Sein, Nichts und Werden in der projektiven Geometrie*

Oliver Conradt

Lou de Boer hat in seinem Beitrag *Das Nichts in der projektiven Geometrie* [1] die Frage aufgeworfen, ob das Nichts des Raumes vom Gesichtspunkt des Gegenraumes nicht eine ähnliche Rolle spiele wie der Raum im Physischen. Diese durch das universelle Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie nahegelegte Idee möchte ich in diesem Beitrag konkretisieren.

Die projektive Geometrie kann synthetisch oder algebraisch aufgebaut werden[1]. Eine Axiomatik für den synthetischen Aufbau findet sich in den Büchern von Louis Locher. Der algebraische Aufbau führt auf die äussere Algebra oder Clifford Algebra. Das äussere Produkt $\wedge$ der Clifford Algebra und sein dual entsprechendes äusseres Produkt $\vee$ stehen für die synthetischen Operationen des Verbindens und Schneidens. Die Eigenschaften der ersteren können zu einem konturierteren Verständnis der beiden anschaulichen Operationen führen. Ohne auf die beiden äusseren Produkte einzugehen, möchte ich auf synthetische Weise schildern, was die Operationen des Verbindens und Schneidens im Raum alles umfassen und was nicht in ihr Gebiet gehört.

Wir gehen von den drei verschiedenen Elementen des Raumes: Punkte, Geraden, Ebenen aus und beachten, dass es zwei zueinander polare Gesichtsweisen gibt, die Gesamtheit des Raumes zu betrachten: den Punktraum (Menge aller Punkte im Raum) und den Ebenenraum (Menge aller Ebenen im Raum).

Die Operation des Verbindens ist auf dem Hintergrund des Punktraumes zu sehen. Zwei einander nicht angehörende Punkte A und B bestimmen eine Verbindungsgerade C, die vor dem Hintergrund des Punktraumes als Punktreihe erscheint. Ein Punkt A und eine Gerade B, die einander nicht angehören, bestimmen eine Verbindungsebene C. Diese Ebene wird als Punktfeld *genau einmal* aufgespannt, wenn jeder Punkt der Geraden B einzeln mit dem Punkt A verbunden wird und alle Verbindungsgeraden als

*Erschienen in *Mathematisch-Physikalische Korrespondenz*, Nr. 210, S. 25-30, 2002.

[1] Lou de Boer nennt den analytischen Aufbau als dritte Möglichkeit. Ich würde diesen als einen echten Teil des algebraischen Aufbaues ansehen wollen.

A	$+$	B	$\longrightarrow$	$C = A \wedge B$
Punkt	$+$	Punkt	$\longrightarrow$	Gerade
Punkt	$+$	Gerade	$\longrightarrow$	Ebene
Punkt	$+$	Ebene	$\longrightarrow$	Punktraum
Gerade	$+$	Gerade	$\longrightarrow$	Punktraum
Gerade	$+$	Ebene		nicht möglich
Ebene	$+$	Ebene		nicht möglich

Tabelle 1: Übersicht zur Operation des Verbindens. Die Ausgangselemente A und B werden als einander nicht angehörig vorausgesetzt.

Punktreihen angesehen werden. Ein Punkt A und eine Ebene B, die einander nicht angehören, bestimmen den ganzen Punktraum C als Verbindung. Diese eher ungewöhnliche Überlegung rechtfertigt sich, wenn man bedenkt, dass die Menge aller Punkte der Ebene B verbunden mit dem Punkt A ein Strahlenbündel bestimmt, das, wenn alle Strahlen als Punktreihen aufgefasst werden, den ganzen Punktraum *genau einmal* aufspannt. Zwei einander nicht angehörende Geraden, das heisst, zwei windschiefe Geraden A und B bestimmen den Punktraum C als Verbindung. Wenn nämlich jeder Punkt der Geraden A mit jeweils jedem Punkt der Geraden B verbunden wird und alle Verbindungsgeraden als Punktreihen angesehen werden, wird der ganze Punktraum von dem entstehenden Strahlengebilde *genau einmal* aufgespannt. In den vier beschriebenen Fällen, wo das Verbinden möglich ist, gehören die Ausgangselemente A und B einander *nicht* an. Zwei einander angehörenden, nicht identischen Geraden, das heisst, zwei sich treffenden Geraden A und B gehört eine Ebene an, die gewöhnlicherweise als *Verbindungs*ebene angesehen wird. Wir wollen dies (im Raum) *nicht* tun, weil erstens die beiden Ausgangsgeraden einander angehören und zweitens die Ebene als Punktebene nicht nur einmal aufgespannt wird, wenn jeder Punkt der Geraden A mit jeweils jedem Punkt der Geraden B verbunden wird. Auch eine Gerade A und eine Ebene B, die einander nicht angehören, lassen sich nicht verbinden, etwa zum Punktraum, in welchem beide liegen, da die Punktreihen, die entstehen, wenn man alle Punkte der Geraden A mit jeweils allen Punkten der Ebene B verbindet, den Punktraum nicht nur einmal, sondern unendlich oft überdecken. Für zwei einander nicht angehörende Ebenen gilt ein ähnliches Argument.

Zwei Elemente A und B lassen sich also nur verbinden, wenn sie einander nicht angehören. Zwei Punkte ergeben eine Verbindungsgerade; Punkt und Gerade eine Verbindungsebene; Punkt und Ebene den gesamten Punktraum als Verbindung. Zwei windschiefe Geraden lassen sich zum Punktraum

A	$+$	B	$\longrightarrow$	$C = A \vee B$
Ebene	+	Ebene	$\longrightarrow$	Gerade
Ebene	+	Gerade	$\longrightarrow$	Punkt
Ebene	+	Punkt	$\longrightarrow$	Ebenenraum
Gerade	+	Gerade	$\longrightarrow$	Ebenenraum
Gerade	+	Punkt		nicht möglich
Punkt	+	Punkt		nicht möglich

Tabelle 2: Übersicht zur Operation des Schneidens. Die Ausgangselemente A und B werden als einander nicht angehörig vorausgesetzt.

verbinden; zwei sich treffende Geraden besitzen kein verbindendes Element. Und Gerade und Ebene oder zwei Ebenen können nicht verbunden werden. (Tabelle 1)

Die Operation des Schneidens ist auf dem Hintergrund des Ebenenraumes zu sehen. Zwei einander nicht angehörende Ebenen A und B bestimmen eine Schnittgerade C, die vor dem Hintergrund des Ebenenraumes als Ebenenbüschel erscheint. Eine Ebene A und eine Gerade B, die einander nicht angehören, bestimmen einen Schnittpunkt C. Dieser Punkt wird als Ebenenbündel *genau einmal* aufgefächert, wenn jede Ebene der Geraden B einzeln mit der Ebene A geschnitten wird und alle Schnittgeraden als Ebenenbüschel angesehen werden. Eine Ebene A und ein Punkt B, die einander nicht angehören, bestimmen den ganzen Ebenenraum C als Schnitt. Diese eher ungewöhnliche Überlegung rechtfertigt sich, wenn man bedenkt, dass die Menge aller Ebenen des Punktes B geschnitten mit der Ebene A ein Strahlenfeld bestimmt, das, wenn alle Strahlen als Ebenenbüschel aufgefasst werden, den ganzen Ebenenraum *genau einmal* auffächert. Zwei einander nicht angehörende Geraden, das heisst, zwei windschiefe Geraden A und B bestimmen den Ebenenraum C als Schnitt. Wenn nämlich jede Ebene der Geraden A mit jeweils jeder Ebene der Geraden B geschnitten wird und alle Schnittgeraden als Ebenenbüschel angesehen werden, wird der ganze Ebenenraum von dem entstehenden Strahlengebilde *genau einmal* aufgefächert. In den vier beschriebenen Fällen, wo das Schneiden möglich ist, gehören die Ausgangselemente A und B einander *nicht* an. Zwei einander angehörenden, nicht identischen Geraden, das heisst, zwei sich treffenden Geraden A und B gehört ein Punkt an, der gewöhnlicherweise als *Schnitt*punkt angesehen wird. Wir wollen dies (im Raum) *nicht* tun, weil erstens die beiden Ausgangsgeraden einander angehören und zweitens der Punkt als Ebenenbüschel nicht nur einmal aufgefächert wird, wenn jede Ebene der Geraden A mit jeweils jeder Ebene der Geraden B geschnitten wird. Auch eine Gerade A und ein Punkt B, die einander nicht angehören, lassen sich nicht schneiden, etwa zum Ebenenraum, durch welchen beide gehen, da die Ebenenbüschel, die entstehen, wenn man alle Ebenen der Geraden A mit jeweils allen Ebenen des Punktes B schneidet, den Ebenenraum nicht nur einmal, sondern unendlich oft überdecken. Für zwei einander nicht angehörende Punkte gilt ein ähnliches Argument.

Zwei Elemente A und B lassen sich also nur schneiden, wenn sie einander nicht angehören. Zwei Ebenen ergeben eine Schnittgerade; Ebene und Gerade einen Schnittpunkt; Ebene und Punkt den gesamten Ebenenraum als Schnitt. Zwei windschiefe Geraden schneiden sich im Ebenenraum; zwei sich treffende Geraden besitzen kein Schnittelement. Und Gerade und Punkt oder zwei Punkte können nicht geschnitten werden. (Tabelle 2)

Dieser Überblick zu den Operationen des Schneidens und Verbindens erweitert die Gesamtheit der betrachteten Elemente, zu welcher gewöhnlich nur die Punkte, Geraden und Ebenen des Raumes gezählt werden, um den Punktraum und den Ebenenraum. Wird die Operation des Verbindens zu Ende gedacht, so fordert sie den Punktraum als eigenständiges Element. Entsprechend fordert die Operation des Schneidens den Ebenenraum als eigenständiges Element.

Verbinden		Punkt	Gerade	Ebene	Punktraum
Schneiden	Ebenenraum	Punkt	Gerade	Ebene	

Innerhalb der Operation des Verbindens taucht der ganze Raum nicht als Gesamtheit aller Ebenen auf. Diese Form des Raumes geht kein Verhältnis zur Operation des Verbindens ein. Die Beziehung von Verbinden und Ebenenraum besteht gerade darin, dass sie beziehungslos sind. Insofern stellt der Ebenenraum das *Nichts* für das Verbinden dar. Ebenso beziehungslos beziehen sich die Operation des Schneidens und der Punktraum aufeinander. Letzterer ist das Nichts für die erstere.

Beim Verbinden wird davon ausgegangen, dass Punkte etwas sind, dass sie Seinscharakter besitzten. In dem neuen Element Punktraum steht dieses Sein, der Punkt, in seiner reinsten Form vor unserer Anschauung und unserem Denken. Das Punktsein wird im Punktraum durch nichts Andersartiges gestört; es tritt im Punktraum als reines *Sein* auf. Ebenso rein stellt der Ebenenraum das Ebenenhafte beim Schneiden dar. Für die Operation des Schneidens ist der Ebenenraum das durch nichts Fremdartiges gestörte Sein.

Nun komme ich zu der eingangs erwähnten Frage. Die Begriffe Raum und Gegenraum sind sowohl einander entgegengesetzt als auch gleichartiger Natur. Beim Raum bilden die Operation des Verbindens und die Punkte als elementare Gebilde (erster Stufe) die Ausgangspunkte. Der Ebenenraum als Element stellt von der Gesichtsweise des Raumes ein Element der Stufe null oder das Nichts, die Gerade ein Element zweiter Stufe, die Ebene ein Element dritter Stufe und der Punktraum als Element ein Gebilde vierter Stufe oder das Sein dar. Beim Gegenraum stehen die Operation des Schneidens und die Ebenen als elementare Gebilde (erster Stufe) im Vordergrund. Der Punktraum als Element stellt von der Gesichtsweise des Gegenraumes ein Element der Stufe null oder das Nichts, die Gerade ein Element zweiter Stufe, der Punkt ein Element dritter Stufe und der Ebenenraum als Element ein Gebilde vierter Stufe oder das Sein dar.

Raum	Stufe 0	Stufe 1	Stufe 2	Stufe 3	Stufe 4
	Nichts Ebenenraum Sein	Punkt	Gerade	Ebene	Sein Punktraum Nichts
Gegenraum	Stufe 4	Stufe 3	Stufe 2	Stufe 1	Stufe 0

Das Prinzip von Raum und Gegenraum ist erst unvollständig erkannt, wenn darin nur die Dualität, dass jeder geometrische Sachverhalt in *zwei* zueinander polaren Erscheinungsformen auftreten kann, gesehen wird. In Wahrheit sind die beiden polaren Sachverhalte *sowohl* zu unterscheiden *als auch* zu identifizieren. Zu der Zweiheit tritt als sinnstiftendes Drittes das Verhältnis zwischen Raum und Gegenraum, das Verwandeln des einen in das andere, das *Werden*.

Wir finden im Räumlichen zwei Arten des Werdens, das die beiden Pole von Sein (Punktraum, Ebenenraum) und Nichts (Ebenenraum, Punktraum) ineinander überführt und unterscheidet. Das *intensive* Werden lebt von der Änderung der Gesichtsweise: Der Ebenenraum, das Sein des Gegenraumes wird im Raume zum Nichts. Entsprechend wird der Punkt bei dieser Änderung der Gesichtsweise von einem Element dritter Stufe zu einem Element erster Stufe, die Gerade behält ihre Stufe bei, die Ebene wird von einem Element erster Stufe zu einem Element dritter Stufe und der Punktraum wird vom Nichts zum Sein. Das *extensive* Werden äussert sich durch die Operationen des Verbindens und Schneidens bei jeweils festgehaltener Gesichtsweise. Raum: Innerhalb des Nichts können einzelne Punkte hervorgehoben werden; zwei Punkte werden zur Verbindungsgerade, eine Gerade mit einem weiteren Punkt zur Verbindungsebene und eine Ebene mit einem weiteren Punkt zum Punktraum verbunden. So wird aus dem Nichts des Ebenenraumes der extensive Punktraum. Gegenraum: Innerhalb des Nichts können einzelne Ebenen hervorgehoben werden; zwei Ebenen werden zur Schnittgerade, eine Gerade mit einer weiteren Ebene zum Schnittpunkt und ein

Punkt mit einer weiteren Ebene zum Ebenenraum geschnitten. So wird aus dem Nichts des Punktraumes der extensive Ebenenraum.

Das Räumliche offenbart sein Wesen in einer dreifaltigen Gedankenbewegung: 1. gewordenes Sein und gewordenes Nichts; 2. Sein ist Nichts und Nichts ist Sein; 3. Sein wird zu Nichts und Nichts wird zu Sein.

Georg Wilhelm Friedrich Hegel stellt an den Beginn seiner *Wissenschaft der Logik* eine solche dreifaltige Gedankenbewegung [2, S. 82f]. Zuerst wird entwickelt, wie das reine Sein in der Tat ein Nichts sei und wie das Nichts dasselbe sei, was das reine Sein ist. Dieses identifizierbare Unterschiedene bzw. unterscheidbare Gleiche von Sein und Nichts offenbart die Bewegung des Werdens: „*Das reine Sein und das reine Nichts ist also dasselbe.* Was die Wahrheit ist, ist weder das Sein noch das Nichts, sondern dass das Sein in Nichts und das Nichts in Sein – nicht übergeht, sondern übergegangen ist. Aber ebensosehr ist die Wahrheit nicht ihre Ununterschiedenheit, sondern dass *sie nicht dasselbe*, dass sie *absolut unterschieden*, aber ebenso ungetrennt und untrennbar sind und unmittelbar *jedes in seinem Gegenteil verschwindet.* Ihre Wahrheit ist also diese *Bewegung* des unmittelbaren Verschwindens des einen in dem anderen: *das Werden*; eine Bewegung, worin beide unterschieden sind, aber durch einen Unterschied, der sich ebenso unmittelbar aufgelöst hat."

Diese sich entwickelnde, dreifaltige Gedankenbewegung tritt in verschiedenen Erscheinungsformen zu Beginn des 19. Jahrhunderts in den Seelen einzelner Menschen auf. Hegels Vorrede zur ersten Ausgabe der Wissenschaft der Logik ist mit dem 22. März 1812 datiert. Die Entdeckung des projektiven Dualitätsprinzipes geht auf die französischen Mathematiker Victor Poncelet und Joseph-Diaz Gergonne im ersten Viertel des 19. Jahrhunderts zurück.

Literatur

[1] Boer, L. de: *Das Nichts in der projektiven Geometrie.* Mathematisch-Physikalische Korrespondenz, 207:34–36, 2001.

[2] Hegel, G. W. F.: *Wissenschaft der Logik I.* Suhrkamp, Frankfurt am Main, 1986.

Uwe Hansen und Matthias Herrmannstorfer sei an dieser Stelle für die Durchsicht des Manuskriptes gedankt.