, fällt das geometrische Produkt mit dem inneren Produkt zusammen: $\mathbf{rs} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}$.

> Zwei Vektoren stehen *senkrecht* zueinander, wenn ihr inneres Produkt verschwindet:
> $$\mathbf{r} \perp \mathbf{s} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = 0.$$

Der Beweis ergibt sich aus der Formel (7). Wenn die Vektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{s}$ senkrecht aufeinander stehen, fällt das geometrische Produkt mit dem äusseren Produkt zusammen: $\mathbf{rs} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{s}$.

Anwendungen

a) Zerlegung eines Vektors in zwei gegebene Richtungen

Gegeben seien zwei nicht-parallele Richtungen durch die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ($\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \neq 0$) und ein beliebiger Vektor $\mathbf{r}$. Gesucht ist die Zerlegung von

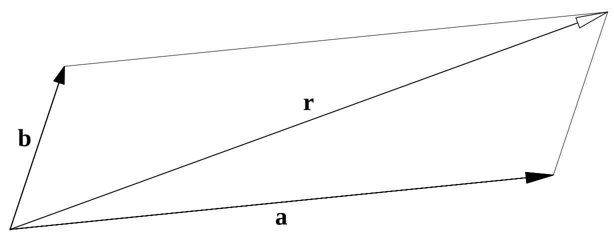

Abbildung 4: Zerlegung von $\mathbf{r}$ in die Richtungen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.

$\mathbf{r}$ in die Richtungen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$. Siehe Abbildung 4. — Wir gehen von der Linearkombination

$$\mathbf{r} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$$

aus und wollen die Koeffizienten α und β bestimmen. Die äussere Multiplikation der Linearkombination von rechts mit dem Vektor $\mathbf{b}$ bzw. $\mathbf{a}$ ergibt

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{r} \wedge \mathbf{a} = \beta(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}).$$

Durch Dividieren mit der Gegenzahl $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ bzw. $(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a})$ erhalten wir die Koeffizienten

$$\alpha = \frac{\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}} \qquad \text{bzw.} \qquad \beta = \frac{\mathbf{r} \wedge \mathbf{a}}{\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}}.$$

Einsetzen in die Linearkombination führt zu der Lösung

$$\mathbf{r} = \frac{(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b})\mathbf{a}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}} + \frac{(\mathbf{r} \wedge \mathbf{a})\mathbf{b}}{\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}} = \frac{(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{r} \wedge \mathbf{a})\mathbf{b}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}.$$

Beispiel: Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{r} = 5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Berechne die Koeffizienten α und β in der Zerlegung $\mathbf{r} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$.

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}} = \frac{(5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \wedge (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)}{(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) \wedge (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)} \\
&= \frac{5\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2} \\
&= \frac{5\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1} = \frac{5\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1} \\
&= \frac{5\mathbf{I} - (-\mathbf{I})}{\mathbf{I} - 2(-\mathbf{I})} = \frac{6\mathbf{I}}{3\mathbf{I}} = 2
\end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich β zu

$$\beta = \frac{\mathbf{r} \wedge \mathbf{a}}{\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}} = 3,$$

und die Lösung ist: $\mathbf{r} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$.

b) Zerlegung in rechtwinklige Komponenten

Ein Vektor $\mathbf{a}$ soll bezüglich eines Vektors $\mathbf{b}$ in die parallel und senkrecht verlaufenden Komponenten $\mathbf{a}_{\|}$ und $\mathbf{a}_{\perp}$ zerlegt werden. Der Zwischenwinkel von $\mathbf{b}$ und $\mathbf{a}$ in dieser Reihenfolge sei ψ ($0° \leq \psi < 180°$). Siehe Abbildung 5. — Die parallele Komponente ergibt sich, wenn wir den Einheitsvektor in Richtung und Orientierung von $\mathbf{b}$ um die rechtwinklige Projektion des Vektors $\mathbf{a}$ auf $\mathbf{b}$ strecken,

$$\mathbf{a}_{\|} = |\mathbf{a}| \cos\psi \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\psi \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}^{-1}.$$

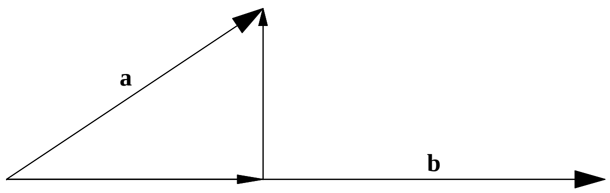

Abbildung 5: Rechtwinklige Zerlegung von $\mathbf{a}$ in Richtungen $\mathbf{b}$.

Die senkrechte Komponente ergibt sich, wenn wir den zu $\mathbf{b}$ im mathematisch positiven Sinn um 90° gedrehten Einheitsvektor $\mathbf{bI}/|\mathbf{bI}|$ mit der Projektion des Vektors $\mathbf{a}$ auf $\mathbf{bI}$ strecken,

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_\perp &= |\mathbf{a}|\sin\psi\frac{\mathbf{bI}}{|\mathbf{bI}|} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\psi\frac{\mathbf{bI}}{|\mathbf{b}|^2} = -(|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\psi\,\mathbf{I})\mathbf{b}^{-1}\\ &= -(\mathbf{b}\wedge\mathbf{a})\mathbf{b}^{-1} = (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\mathbf{b}^{-1}.\end{aligned}$$

Als Probe berechnen wir die Summe der parallelen und senkrechten Komponente und erhalten den Vektor $\mathbf{a}$ selbst,

$$\mathbf{a}_\| + \mathbf{a}_\perp = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{b}^{-1} + (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\mathbf{b}^{-1} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\mathbf{b}^{-1} = \mathbf{abb}^{-1} = \mathbf{a}.$$

Beispiel: Gegeben sind die Vektoren: $\mathbf{a} = 8\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. Berechne $\mathbf{a}_\|$ und $\mathbf{a}_\perp$.

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_\| &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} = [(8\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)\cdot(2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)]\frac{(2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)}{(2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)(2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)}\\ &= [16-1]\frac{(2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)}{(4+1)} = 6\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_\perp &= (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\mathbf{b}^{-1} = [(8\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)\wedge(2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)]\frac{(2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)}{5}\\ &= [8\mathbf{I}+2\mathbf{I}]\frac{(2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)}{5} = 2(-2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2\end{aligned}$$

c) Spiegelung an der Richtung a

Es soll ein beliebiger Vektor $\mathbf{r}$ an der Richtung $\mathbf{a}$ gespiegelt werden. Siehe Abbildung 6. Der resultierende Vektor ist

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= \mathbf{r}_\| - \mathbf{r}_\perp = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}^{-1} - (\mathbf{r}\wedge\mathbf{a})\mathbf{a}^{-1}\\ &= (\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{r}\wedge\mathbf{a})\mathbf{a}^{-1} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}+\mathbf{a}\wedge\mathbf{r})\mathbf{a}^{-1}\\ &= \mathbf{ar}(\mathbf{a}^{-1}).\end{aligned}$$

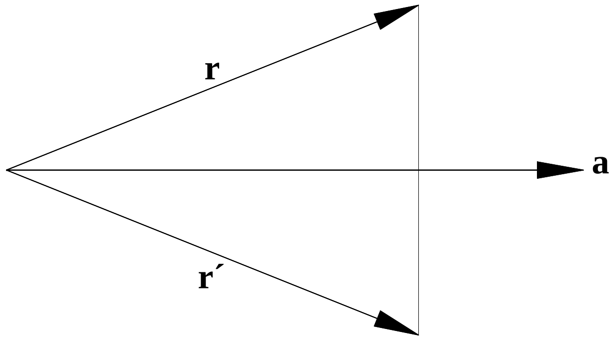

Abbildung 6: Der Vektor $\mathbf{r}$ wird am am Vektor $\mathbf{a}$ gespiegelt.

Wenn $\mathbf{r}'$ anschliessend noch an einer weiteren Richtung gespiegelt werden soll, so kann man die gleiche Gesetzmässigkeit einfach ein weiteres Mal anwenden,

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{b}\mathbf{r}'(\mathbf{b}^{-1}) = \mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{r}(\mathbf{a}^{-1})(\mathbf{b}^{-1}) = (\mathbf{b}\mathbf{a})\mathbf{r}(\mathbf{b}\mathbf{a})^{-1},$$

und so weiter. Im letzten Schritt haben wir die Identität $(\mathbf{a}^{-1})(\mathbf{b}^{-1}) = (\mathbf{b}\mathbf{a})^{-1}$ benutzt. Sie ist leicht einzusehen, da dass multiplikativ inverse Element zu dem Produkt $\mathbf{ba}$ gerade das Produkt $(\mathbf{a}^{-1})(\mathbf{b}^{-1})$ ist:

$$(\mathbf{a}^{-1})(\mathbf{b}^{-1})\mathbf{b}\mathbf{a} = \mathbf{b}\mathbf{a}(\mathbf{a}^{-1})(\mathbf{b}^{-1}) = \mathbf{1}.$$

Beispiel: Gegeben: $\mathbf{r} = 4\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{a} = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. Spiegele $\mathbf{r}$ erst an der Richtung $\mathbf{a}$ und den resultierenden Vektor weiter an $\mathbf{b}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= (3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)(4\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2)\frac{(3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{(3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)^2} = (12 + 3 - 9\mathbf{I} + 4\mathbf{I})\frac{(3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{(9+1)} \\ &= \frac{(15 - 5\mathbf{I})(3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{10} = \frac{45\mathbf{e}_1 - 15\mathbf{e}_2 + 15\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_1}{10} = 5\mathbf{e}_1\end{aligned}$$

$$\mathbf{r}'' = (2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)5\mathbf{e}_1\frac{(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)}{(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)^2} = (2 - \mathbf{I})(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$$

Lösungen zu den Übungen

1) Multiplikationstafel für das geometrische Produkt:

	$\mathbf{1}$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{I}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{I}$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{I}$	$\mathbf{1}$	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{1}$

2) Der Multivektor $\mathbf{a}$ quadriert zu sich selber (idempotentes Element) und der Multivektor $\mathbf{b}$ zu Null (Null-Multivektor).

$$\mathbf{a}^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{1}+\mathbf{e}_1)(\mathbf{1}+\mathbf{e}_1) = \frac{1}{4}(\mathbf{1}+2\mathbf{e}_1+\mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{1}+\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}$$
$$\mathbf{b}^2 = (\mathbf{e}_1+\mathbf{I})(\mathbf{e}_1+\mathbf{I}) = (\mathbf{1}+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_2-\mathbf{1}) = 0$$

3) Das äussere Produkt zwischen den Vektoren $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{s} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2$ ist

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{s} = (xv - yu)\mathbf{I},$$

d. h., es handelt sich um die Differenz der Flächeninhalte des Rechteckes xv und des Rechteckes yu. Der Satz des Gnomon besagt, dass die schwarzen Rechtecke in der Abbildung 7 jeweils gleich gross sind. Die Differenz $|xv - yu|$ ist also gerade so gross wie das graue Rechteck rechts unten in der Abbildung 7. Andererseits kann das ursprüngliche Parallelogramm auch in dieses Rechteck verwandelt werden.

Literatur

[1] P. Lounesto. Clifford Algebras and Spinor Operators. In William E. Baylis, editor, *Clifford (Geometric) Algebras*, pages 5–35. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1996.

Dank

Für die Durchsicht des Manuskriptes und Anregungen möchte ich den Herren Peter Gschwind, Arnold Bernhard und Bertfried Fauser danken.

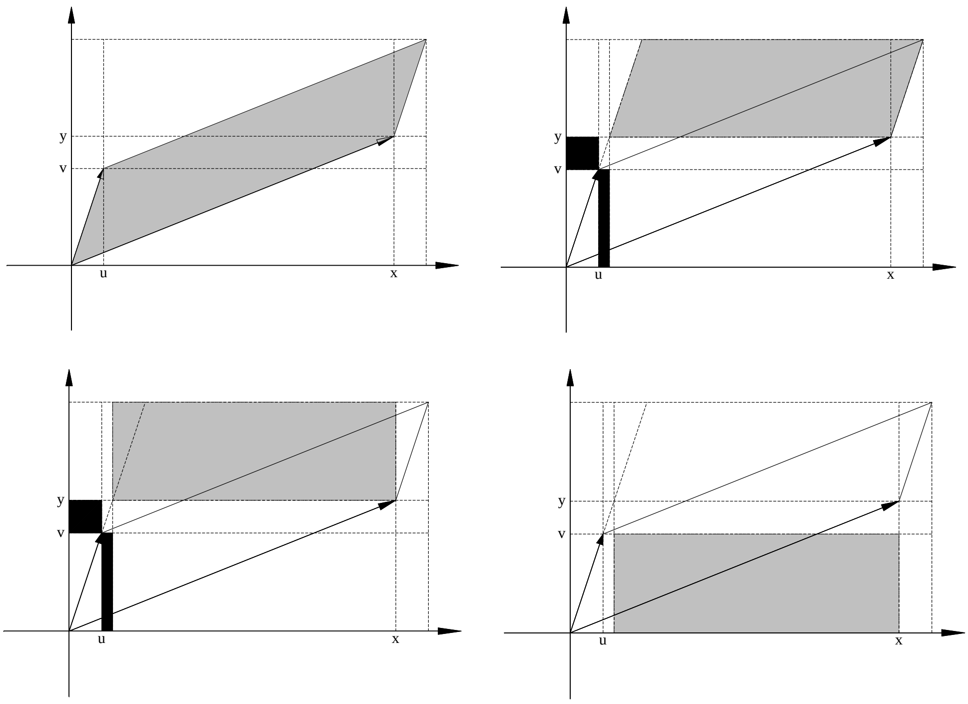

Abbildung 7: Das Parallelogramm links oben wird über die Figuren rechts oben und links unten in das Rechteck rechts unten verwandelt, ohne dass sich der Flächeninhalt verändert.