Die geometrische Algebra der räumlichen Vektorgeometrie*

Oliver Conradt

Was in dem Aufsatz *Die geometrische Algebra der ebenen Vektorgeometrie* [2] angefangen wurde, soll in diesem für die räumliche Vektorgeometrie fortgesetzt werden. Im Zentrum steht die Idee, wie in der räumlichen Vektorgeometrie eine assoziative Multiplikation eingeführt werden kann, welche die gewöhnliche skalare Multiplikation, das Skalarprodukt, das Vektorprodukt und das Spatprodukt als Teile enthält. Diese umfassende Multiplikation, das sogenannte geometrische Produkt, erweitert den Grössenbereich der Vektorgeometrie, wo wir es mit reellen Zahlen (oder Skalaren) und Vektoren zu tun haben, um die Grössen des *Vektors 2. Stufe* und der *Gegenzahl*. Von der räumlichen Vektorgeometrie werden wir so zu der geometrischen Algebra geführt, die die Zahl, den Vektor, den Vektor 2. Stufe und die Gegenzahl zu *einer* abgeschlossenen Struktur zusammenschliesst.

Es mag sonderbar erscheinen, dass das Einheit schaffende geometrische Produkt sowohl in der ebenen wie auch in der räumlichen Vektorgeometrie dazu führt, neue Grössen miteinzubeziehen. In der Ebene kamen die Gegenzahlen hinzu, hier werden es die dreidimensionalen Vektoren 2. Stufe und die eindimensionalen Gegenzahlen sein. Das geometrische Produkt kann nur in der erweiterten Struktur der geometrischen Algebra gedacht werden. Mit der einen Hälfte, den Zahlen und den Vektoren, enthält sie die Euklidische Vektorgeometrie. Was aber bedeutet die andere Hälfte?

Die Beschäftigung mit der geometrischen Algebra ist von besonderer Bedeutung nur schon dadurch, dass sie das einigende Band für die Multiplikation von Vektoren an die Hand gibt. Darüber hinaus werden wir mit einer Algebra bekannt, die weit über die Euklidische Vektorgeometrie hinausweist. Projektive und nichteuklidische Geometrien können mit dem Begriff der geometrischen Algebra ebenfalls erfasst werden. Die auch heute noch unter Fachleuten, Liebhabern der Mathematik und Laien weit verbreitete Denk*gewohnheit*, die analytische oder zahlenmässige Behandlung der Geometrie zwingend mit der Anschauungsweise der Euklidischen Geome-

*Erschienen in *Mathematisch-Physikalische Korrespondenz*, Nr. 206, S. 18-38, 2001.

trie verbunden zu wissen, *kann* mit der geometrischen Algebra überwunden werden. Allerdings nur unter der Voraussetzung, dass sie aus den Impulsen der projektiven Geometrie heraus aufgebaut wird [1]. — Dies als Ausblick. In diesem Aufsatz beschränken wir uns auf den Aufbau der geometrischen Algebra in Anknüpfung an die wohlbekannte räumliche Vektorgeometrie. In dem kurzen Abschnitt *Vergleich zu Biquaternionen* wird die geometrische Algebra mit den Biquaternionen in Verbindung gebracht.

Rechengesetze der Vektorgeometrie

Wir gehen von der räumlichen Vektorgeometrie aus. Im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem wird ein Vektor $\mathbf{r}$ durch seine x-, y- und z-Komponente festgelegt und als Spalte oder Linearkombination zu den drei Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ geschrieben,

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

Siehe auch Abbildung 1. Wir werden im Folgenden nur die zweite Schreibweise der Linearkombination benutzen.

Vektoren lassen sich *addieren*,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) + (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) \\ &= (a_1 + b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{e}_2 + (a_3 + b_3)\mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

und bilden bezüglich der Addition eine Abelsche Gruppe, d. h. es gelten folgende Rechengesetze:

Assoziativität	$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$,
Existenz des Nullelementes	$\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$,
Existenz des Inversen	$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$,
Kommutativität	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

Die Rechengesetze für die Addition von dreidimensionalen Vektoren sind die gleichen wie diejenigen für die Addition von zweidimensionalen Vektoren oder von reellen Zahlen.

Die Multiplikation tritt in der räumlichen Vektorgeometrie in vier Varianten auf. Es gibt die *skalare Multiplikation* eines Vektors mit einer beliebigen reellen Zahl λ,

$$\lambda\mathbf{r} = \lambda(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) = (\lambda x)\mathbf{e}_1 + (\lambda y)\mathbf{e}_2 + (\lambda z)\mathbf{e}_3,$$

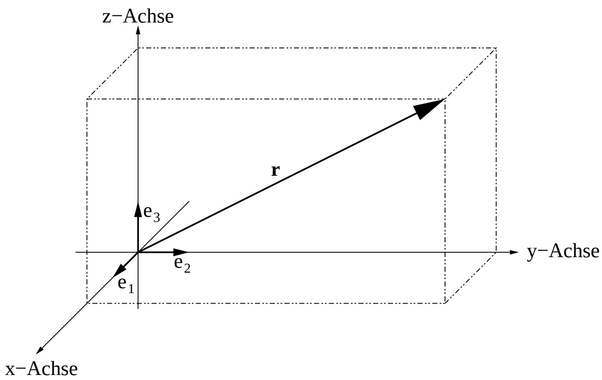

Abbildung 1: Vektor im dreidimensionalen Koordinatensystem

die sich mit der Multiplikation der reellen Zahlen assoziativ verträgt, ein Einselement enthält und kommutativ ist,

$$
\begin{array}{lll}
\text{Assoziativität} & (\lambda\mu)\mathbf{r} = \lambda(\mu\mathbf{r}), & \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\
\text{Einselement} & 1\mathbf{r} = \mathbf{r}, & \\
\text{Kommutativität} & \lambda\mathbf{r} = \mathbf{r}\lambda. &
\end{array}
$$

Das Einselement der skalaren Multiplikation ist zugleich auch das Einselement der reellen Multiplikation. Zur Addition verhält sich die skalare Multiplikation gemäss dem Gesetz der Distributivität,

$$
\begin{aligned}
\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\
(\lambda + \mu)\mathbf{a} &= \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}.
\end{aligned}
$$

Geometrisch bedeutet die skalare Multiplikation eine Streckung des zu multiplizierenden Vektors $\mathbf{r}$ mit dem Faktor $|\lambda|$ und, falls $\lambda < 0$ ist, zusätzlich eine Spiegelung am Ursprung.

Dann gibt es das *Skalarprodukt*, welches zwei Vektoren miteinander zu einer reellen Zahl verknüpft,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\alpha, \tag{1}$$

wobei α den Zwischenwinkel der Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ darstellt. Als Spezialfall enthält dieses Produkt die sogenannte *Quadratregel*, d. h., wenn ein beliebiger Vektor $\mathbf{a}$ mit sich selber skalar multipliziert wird, so kommt gerade das Quadrat seiner Länge heraus,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Das Skalarprodukt ist kommutativ und bezüglich der Addition von Vektoren distributiv,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a},$$
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}.$$

Da das Produkt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ eine reelle Zahl darstellt, ergibt ein Ausdruck der Form $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ keinen Sinn. Das Skalarprodukt ist nicht assoziativ. Gilt das Assoziativgesetz aber, wenn, wie es nahezuliegen scheint, das Skalarprodukt mit der skalaren Multiplikation kombiniert wird?

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \stackrel{?}{=} \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

Das Gegenbeispiel

$$(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) = 0$$

zeigt, dass es auch so nicht 'gerettet' werden kann. Gemäss der Formel (1) bedeutet das Skalarprodukt geometrisch ein Projizieren des einen Faktors auf den anderen. Es wird positiv, null oder negativ, falls der Zwischenwinkel kleiner als 90°, genau gleich 90° beziehungsweise grösser als 90° ist.

Die skalare Multiplikation und das Skalarprodukt kennen wir schon aus der ebenen Vektorgeometrie. In der räumlichen Vektorgeometrie treten zusätzlich zu diesen beiden noch zwei weitere Multiplikationsarten hinzu. Das *Vektorprodukt*

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

verknüpft zwei beliebige Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ zu dem eindeutig bestimmten Vektor $\mathbf{c}$ mit den folgenden definierenden Eigenschaften:

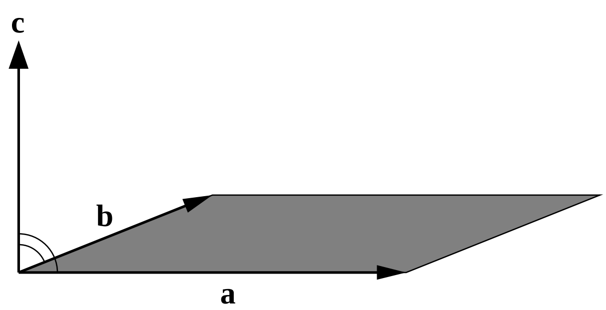

Abbildung 2: Zum Begriff des Vektorproduktes

1. $\mathbf{c}$ steht sowohl zu $\mathbf{a}$ als auch zu $\mathbf{b}$ senkrecht.

2. Der Betrag von $\mathbf{c}$ ist gleich dem Produkt aus den Beträgen der Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ und dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels α.

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha \qquad (0° \leq \alpha \leq 180°)$$

3. Die Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein *rechtshändiges* System.[1]

Aus diesen Eigenschaften folgt, dass das Vektorprodukt beim Vertauschen der Faktoren das Vorzeichen wechselt und bezüglich der Addition in dem Verhältnis der Distributivität steht,

$$\begin{array}{lr} \text{Alternativgesetz} & \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \\ \text{Distributivität} & \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}. \end{array}$$

Das Vektorprodukt eines Einheitsvektors mit sich selbst ergibt null, weil der Zwischenwinkel 0° ist,

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = 0.$$

Was ergibt das Produkt $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$? Die erste definierende Eigenschaft fordert, dass $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ sowohl zu $\mathbf{e}_1$ wie auch zu $\mathbf{e}_2$ senkrecht steht, d. h. für einen reellen λ-Wert gilt

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \lambda \mathbf{e}_3.$$

Die zweite Eigenschaft schränkt die möglichen λ-Werte auf

$$|\lambda| = |\lambda||\mathbf{e}_3| = |\lambda \mathbf{e}_3| = |\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_1||\mathbf{e}_2| \sin 90° = 1$$

ein. Und die dritte Eigenschaft legt ihn auf $+1$ fest, da die Vektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden. Entsprechend kann man sich auch die anderen gemischten Produkte überlegen,

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2. \end{array}$$

[1] Definiton: Ein Tripel $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ von nichtkomplanaren Vektoren mit gemeinsamen Anfangspunkt bildet in dieser Reihenfolge ein *rechtshändiges* System, wenn die Drehung von $\mathbf{a}$ nach $\mathbf{b}$ von der Spitze von $\mathbf{c}$ aus als Drehung gegen den Uhrzeiger erscheint; sonst ein *linkshändiges* System.

Aus den Produkten unter den Einheitsvektoren lassen sich die Komponenten des allgemeine Vektorproduktes berechnen,

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3)\times(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3)\\ &= (a_1b_1)\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1 + (a_1b_2)\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 + (a_1b_3)\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3 + (a_2b_1)\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1 +\\ &+ (a_2b_2)\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2 + (a_2b_3)\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 + (a_3b_1)\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 + (a_3b_2)\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_2 +\\ &+ (a_3b_3)\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_3\\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Wie das Beispiel

$$(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)\times\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{e}_1\times(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2) = \mathbf{0}$$

zeigt, gilt auch beim Vektorprodukt das Assoziativgesetz nicht, obwohl ein Term der Form $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ sinnvoll ist. Die geometrische Interpretation des Vektorproduktes ist in Abbildung 2 gezeigt.

Mit drei Vektoren kann das *Spatprodukt* gebildet werden; es ist eine reelle Zahl und wird mit Hilfe des Vektorproduktes und des Skalarproduktes ausgeführt,

$$\begin{aligned}[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] &:= (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3.\end{aligned}$$

Das Spatprodukt ist positiv (negativ), falls es sich bei den Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ in dieser Reihenfolge um ein rechtshändiges (linkshändiges) System handelt; null ergibt es, wenn alle drei Vektoren in eine Ebene verschoben werden können. Bei einer zyklischen Vertauschung der drei Vektoren ändert sich weder das Vorzeichen noch der Betrag des Spatproduktes; hingegen bewirkt das Vertauschen zweier beliebiger Vektoren einen Vorzeichenwechsel,

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = [\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}] = [\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}], \tag{2a}$$

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = -[\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b}]. \tag{2b}$$

Die drei Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ spannen ein Parallelepiped beziehungsweise einen Spat auf, dessen Volumen gerade durch den Betrag des Spatproduktes dargestellt wird,

$$|[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]| = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}||\mathbf{c}||\cos\alpha|.$$

Siehe Abbildung 3.

Unser Überblick über die räumliche Vektorgeometrie zeigt, wie das Multiplizieren von Vektoren in vier verschiedenen Arten (skalare Multiplikation, Skalarprodukt, Vektorprodukt, Spatprodukt) auftritt. Nachdem wir in [2]

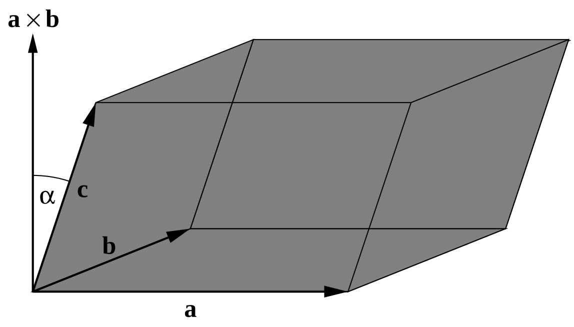

Abbildung 3: Zum Begriff des Spatproduktes

gezeigt haben, dass die skalare Multiplikation und das Skalarprodukt der ebenen Vektorgeometrie in dem assoziativen geometrischen Produkt zusammengefasst werden können, erhebt sich auch hier die Frage, ob diese vier Arten des Multiplizierens nicht nur die Teile einer einzigen umfassenden Multiplikation seien. Im Folgenden soll ein solches umfassendes, assoziatives Produkt entwickelt werden.

Geometrisches Produkt

Wir führen im Raum ein neues *geometrisches Produkt*[2] ein, das die folgenden Rechengesetze erfüllen soll:

$$\text{Assoziativität} \qquad (\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{bc}), \tag{3a}$$

$$\text{Distributivität} \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) &= \mathbf{ab}+\mathbf{ac} \\ (\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} &= \mathbf{ac}+\mathbf{bc} \end{aligned} \right\}, \tag{3b}$$

$$\text{Einselement} \qquad \mathbf{1a} = \mathbf{a1} = \mathbf{a}, \tag{3c}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Kommutativität des}\\ \text{skalaren Anteils der}\\ \text{Multiplikation}\end{array}\right\} \qquad \lambda\mathbf{a} = \mathbf{a}\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3d}$$

Weiter fordern wir die Regel, dass jeder Vektor $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ mit der Länge $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ bei der Multiplikation bezüglich des geometrischen Produktes mit sich selbst gerade das Quadrat der eigenen Länge ergibt,

$$\text{Quadratregel} \qquad \mathbf{r}^2 = |\mathbf{r}|^2. \tag{3e}$$

[2]Das geometrische Produkt wird in der Fachliteratur auch oft als *Clifford Produkt* bezeichnet.

Mit diesen fünf Regeln lässt sich das geometrische Produkt genauer festlegen. Mittels Koeffizientenvergleich folgt zunächst aus der Quadratregel,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^2 &= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3)^2 \\ &= x^2\mathbf{e}_1^2 + y^2\mathbf{e}_2^2 + z^2\mathbf{e}_3^2 + \\ &+ xy(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) + yz(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2) + zx(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3) \\ &\stackrel{!}{=} x^2 + y^2 + z^2 \\ &= |\mathbf{r}|^2,\end{aligned}$$

dass die Quadrate der Basisvektoren (bezüglich des geometrischen Produktes) Eins ergeben und die geometrischen Produkte $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ und $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$ sich jeweils durch Addition aufheben müssen,

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = \mathbf{1}, \tag{4}$$

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3. \tag{5}$$

Was bedeuten die Produkte $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ und $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1$? Mit Hilfe der Grundregeln (3) und den Gleichungen (4) und (5) lassen sich die Quadrate dieser Produkte ausrechnen,

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 &= (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^2\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1^2 = -\mathbf{1}, \\ (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)^2 &= (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)(-\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3^2\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2^2 = -\mathbf{1}, \\ (\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1)^2 &= (\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1)(-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3^2 = -\mathbf{1}.\end{aligned}$$

Das Ergebnis zeigt, dass es sich bei den Produkten weder um reelle Zahlen — die Quadrate reeller Zahlen sind grösser oder gleich null — noch um Vektoren — letzteres steht im Widerspruch zur Quadratregel (3e) — handeln kann. Die Produkte erweisen sich damit als *neuartige* Grössen, die von den Zahlen und den Vektoren zu unterscheiden sind. Die Produkte sind auch untereinander linear unabhängig. Multipliziert man die Gleichung

$$0 = \lambda_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \lambda_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + \lambda_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$$

von rechts oder links mit $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$,

$$0 = -(\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3),$$

so kann man aus der linearen Unabhängigkeit von Vektoren in der letzteren Gleichung auf die lineare Unabhängigkeit der drei Produkte schliessen. Wir schreiben diese Produkte mit den grossen Buchstaben

$$\mathbf{E}_1 := \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{E}_2 := \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{E}_3 := \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2,$$

und nennen sie die *Basisvektoren 2. Stufe*. Ein Ausdruck der Form

$$\mathbf{R} = X\mathbf{E}_1 + Y\mathbf{E}_2 + Z\mathbf{E}_3$$

heisst *Vektor 2. Stufe* oder *Bivektor*, wobei X, Y und Z seine *reellen Komponenten* darstellen. Diese Benennung bezieht sich auf die Produkte $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, die alle aus *zwei* Faktoren bestehen. Entsprechend wird jetzt der gewöhnliche Vektor

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

auch als *Vektor 1. Stufe* bezeichnet. Da wir vom dreidimensionalen Raum ausgegangen sind, besteht die Möglichkeit, drei *verschiedene* Basisvektoren 1. Stufe miteinander geometrisch zu multiplizieren. Die sechs Permutationsmöglichkeiten

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, && \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3,\\
&\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, && \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3,\\
&\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, && \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3,
\end{aligned}$$

stellen bis auf das Vorzeichen alle dieselbe Grösse dar. Bei zyklischer Vertauschung der Faktoren ändert sich das Vorzeichen nicht, hingegen bei der Vertauschung zweier beliebiger Faktoren. Das Produkt $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ quadriert zu $-\mathbf{1}$,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)^2 &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2(-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\\
&= -\mathbf{e}_1(-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(-\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3\\
&= -\mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_2^2\mathbf{e}_3^2\\
&= -\mathbf{1},
\end{aligned}$$

und stellt deshalb keinen reellen Skalar und keinen Vektor 1. Stufe dar. Um zu überprüfen, ob es sich um einen verkappten Vektor 2. Stufe handelt, setzen wir die Gleichung

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \stackrel{?}{=} X\mathbf{E}_1 + Y\mathbf{E}_2 + Z\mathbf{E}_3$$

an und multiplizieren sie (von links oder rechts) mit $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$,

$$-\mathbf{1} \neq -X\mathbf{e}_1 - Y\mathbf{e}_2 - Z\mathbf{e}_3.$$

Der Widerspruch bedeutet, dass das Produkt $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ als *neue*, auch von den Vektoren 2. Stufe verschiedene Grösse zu denken ist. Wir bezeichen sie mit

$$\mathbf{I} := \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$$

und nennen ihre Vielfachen $\lambda\mathbf{I}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, im Unterschied zu den reellen Zahlen $\lambda\mathbf{1}$ reelle *Gegenzahlen*[3] (vgl. [2, S. 8f]). Ein Produkt aus vier Basisvektoren 1. Stufe enthält mindestens zwei gleiche Faktoren. Deshalb reduziert sich ein solcher Ausdruck auf einen Vektor 2. Stufe (im Falle genau zwei gleicher Basisvektoren) oder einen Skalar (im Falle zwei mal zwei bzw. vier gleicher Basisvektoren). Beispiele:

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3(-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1(-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -\mathbf{E}_1,$$
$$\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3(-\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3^2\mathbf{e}_1^2 = -\mathbf{1}.$$

Wir haben nun alles beisammen, um den gesamten Bereich zu überblicken, auf welchen sich die ersten vier Rechengesetze des geometrischen Produktes beziehen. Es gibt vier Grössenarten: die Zahlen $\lambda\mathbf{1}$, die Vektoren 1. Stufe $\mathbf{r}$, die Vektoren 2. Stufe $\mathbf{R}$ und die Gegenzahlen $\mu\mathbf{I}$, welche alle voneinander zu unterscheiden sind. Alle können miteinander geometrisch multipliziert werden und ergeben wieder eine der aufgezählten Grössenarten. Es ist deshalb möglich, die vier Elemente zu *einer* Grösse, dem sogenannten *Multivektor*, additiv zusammenzufassen,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \lambda\mathbf{1} + \mathbf{r} + \mathbf{R} + \mu\mathbf{I} \\ &= \lambda\mathbf{1} + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 + X\mathbf{E}_1 + Y\mathbf{E}_2 + Z\mathbf{E}_3 + \mu\mathbf{I}.\end{aligned}$$

Ein allgemeiner Multivektor ist im Falle der räumlichen Vektorgeometrie eine Linearkombination zu den acht Basiselementen $\mathbf{1}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ und $\mathbf{I}$. Damit gliedert sich jeder Multivektor in die vier Grössen Zahl, Vektor 1. Stufe, Vektor 2. Stufe und Gegenzahl; die zugehörige Schreibweise ist die folgende:

(reelle) Zahl	$\langle\mathbf{a}\rangle_0 = \lambda\mathbf{1}$,
(reeller) Vektor 1. Stufe	$\langle\mathbf{a}\rangle_1 = \mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$,
(reeller) Vektor 2. Stufe	$\langle\mathbf{a}\rangle_2 = \mathbf{R} = X\mathbf{E}_1 + Y\mathbf{E}_2 + Z\mathbf{E}_3$,
(reelle) Gegenzahl	$\langle\mathbf{a}\rangle_3 = \mu\mathbf{I}$

oder

$$\mathbf{a} = \langle\mathbf{a}\rangle_0 + \langle\mathbf{a}\rangle_1 + \langle\mathbf{a}\rangle_2 + \langle\mathbf{a}\rangle_3.$$

Die Rechengesetze (3a)–(3d) beziehen sich auf beliebige Multivektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$; sie gelten also nicht nur für Vektoren 1. Stufe. Die Quadratregel (3e) hingegen beschränkt sich auf beliebige Vektoren $\mathbf{r}$. Würde man sie auf die reellen Zahlen anwenden, so stellte sie keine neue Forderung dar; und mit

[3] In der Fachliteratur spricht man meistens von Pseudoskalaren.

den Vektoren 2. Stufe und den Gegenzahlen steht sie im Widerspruch, da letztere zu einer Zahl kleiner oder gleich Null quadrieren.

$$\begin{aligned} (\lambda\mathbf{1})^2 &= \lambda^2\mathbf{1}^2 = \lambda^2 \geq 0 & (\lambda\mathbf{I})^2 &= \lambda^2\mathbf{I}^2 = -\lambda^2 \leq 0 \\ \mathbf{r}^2 &= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3)^2 & \mathbf{R}^2 &= (X\mathbf{E}_1 + Y\mathbf{E}_2 + Z\mathbf{E}_3)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \geq 0 & &= -(X^2 + Y^2 + Z^2) \leq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Übung 1: Verifiziere die Gleichung für das Quadrat des Vektors 2. Stufe.
Übung 2: Vervollständige die Multiplikationstafel für die Basiselemente der geometrischen Algebra.

	$\mathbf{1}$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{E}_1$	$\mathbf{E}_2$	$\mathbf{E}_3$	$\mathbf{I}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{E}_1$	$\mathbf{E}_2$	$\mathbf{E}_3$	$\mathbf{I}$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$							
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$							
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$							
$\mathbf{E}_1$	$\mathbf{E}_1$							
$\mathbf{E}_2$	$\mathbf{E}_2$							
$\mathbf{E}_3$	$\mathbf{E}_3$							
$\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$							$-\mathbf{1}$

$\mathbf{I}$ kann mit einem beliebigen Vektor 1. Stufe multipliziert werden,

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{r}\mathbf{I} & \mathbf{R} &= \mathbf{I}\mathbf{r} \\ &= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3)\mathbf{I} & &= \mathbf{I}(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) \\ &= x\mathbf{e}_1\mathbf{I} + y\mathbf{e}_2\mathbf{I} + z\mathbf{e}_3\mathbf{I} & &= x\mathbf{I}\mathbf{e}_1 + y\mathbf{I}\mathbf{e}_2 + z\mathbf{I}\mathbf{e}_3 \\ &= x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2 + z\mathbf{E}_3, & &= x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2 + z\mathbf{E}_3, \end{aligned} \tag{7a}$$

wobei sich zeigt, dass die Multiplikation von links und von rechts den gleichen Vektor 2. Stufe ergeben. Entsprechend ergibt die Multiplikation eines Vektors 2. Stufe mit $\mathbf{I}$ einen Vektor 1. Stufe,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{R}\mathbf{I} & \mathbf{r} &= \mathbf{I}\mathbf{R} \\ &= (X\mathbf{E}_1 + Y\mathbf{E}_2 + Z\mathbf{E}_3)\mathbf{I} & &= \mathbf{I}(X\mathbf{E}_1 + Y\mathbf{E}_2 + Z\mathbf{E}_3) \\ &= X\mathbf{E}_1\mathbf{I} + Y\mathbf{E}_2\mathbf{I} + Z\mathbf{E}_3\mathbf{I} & &= X\mathbf{I}\mathbf{E}_1 + Y\mathbf{I}\mathbf{E}_2 + Z\mathbf{I}\mathbf{E}_3 \\ &= -(X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2 + Z\mathbf{e}_3), & &= -(X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2 + Z\mathbf{e}_3). \end{aligned} \tag{7b}$$

Da auch Zahlen mit Gegenzahlen und Gegenzahlen untereinander vertauschbar sind, vertauschen in der räumlichen Vektorgeometrie die Gegenzahlen mit beliebigen Multivektoren.

Die Menge aller Multivektoren bildet einen reellen Vektorraum bezüglich der Addition und zusammen mit dem geometrischen Produkt (3a)–(3d) eine nicht-kommutative Algebra. Die Forderung der Quadratregel (3e) macht letztere zu einer *geometrischen Algebra* oder auch Clifford Algebra $\mathcal{G}_3$. Der Index 3 steht für den dreidimensionalen Raum der Vektoren 1. Stufe, aus welchem heraus die ganze Algebra durch fortgesetzte geometrische Multiplikation aufgebaut wurde. Die geometrische Algebra $\mathcal{G}_3$ selber bildet aber einen $2^3 = 8$-dimensionale Vektorraum zu den oben angegebenen acht Basiselementen.

Inneres und äusseres Produkt

Das geometrische Produkt zweier beliebiger Vektoren 1. Stufe ergibt eine Summe von Zahl und Vektor 2. Stufe,

$$\begin{aligned}\mathbf{rs} &= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3)(u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3) \\ &= (xu + yv + zw)\mathbf{1} + (yw - zv)\mathbf{E}_1 + (zu - xw)\mathbf{E}_2 + (xv - yu)\mathbf{E}_3 \\ &= \langle \mathbf{rs} \rangle_0 + \langle \mathbf{rs} \rangle_2,\end{aligned} \tag{8a}$$

wobei die letzte Zeile so zu verstehen ist:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{rs} \rangle_0 &= (xu + yv + zw)\mathbf{1}, \\ \langle \mathbf{rs} \rangle_2 &= (yw - zv)\mathbf{E}_1 + (zu - xw)\mathbf{E}_2 + (xv - yu)\mathbf{E}_3.\end{aligned}$$

Das geometrische Produkt eines Vektors 1. Stufe mit einem Vektor 2. Stufe ergibt eine Summe von einem Vektor 1. Stufe und einer Gegenzahl,

$$\begin{aligned}\mathbf{rR} &= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3)(X\mathbf{E}_1 + Y\mathbf{E}_2 + Z\mathbf{E}_3) \\ &= (zY - yZ)\mathbf{e}_1 + (xZ - zX)\mathbf{e}_2 + (yX - xY)\mathbf{e}_3 + (xX + yY + zZ)\mathbf{I} \\ &= \langle \mathbf{rR} \rangle_1 + \langle \mathbf{rR} \rangle_3;\end{aligned} \tag{8b}$$

und dasjenige zweier beliebiger Vektoren 2. Stufe eine Zahl und einen Vektor 2. Stufe,

$$\begin{aligned}\mathbf{RS} &= (X\mathbf{E}_1 + Y\mathbf{E}_2 + Z\mathbf{E}_3)(U\mathbf{E}_1 + V\mathbf{E}_2 + W\mathbf{E}_3) \\ &= -(XU + YV + ZW)\mathbf{1} + \\ &\quad + (ZV - YW)\mathbf{E}_1 + (XW - ZU)\mathbf{E}_2 + (YU - XV)\mathbf{E}_3 \\ &= \langle \mathbf{RS} \rangle_0 + \langle \mathbf{RS} \rangle_2.\end{aligned} \tag{8c}$$

Aus diesen Produktbildungen lässt sich folgende Gesetzmässigkeit ablesen:

Die geometrische Multiplikation eines Vektors der Stufe r, $\mathbf{a} = \langle\mathbf{a}\rangle_r$, mit einem Vektor der Stufe s, $\mathbf{b} = \langle\mathbf{b}\rangle_s$, ergibt eine Summe von Vektoren verschiedener Stufen. Die niedrigst mögliche Stufe ist $\langle\mathbf{ab}\rangle_{|r-s|}$, die nächst höhere $\langle\mathbf{ab}\rangle_{|r-s|+2}$. Summanden einer Stufe, die sich von der niedrigsten Stufe $|r-s|$ um eine ungerade Zahl unterscheiden, kommen im Produkt **ab** nicht vor. Die höchst mögliche Stufe ist $\langle\mathbf{ab}\rangle_{r+s}$ im Falle $r+s \leq 3$ und $\langle\mathbf{ab}\rangle_{6-(r+s)}$ im Falle $6 \geq r+s \geq 3$.

Wenn die Zahlen als Vektoren der Stufe 0 und die Gegenzahlen als Vektoren 3. Stufe angesehen werden, schliesst diese Gesetzmässigkeit sowohl die Zahlen wie auch die Gegenzahlen mit ein. Bei der Multiplikation eines Vektors der Stufe r, $\mathbf{a} = \langle\mathbf{a}\rangle_r$, mit der Zahl $\lambda\mathbf{1}$ fällt die unterste Stufe $|r-0| = r$ mit der obersten $r+0 = r$ zusammen. Das Produkt $\mathbf{a}\lambda$ besteht also nur aus *einer* Stufe. Bei der Multiplikation eines Vektors der Stufe r, $\mathbf{a} = \langle\mathbf{a}\rangle_r$, mit der Gegenzahl $\lambda\mathbf{I}$ wird die Stufe r nach $|r-3| = 3-r$ gespiegelt. Aus den Gleichungen (3d), (7) und $\mathbf{I}^2 = -\mathbf{1}$ ist ersichtlich, dass auch bei der Multiplikation mit einer Gegenzahl nur *eine* Stufe im Resultat vorkommt. Diese Ähnlichkeit mit der skalaren Multiplikation bestätigt die Ansicht, die Gegenzahlen als eine andere Art von Zahlen anzusehen.

In gewissen Situationen erweist es sich als vorteilhaft, nur einzelne Stufen des geometrischen Produktes ins Auge zu fassen. Seien weiterhin **a** und **b** Vektoren der Stufe r beziehungsweise s. Den Summanden niedrigster Stufe greifen wir als *inneres Produkt* gesondert heraus,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := \langle\mathbf{ab}\rangle_{|r-s|}, \tag{9}$$

ebenso den Summanden der Stufe $r+s$ als *äusseres Produkt*,

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} := \langle\mathbf{ab}\rangle_{r+s}, \tag{10}$$

wobei $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$ ist, wenn $r+s > 3$ oder $r+s \leq 1$. Im Falle $r+s \leq 1$ stellt **a** oder **b** eine Zahl dar. Das äussere Produkt mit einer Zahl verschwindet also immer[4]. Die geometrischen Produkte (8) können wir nun so schreiben:

$$\begin{aligned}
\mathbf{rs} &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{s}, \\
\mathbf{rR} &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{R}, \\
\mathbf{RS} &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} + \langle\mathbf{RS}\rangle_2, \qquad \mathbf{R} \wedge \mathbf{S} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

[4]Würde das äussere Produkt mit einer Zahl nicht verschwinden, träten unangenehme Mehrdeutigkeiten auf. Für einen homogenen Multivektor **a** der Stufe r und eine Zahl λ würde sowohl $\lambda\mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{a}$ als auch $\lambda\mathbf{a} = \lambda \wedge \mathbf{a}$ gelten. In anderem Zusammenhang lässt sich das Verschwinden des äusseren Produktes mit einer Zahl auch weiter begründen.

Das innere Produkt, welches mit Hilfe der geometrischen Multiplikation in Gleichung (9) definiert worden ist, hat, wie die folgenden Beispiele zeigen, im Gegensatz zu letzterem die Eigenschaft der Assoziativität verloren,

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_2 &= \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 \rangle_0 \cdot \mathbf{e}_2 = \langle \mathbf{1}\mathbf{e}_2 \rangle_1 = \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_1 \cdot \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \rangle_0 = \langle \mathbf{e}_1\mathbf{0} \rangle_1 = \mathbf{0};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{E}_3 \cdot \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{E}_1 &= \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \rangle_0 \cdot \mathbf{E}_1 = \langle -\mathbf{E}_2 \rangle_0 \cdot \mathbf{E}_1 = \langle \mathbf{0}\mathbf{E}_1 \rangle_2 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{E}_3 \cdot (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1) &= \mathbf{E}_3 \cdot \langle \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \rangle_0 = \langle \mathbf{E}_3(-\mathbf{1}) \rangle_2 = -\mathbf{E}_3;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{E}_3 &= \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 \rangle_0 \cdot \mathbf{E}_3 = \langle \mathbf{1}\mathbf{E}_3 \rangle_2 = \mathbf{E}_3, \\ \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_3) &= \mathbf{e}_1 \cdot \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \rangle_1 = \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \rangle_0 = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Hingegen gilt das Assoziativgesetz durchgehend für das äussere Produkt,

$$(\mathbf{a}_{\bar{r}} \wedge \mathbf{b}_{\bar{s}}) \wedge \mathbf{c}_{\bar{t}} = \mathbf{a}_{\bar{r}} \wedge (\mathbf{b}_{\bar{s}} \wedge \mathbf{c}_{\bar{t}}), \tag{11}$$

wobei die überstrichenen Indizes die Stufe des jeweiligen homogenen[5] Multivektors angeben. Sobald mindestens eine der Stufen der homogenen Multivektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ oder $\mathbf{c}$ null ist, verschwinden nach Definition des äusseren Produktes beide Seiten der Gleichung (11). Wenn die Summe der Stufen $r + s + t$ grösser als 3 ist, stimmt Gleichung (11) auch, da wieder beide Seiten verschwinden,

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}_{\bar{r}} \wedge \mathbf{b}_{\bar{s}}) \wedge \mathbf{c}_{\bar{t}} &= \langle \langle \mathbf{ab} \rangle_{r+s} \mathbf{c} \rangle_{r+s+t} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{a}_{\bar{r}} \wedge (\mathbf{b}_{\bar{s}} \wedge \mathbf{c}_{\bar{t}}) &= \langle \mathbf{a} \langle \mathbf{bc} \rangle_{s+t} \rangle_{r+s+t} = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Es muss jetzt nur noch die Richtigkeit der Gleichung (11) für den Fall $r = s = t = 1$ gezeigt werden. Alle anderen Möglichkeiten sind durch die beiden oberen Fälle erfasst. Wir benutzen dazu die Zerlegung des geometrischen Produktes zweier Vektoren 1. Stufe in eine Summe von innerem und äusserem Produkt und die Tatsache, dass die Ausdrücke $\langle (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \rangle_3$ und $\langle \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \rangle_3$ verschwinden,

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}_{\bar{1}} \wedge \mathbf{b}_{\bar{1}}) \wedge \mathbf{c}_{\bar{1}} &= \langle (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\mathbf{c} \rangle_3 = \langle (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \rangle_3 + \langle (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\mathbf{c} \rangle_3 \\ &= \langle (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\mathbf{c} \rangle_3 = \langle (\mathbf{ab})\mathbf{c} \rangle_3 = \langle \mathbf{a}(\mathbf{bc}) \rangle_3 \\ &= \langle \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \rangle_3 = \langle \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \rangle_3 + \langle \mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \rangle_3 \\ &= \langle \mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \rangle_3 = \mathbf{a}_{\bar{1}} \wedge (\mathbf{b}_{\bar{1}} \wedge \mathbf{c}_{\bar{1}}).\end{aligned}$$

[5]Ein Multivektor M wird *homogen* genannt, wenn er aus genau einer Stufe besteht: $M = \langle M \rangle_r \equiv M_{\bar{r}}$.

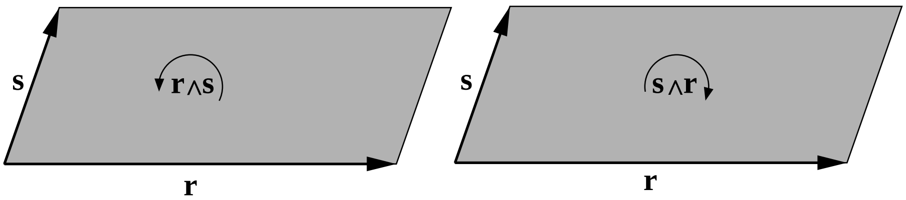

Abbildung 4: Das äussere Produkt zweier Vektoren 1. Stufe als orientierte Flächen.

Anhand der Gleichungen (8) lässt sich bestätigen, dass die Vorzeichen der inneren und äusseren Produkte sich beim Vertauschen der Faktoren in Abhängikeit der involvierten Stufen folgendermassen ändern,

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{\bar r} \cdot \mathbf{b}_{\bar s} &= (-1)^{r(s-r)} \mathbf{b}_{\bar s} \cdot \mathbf{a}_{\bar r}, \qquad r \leq s,\\ \mathbf{a}_{\bar r} \wedge \mathbf{b}_{\bar s} &= (-1)^{rs} \mathbf{b}_{\bar s} \wedge \mathbf{a}_{\bar r}.\end{aligned}$$

Das Vertauschen der Faktoren bei diesen Produkten bewirkt also höchstens einen Vorzeichenwechsel.

Einbettung der Vektorgeometrie

Wie fügen sich die vier Multiplikationsarten der Vektorgeometrie in das geometrische Produkt ein? Die skalare Multiplikation erhält man aus der Grundregel (3d) durch Einschränkung des Multivektors $\mathbf{a}$ auf einen Vektor 1. Stufe. Das Skalarprodukt entsteht aus dem inneren Produkt (9) durch Einschränkung der Faktoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ auf Vektoren 1. Stufe. Siehe auch Gleichung (8a). In beiden Fällen sind die geometrischen Interpretationen gleich wie in der Vektorgeometrie.

Das Vektorprodukt

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \times \mathbf{s} &= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) \times (u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3)\\ &= (yw - zv)\mathbf{e}_1 + (zu - xw)\mathbf{e}_2 + (xv - yu)\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

unterscheidet sich von dem äusseren Produkt dieser beiden Vektoren 1. Stufe nur darin, dass die Basisvektoren der 2. Stufe angehören; die Koeffizienten sind jeweils die gleichen,

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \wedge \mathbf{s} &= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) \wedge (u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3)\\ &= (yw - zv)\mathbf{E}_1 + (zu - xw)\mathbf{E}_2 + (xv - yu)\mathbf{E}_3.\end{aligned}$$

Zur exakten Übereinstimmung kommt man durch die Multiplikation des äusseren Produktes mit $-\mathbf{I}$,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{s} = -(\mathbf{r} \wedge \mathbf{s})\mathbf{I}. \tag{12}$$

Wie wir gezeigt haben, ist das äussere Produkt assoziativ, das Vektorprodukt jedoch nicht. Der Grund für diesen Verlust liegt in dem Faktor $-\mathbf{I}$, welcher aus dem Bivektor einen Vektor 1. Stufe macht. An den Koeffizienten ändert diese Multiplikation nichts. Es liegt deshalb nahe, im Vektorprodukt eine Art 'Ausweg' zu sehen, um ein Abbild des äusseren Produktes zweier Vektoren 1. Stufe in der Vektorgeometrie zur Verfügung zu haben. Da die Vektorgeometrie keine Vektoren 2. Stufe kennt, muss der Preis des Assoziativgesetzes bezahlt werden. — Andererseits lässt sich von dem Vektorprodukt etwas über die geometrische Interpretation des äusseren Produktes lernen. Der Betrag des Vektorproduktes stellt ja gerade den Flächeninhalt des durch die Faktoren aufgespannten Parallelogrammes dar. Der Betrag des äusseren Produktes,

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}| &= \sqrt{(\mathbf{r} \wedge \mathbf{s})^2} = \sqrt{-[(yw - zv)^2 + (zu - xw)^2 + (xv - yu)^2]} \\
&= \sqrt{\mathbf{I}^2[(yw - zv)^2 + (zu - xw)^2 + (xv - yu)^2]} \\
&= \sqrt{(yw - zv)^2 + (zu - xw)^2 + (xv - yu)^2}\,\mathbf{I},
\end{aligned}$$

liefert eine Gegenzahl, deren reeller Koeffizient gleich gross ist wie der Betrag des Vektorproduktes. Wir können deshalb das äussere Produkt zweier Vektoren 1. Stufe geometrisch als den orientierten Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogrammes interpretieren. Siehe Abbildung 4. Es scheint nahezuliegen, Vektoren 2. Stufe als orientierte Flächen darzustellen. Dies wird in der Fachliteratur auch oft gemacht [4, 5]. Man muss sich dabei aber im Klaren sein, dass diese Interpretation nicht nur von dem Vektor 2. Stufe $\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}$, sondern auch von den Faktoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{s}$ abhängt. Zum Beispiel kann der Bivektor $4\mathbf{E}_3$ durch unendlich viele äussere Produkte gebildet werden,

$$\begin{aligned}
4\mathbf{E}_3 &= (2\mathbf{e}_1) \wedge (2\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 \wedge (4\mathbf{e}_2) = (4\mathbf{e}_1) \wedge \mathbf{e}_2 = \cdots \\
&= (\lambda\mathbf{e}_1) \wedge \left(\frac{4}{\lambda}\mathbf{e}_2\right), \qquad \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.
\end{aligned}$$

Entsprechend gibt es unendlich viele, zueinander äquivalente geometrische Darstellungen für ein und denselben Bivektor. Siehe Abbildung 5. Diese geometrische Interpretation der Vektoren 2. Stufe 'klebt' also noch an den Vektoren 1. Stufe.

Das Spatprodukt

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3$$

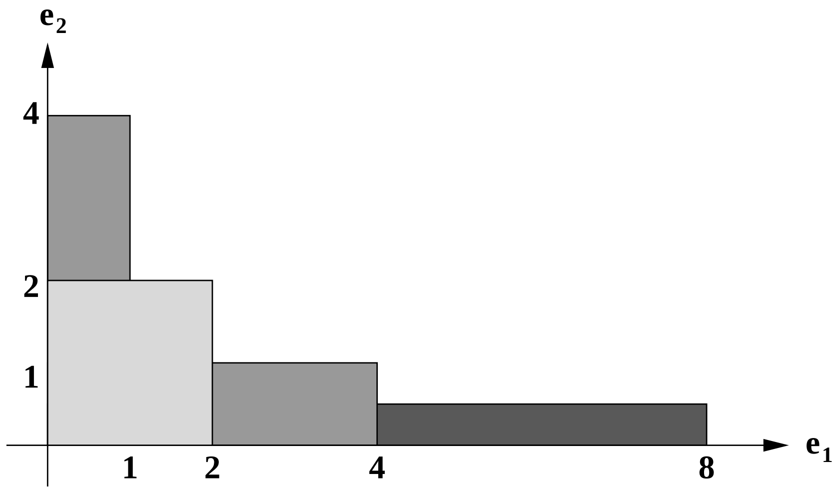

Abbildung 5: Zueinander equivalente orientierte Flächen des Bivektors $4\mathbf{E}_3$.

stimmt mit dem reellen Koeffizienten des gegenzahlwertigen, doppelten äusseren Produktes

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = [(a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3]\mathbf{I}$$

überein. Nach der Multiplikation mit $-\mathbf{I}$ können beide Produkte gleichgesetzt werden,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{I}. \tag{13}$$

Die Gesetzmässigkeit (2) des Spatproduktes bei zyklischer und antizyklischer Vertauschung gilt auch für das doppelte äussere Produkt. Aus Gleichung (13) folgt, dass der Betrag des doppelten äusseren Produktes,

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}| &= \sqrt{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^2} \\ &= \sqrt{[(a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3]^2\mathbf{I}^2} \\ &= |(a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3|\mathbf{I}, \end{aligned}$$

als der Volumeninhalt des von den Vektoren 1. Stufe aufgespannten Parallelepipeds anzusehen ist. Die Gegenzahlen werden deshalb oft als orientierte Volumina interpretiert. Wie bei der Interpretation der Vektoren 2. Stufe als orientierte Flächeninhalte muss auch hier eingewendet werden, dass diese Interpretation nicht nur von der Gegenzahl $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$, sondern auch von den Faktoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ abhängt, und insofern an der geometrischen Interpretation der Vektoren 1. Stufe 'klebt'.

Zusammenfassend können wir feststellen, dass die skalare Multiplikation der Vektorgeometrie durch Gleichung (3d), das Skalarprodukt durch Gleichung (9), das Vektorprodukt durch Gleichung (12) und das Spatprodukt durch Gleichung (13) als Teile des assoziativen geometrischen Produktes angesehen werden können. In letzerem haben wir das einheitliche Band der vier verschiedenen Multiplikationsarten der Vektorgeometrie in der Hand.

Vergleich mit Biquaternionen

Die Biquaternionen, welche Peter Gschwind in dem Buch *Der lineare Komplex — eine überimaginäre Zahl* [3] benutzt und im 3. Kapitel einführt, fallen mit der hier vorgestellten geometrischen Algebra zusammen, wenn der Operator ϵ dort so gewählt wird, dass

$$\epsilon^2 = -1$$

ist. Um beide Algebren isomorph aufeinander beziehen zu können, müssen die jeweiligen Basisglieder folgendermassen indentifiziert werden,

$$\begin{array}{llll} 1 \leftrightarrow \mathbf{1}, & i \leftrightarrow -\mathbf{E}_1, & j \leftrightarrow -\mathbf{E}_2, & k \leftrightarrow -\mathbf{E}_3, \\ \epsilon \leftrightarrow \mathbf{I}, & \epsilon i \leftrightarrow \mathbf{e}_1, & \epsilon j \leftrightarrow \mathbf{e}_2, & \epsilon k \leftrightarrow \mathbf{e}_3. \end{array}$$

Die Indentifizierung der Zahl- und Gegenzahleinheit ($\epsilon^2 = \mathbf{I}^2 = -1$) ist klar. Die Biquaternionen ϵi, ϵj, ϵk beziehungsweise i, j, k müssen mit den Basisvektoren 1. Stufe beziehungsweise 2. Stufe indentifiziert werden, da sie jeweils zu $+\mathbf{1}$ beziehungsweise $-\mathbf{1}$ quadrieren. Bei den Basisvektoren 2. Stufe wurde das Vorzeichen angepasst, damit die Multiplikationstafeln der Biquaternionen [3, S. 19] und der geometrischen Algebra exakt übereinstimmen. Somit nimmt der allgemeine Biquaternio aus Gleichung (3.1) in [3, S. 18],

$$\mathbf{a} = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k + \epsilon(a_4 + a_5 i + a_6 j + a_7 k),$$

in der geometrischen Algebra die Gestalt eines allgemeinen Multivektors an,

$$\mathbf{a} = a_0 \mathbf{1} - a_1 \mathbf{E}_1 - a_2 \mathbf{E}_2 - a_3 \mathbf{E}_3 + a_4 \mathbf{I} + a_5 \mathbf{e}_1 + a_6 \mathbf{e}_2 + a_7 \mathbf{e}_3.$$

Rein algebraisch lassen sich also beide Algebren isomorph aufeinander abbilden.[6] Die geometrische Algebra $\mathcal{G}_3$ hat aber zwei verschiedene geometri-

[6] Die Pauli Algebra der Quantenmechanik lässt sich auch isomorph auf die geometrische Algebra $\mathcal{G}_3$ abbilden, indem die Basisglieder folgendermassen aufeinander bezogen werden: $\mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{1}$, $\sigma_1 \leftrightarrow \mathbf{e}_1$, $\sigma_2 \leftrightarrow \mathbf{e}_2$, $\sigma_3 \leftrightarrow \mathbf{e}_3$, $\sigma_2\sigma_3 \leftrightarrow \mathbf{E}_1$, $\sigma_3\sigma_1 \leftrightarrow \mathbf{E}_2$, $\sigma_1\sigma_2 \leftrightarrow \mathbf{E}_3$ und $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \leftrightarrow \mathbf{I}$.

sche Interpretationen. Wenn die Multivektoren *inhomogen* aufgefasst werden, wie wir es in diesem Aufsatz getan haben, so enthält sie die *räumliche* Euklidische Geometrie. Werden die Multivektoren hingegen *homogen* interpretiert, so beschreibt dieselbe Algebra die elliptische Geometrie der *Ebene*. In [3] werden die Biquaternionen homogen interpretiert. Die Zuordnung der verschiedenen Werte von ϵ^2 zu den entsprechenden Geometrien auf S. 18 bezieht sich auf die *Quadriquaternionen* beziehungsweise die *räumliche* Geometrie mit homogenen Koordinaten. Der Zusammenhang zwischen $\epsilon^2 = -1$ und der räumlichen hyperbolischen Geometrie steht deshalb nicht im Widerspruch zu dem Bezug zwischen der homogenen Interpretation der geometrischen Algebra $\mathcal{G}_3$ und der ebenen elliptischen Geometrie. Es handelt sich um zwei verschiedene Algebren: die Quadriquaternionen und die geometrische Algebra $\mathcal{G}_3$. Erst die Unteralgebra der Biquaternionen ist isomorph zur geometrischen Algebra $\mathcal{G}_3$.

Ausblick

Mit dem geometrischen Produkt haben wir die räumliche Vektorgeometrie zu der geometrischen Algebra erweitert. Die geometrische Interpretation eines Vektors 1. Stufe als gerichtete Strecke und die Interpretation der Vektoren der Stufe 0 als Zahlen stehen auf eigenen Füssen. Die geometrische Interpretation der Vektoren 2. und 3. Stufe als orientierte Flächen- beziehungsweise Volumeninhalte hängen von den Vektoren 1. Stufe ab. Auch rein algebraisch baut die geometrische Algebra auf den Vektoren 1. Stufe auf, indem alle anderen Grössen durch fortgesetzte Multiplikation von Vektoren 1. Stufe entstehen. Vollständig aufgebaut zeigt die geometrische Algebra eine Symmetrie zwischen den höheren und den niedereren Stufen. Die Dimension des Vektorraumes aller Vektoren 1. Stufe und diejenige aller Vektoren 2. Stufe ist jeweils 3, und die Dimension der Zahlen und der Gegenzahlen ist jeweils 1. Wie es durch die Gleichungen (6) so schön sichtbar wird, stehen die linke und rechte Seite der geometrischen Algebra in dem Verhältnis eines 'positiven' Raumes zu einem 'negativen' Raum. Diese rechts-links Symmetrie der geometrischen Algebra deutet sich in dem hier beschriebenen Aufbau, der ganz von der Euklidischen Vektorgeometrie ausgegangen ist, deutlich an. Wenn man sie konsequent weiterverfolgt, kann gezeigt werden, dass die Vektoren 2. und 3. Stufe eigentlich Grössen der Polareuklidischen Geometrie [6] darstellen. Die Vektoren 2. Stufe werden in dem gegenräumlichen Aufbau als *ebenenhafte Vektoren* von der an die punkthaften Vektoren 1. Stufe gebundenen Mehrdeutigkeit befreit. Und die Gegenzahlen erscheinen als die *Zahlen* der Polareuklidischen Geometrie.

Übungen

3) a) Zeige, dass die Vektoren $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{c} = \mathbf{e}_3$ nicht komplanar sind. b) Bestimme dann die Koeffizienten der Zerlegung $\mathbf{r} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ für den Vektor $\mathbf{r} = -(\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3)$.

4) Berechne das inverse Element a) zu der Zahl 5, b) zu dem Vektor 1. Stufe $\mathbf{r} = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 9\mathbf{e}_3$, c) zu dem Vektor 2. Stufe $\mathbf{R} = 3\mathbf{E}_1 - 2\mathbf{E}_2 + 9\mathbf{E}_3$ und d) zu der Gegenzahl $5\mathbf{I}$.

5) Zerlege den Vektor $\mathbf{a} = -\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3$ bezüglich $\mathbf{b} = 2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ in rechtwinklige Komponenten.

Dank

Für die Durchsicht des Manuskriptes und Anregungen möchte ich Peter Gschwind, Bertfried Fauser, Astrid Baumann und Matthias Herrmannstorfer danken.

Literatur

[1] Conradt, O.: *The Principle of Duality in Clifford Algebra and Projective Geometry.* In: Abłamowicz, R. und B. Fauser (Herausgeber): *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, Band I, Seiten 157–193. Birkhäuser, Boston, 2000.

[2] Conradt, O.: *Die geometrische Algebra der ebenen Vektorgeometrie.* Mathematisch-Physikalische Korrespondenz, 204:3–19, 2001.

[3] Gschwind, P.: *Der lineare Komplex — eine überimaginäre Zahl.* Verlag am Goetheanum, Dornach, Schweiz, 2. Auflage, 1991.

[4] Hestenes, D.: *New Foundations for Classical Mechanics.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2. Auflage, 1999.

[5] Lasenby, J., A. N. Lasenby und C. J. L. Doran: *A unified mathematical language for physics and engineering in the 21st century.* Phil. Trans. R. Soc. Lond., A(358):21–39, 2000.

[6] Locher, L.: *Projektive Geometrie. Und die Grundlagen der Euklidischen und Polareuklidischen Geometrie.* Verlag am Goetheanum, Dornach, Schweiz, 2. Auflage, 1980.

Lösungen

1) Quadrat eines Vektors 2. Stufe:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^2 &= (X\mathbf{E}_1 + Y\mathbf{E}_2 + Z\mathbf{E}_3)^2 \\
&= X^2\mathbf{E}_1^2 + Y^2\mathbf{E}_2^2 + Z^2\mathbf{E}_1^3 + \\
&+ XY(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1) + YZ(\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2) + ZX(\mathbf{E}_3\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1\mathbf{E}_3) \\
&= -X^2 - Y^2 - Z^2 + \\
&+ XY(-\mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_3) + YZ(-\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1) + ZX(-\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2) \\
&= -(X^2 + Y^2 + Z^2)
\end{aligned}$$

2) Multiplikationstafel für das geometrische Produkt:

	$\mathbf{1}$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{E}_1$	$\mathbf{E}_2$	$\mathbf{E}_3$	$\mathbf{I}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{E}_1$	$\mathbf{E}_2$	$\mathbf{E}_3$	$\mathbf{I}$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{E}_3$	$-\mathbf{E}_2$	$\mathbf{I}$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{E}_1$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{E}_3$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{E}_1$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{I}$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{E}_2$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{E}_2$	$-\mathbf{E}_1$	$\mathbf{1}$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{E}_3$
$\mathbf{E}_1$	$\mathbf{E}_1$	$\mathbf{I}$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{1}$	$-\mathbf{E}_3$	$\mathbf{E}_2$	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{E}_2$	$\mathbf{E}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{I}$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{E}_3$	$-\mathbf{1}$	$-\mathbf{E}_1$	$-\mathbf{e}_2$
$\mathbf{E}_3$	$\mathbf{E}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{I}$	$-\mathbf{E}_2$	$\mathbf{E}_1$	$-\mathbf{1}$	$-\mathbf{e}_3$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{E}_1$	$\mathbf{E}_2$	$\mathbf{E}_3$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{1}$

3) a) $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = -\mathbf{I}$;
b) $\alpha = \frac{\mathbf{r}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}}{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}} = \frac{-2\mathbf{I}}{-\mathbf{I}} = 2$, $\beta = \frac{\mathbf{r}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{a}}{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}} = \frac{-3\mathbf{I}}{-\mathbf{I}} = 3$, $\gamma = \frac{\mathbf{r}\wedge\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}}{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}} = \frac{5\mathbf{I}}{-\mathbf{I}} = -5$.

4) a) $5^{-1} = \frac{1}{5}$, b) $\mathbf{r}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}^2} = \frac{3}{94}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{47}\mathbf{e}_2 + \frac{9}{94}\mathbf{e}_3$,
c) $\mathbf{R}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R}^2} = -\frac{3}{94}\mathbf{E}_1 + \frac{1}{47}\mathbf{E}_2 - \frac{9}{94}\mathbf{E}_3$, d) $(5\mathbf{I})^{-1} = \frac{1}{5\mathbf{I}} = -\frac{1}{5}\mathbf{I}$.

5) $\mathbf{a}_{||} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{b}^{-1} = \frac{8}{3}(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)$, $\mathbf{a}_{\perp} = (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\mathbf{b}^{-1} = -\frac{11}{3}\mathbf{e}_1+\frac{1}{3}\mathbf{e}_2+\frac{10}{3}\mathbf{e}_3$.