Äquivalente Photonenspektren

und ihre Anwendung in der

elektromagnetischen Müonenpaarproduktion in peripheren pp-Kollisionen

Diplomarbeit von Oliver Conradt
ausgeführt unter der Anleitung von Prof. Dr. D. Trautmann,
Prof. Dr. G. Baur und Dr. K. Hencken

September 1996

Vorwort

An erster Stelle sei all denjenigen gedankt, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Besonders möchte ich Professor G. Baur erwähnen, der in regelmässigen Abständen mir immer wieder wertvolle Anregungen gegeben hat und in langen Diskussionen auf jede Frage eingegangen ist. Aber auch Professor D. Trautmann und Kai Hencken sei für die Unterstützung gedankt. Die Überlegungen im Kapitel 6 wären wohl ohne die Hilfe von Kai Hencken nicht zustande gekommen. Während der Vorbereitung habe ich mich intensiv mit der Doktorarbeit von N. Baron [Ba] auseinandergesetzt. Insofern hat auch er zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.
Den MitstudentInnen im Diplomandenzimmer, A. Alscher, F. Brachwitz, T. Bütikofer, D. Kahlina und P. Stöckli sei für die anregenden Diskussionen und die gute Zusammenarbeit herzlich gedankt.

Basel, den 10. September 1996

Oliver Conradt

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

1.1 Problemstellung

Es ist vorgeschlagen worden [Ba96], an dem neu entwickelten, relativistischen Beschleuniger für schwere Ionen am CERN (Large Hadron Collider, LHC) die Müonenpaarproduktion als Monitor für die Luminosität in pp- und AA-Kollisionen zu verwenden. Bei peripheren Stössen der Protonen spielt die starke Wechselwirkung zwischen Projektil und Target keine Rolle; die Müonenpaarproduktion läuft dann hauptsächlich über den $\gamma\gamma$-Mechanismus ab. Der Beitrag der Bremsstrahlung zur Müonenpaarproduktion ist sehr klein. Siehe [Me96]. Es ist deshalb zur Zeit von allgemeinem Interesse, die Müonenpaarproduktion über die $\gamma\gamma$-Fusion in pp-Kollisionen

$$p + p \quad \rightarrow \quad p + p + \mu^+ + \mu^- \tag{1.1}$$

genau zu studieren.
Wir gehen diese Problemstellung mit Hilfe der Methode der äquivalenten Photonen-Approximation an und untersuchen den Einfluss verschiedenartig hergeleiteter Photonenspektren des Protons auf die Produktion der Müonenpaare. Bis und mit Kapitel 5 besteht die Annahme, dass es sich bei den pp-Kollisionen um elastische Streuung der Protonen handelt. Um zukünftig die Luminosität in pp-Kollisionen genau bestimmen zu können, müssen auch die Beiträge von Nukleonresonanzen - insbesondere auch der Δ-Resonanz - zur Müonenpaarproduktion hinzugerechnet werden. In Kapitel 6 schätzen wir das Photonenspektrum für den $p\Delta$-Übergang ab.

1.2 Einheiten und Konstanten

Elektrostatische Einheiten werden im Kapitel 2, die natürlichen Einheiten mit

$$\hbar = c = 1$$

von Kapitel 3 an verwendet.
Bei den Wirkungsquerschnitten gehen ein:

$$1\text{GeV}^{-2} = 0.389\text{mb},$$

die Masse der Müonen

$$m_\mu = 0.105658389 \pm 0.000000034 \text{ GeV}$$

und Protonen

$$m_p = 0.93827231 \pm 0.00000028 \text{ GeV}$$

sowie die Feinstrukturkonstante

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \cong \frac{1}{137.04}. \tag{1.2}$$

Als metrischen Tensor verwenden wir

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Weitere, allgemein bekannte Beziehungen innerhalb der Quantenelektrodynamik sind in jedem Theoriebuch aufgeführt. Siehe z.B. [Pe95].

Kapitel 2

Methode der äquivalenten Photonen-Approximation

Die Methode der äquivalenten Photonen wurde 1934 von C. F. von Weizsäcker [We34] und E. J. Williams [Wi34] unabhängig voneinander entwickelt. Beide bedanken sich allerdings in den oben genannten Veröffentlichungen bei Niels Bohr für die Gespräche, die jeweils die Arbeit befruchtet haben. Bereits 1924 hatte E. Fermi [Fe24] die gleiche Idee benutzt zur Berechnung

1. der Anregung der Quecksilberlinie 2537 Å,
2. der Anzahl der pro Zentimeterweg in Heliumgas von α-Teilchen erzeugten Ionenpaare und
3. der Reichweite der α-Teilchen in Helium.

Die Anwendbarkeit seiner Idee konnte er anhand dieser Beispiele experimentell verifizieren.
Die Methode der äquivalenten Photonen beruht auf der Ähnlichkeit zwischen den Feldern einer mit relativistischer Geschwindigkeit sich bewegenden Ladung und denen eines kurzen Strahlungsimpulses. Bei peripheren Stössen, die dadurch charakterisiert sind, dass nur die elektromagnetische Wechselwirkung in Betracht zu ziehen ist, lässt sich deshalb die Wirkung des Projektils A_1 auf das Target A_2 durch die Wirkung des äquivalenten Strahlungsimpulses auf dasselbe Target A_2 ersetzen (Abbildung 2.1). Bremsstrahlungsprozesse, bei denen die äquivalenten Photonen des Kern-Coulombfeldes am Elektron gestreut werden, und Stossionisation [Ja75] sowie z.B. die Elektron-Positron-Produktion durch ein Photon des äquivalenten Strahlungsimpulses im Feld des Targetkernes [As93] lassen sich so berechnen. Für die differentiellen Wirkungsquerschnitte dieser photoinduzierten Prozesse gilt:

$$d\sigma_{A_1A_2\to XA_1'} = \int \frac{d\omega}{\omega} n_{A_1}(\omega) d\sigma_{\gamma A_2\to X} \tag{2.1}$$

wobei $n_{A_1}(\omega)$ das äquivalente Photonenspektrum des Projektils und $d\sigma_{\gamma A_2\to X}$ der Wirkungsquerschnitt für den Einphotonprozess ist. Andererseits können auch, wie in unserem Falle, $\gamma\gamma$-Prozesse studiert werden (Abbildung 2.1). Dabei sind die Felder beider aufeinandertreffender Kerne durch Spektren reeller Photonen beschrieben. Der $\gamma\gamma$-Prozess kann dann isoliert betrachtet werden. Wenn $n_{A_i}(\omega_i)$ das Photonenspektrum des Kerns A_i ($i = 1, 2$) beschreibt, kann der differentielle Gesamtwirkungsquerschnitt folgendermassen geschrieben werden:

$$d\sigma_{A_1A_2\to XA_1'A_2'} = \int \frac{d\omega_1}{\omega_1}\frac{d\omega_2}{\omega_2} n_{A_1}(\omega_1) n_{A_2}(\omega_2) d\sigma_{\gamma\gamma\to X} \tag{2.2}$$

Abbildung 2.1: Feynman-Diagramm (a) des photoinduzierten Prozesses und (b) des $\gamma\gamma$-Prozesses. A_1 und A_2 sind geladene Kerne.

In diesem Kapitel wollen wir die Gleichungen (2.1) und (2.2) aus der relativistischen Elektrodynamik sowie einigen quantenmechanischen Konzepten ableiten. Auf dem Wege dorthin wird sich ein erster Ausdruck für das Photonenspektrum $n(\omega)$ eines Teilchens mit der Ladung Ze ($e = -|e|$ für Elektronen) ergeben. Im letzten Abschnitt wird auf Resultate verwiesen, die im Rahmen der semiklassischen Methode abgeleitet wurden.

2.1 Photoinduzierte Prozesse

Ein Projektil A_1 mit der Ladung Ze und dem Lorentzfaktor $\gamma \gg 1$, wobei

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

ist, fliegt zur Zeit $t = 0$ am Target A_2 vorbei. Die Flugrichtung ist parallel zur z-Achse gerichtet und der Abstand zum Ursprung des Koordinatensystems, in welchem der Schwerpunkt des Targets ruht, durch den Stossparameter $\vec{b}$ gegeben (Abbildung 2.2).

Nach den obigen Ausführungen interessiert uns die elektromagnetische Wirkung, d.h. das Feld des Projektils am Ort des Targets. Es ergibt sich durch eine einfache Lorentz-transformation.

$$\left.\begin{array}{rcl} E_x(t) & = & \frac{\gamma Zeb}{(b^2+\gamma^2v^2t^2)^{\frac{3}{2}}} \\[2ex] E_y(t) & = & 0 \\[2ex] E_z(t) & = & -\frac{\gamma Zevt}{(b^2+\gamma^2v^2t^2)^{\frac{3}{2}}} \end{array}\right\} \tag{2.4}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} B_x(t) & = & 0 \\[2ex] B_y(t) & = & \beta E_x(t) \\[2ex] B_z(t) & = & 0 \end{array}\right\} \tag{2.5}$$

Abbildung 2.2: (a) geladenes Projektil A_1, das das Target A_2 mit relativistischer Geschwindigkeit im Abstand b passiert und (b) die zum Projektil A_1 äquivalenten Strahlungsimpulse P_z und P_x.

Wie aus Abbildung 2.3a ersichtlich ist, wirken für eine Zeit in der Grössenordnung

$$\Delta t = 2(\sqrt[3]{4} - 1)\frac{b}{\gamma v} \cong \frac{b}{\gamma v} \tag{2.6}$$

ein hohes elektrisches Feld in x- und ein um den Faktor β verkleinertes magnetisches Feld in y-Richtung. Die Maxima der Felder steigen mit γ linear an, während ihre Wirkungsdauer mit dem Reziproken von γ abnimmt. Für $\beta \simeq 1$ sind $E_x(t)$ und $B_y(t)$ äquivalent zu einem in der Einfallsebene polarisierten Strahlungsimpuls P_z.
Das longitudinale elektrische Feld $E_z(t)$ ändert innerhalb der Zeit

$$\Delta t = \sqrt{2}\frac{b}{\gamma v} \simeq \frac{b}{\gamma v} \tag{2.7}$$

von der positiven Maximal- zur negativen Minimalfeldstärke. Siehe Abbildung 2.3b. Das Zeitintegral ist null und damit die zeitlich mittlere Änderung des Potentials von A_2 in dem Feld $E_z(t)$. Diese Eigenschaft bedeutet, dass im ultrarelativistischen Grenzfall die Wirkung von $E_z(t)$ auf das Target zu vernachlässigen ist. - Trotzdem wollen wir an $E_z(t)$ festhalten und ein Magnetfeld

$$\tilde{B}_y(t) = \beta E_z(t) \tag{2.8}$$

einführen, das mit $E_z(t)$ zusammen einen polarisierten Strahlungsimpuls P_x bildet. Das hinzugefügte Magnetfeld ändert das physikalische Problem kaum, da das Target in den meisten Fällen hauptsächlich auf elektrische Kräfte reagiert.
Damit haben wir die Felder des Projektils durch zwei zueinander senkrecht stehende, polarisierte Strahlungsimpulse P_z und P_x ersetzt (Abbildung 2.2b), ohne die Wirkung auf das Target (wesentlich) zu ändern. Diese Analogie erlaubt es, den auf das Target einfallenden Energiebetrag pro Flächeneinheit F in einfacher Weise zu berechnen. Die pro Flächen- und Zeiteinheit auf das Target auftreffende Energie eines der beiden Strahlungsimpulse ist durch den Poynting'schen Vektor

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B} \tag{2.9}$$

gegeben. Einsetzen der Gleichungen (2.5) für P_z und (2.8) für P_x führt zu

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left|E(t)\right|^2 \vec{n}_i \qquad (i = z, x) \tag{2.10}$$

Abbildung 2.3: Graphische Darstellung der Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes, die das Projektil A_1 am Ort des Targets A_2 verursacht. In (a) sind die Komponenten E_x und B_y aufgetragen, die zum Strahlungsimpuls P_z zusammengefasst werden können. (b) zeigt E_z.

mit dem Einheitsvektor $\vec{n}$ in z- bzw. x-Richtung. F ergibt sich durch Integration über die Zeit

$$\begin{aligned} F &= \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{S}| dt \\ &= \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E(t)|^2 dt. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Uns interessiert die Verteilung der Energie von F auf einzelne Photonen der Energie $\hbar\omega$, da wir erst dadurch die Wirkung des Projektils durch die Wirkung einzelner Photonen aus dem äquivalenten Feld des Projektils ersetzen können. Die spektrale Zerlegung über die Fouriertransformierte von $E(t)$

$$E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \exp{(i\omega t)} dt \tag{2.12}$$

mit der Inversen

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) \exp{(-i\omega t)} d\omega \tag{2.13}$$

helfen hier weiter. Der Energiebetrag pro Flächeneinheit (2.11) lässt sich damit in der Form

$$F = \frac{c}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' E(\omega') E(\omega) \exp{\left[i(\omega' - \omega)t\right]} \tag{2.14}$$

schreiben. Vertauscht man die Reihenfolge der Integrationen, so sieht man, dass das Zeitintegral nichts anderes als die Fourierdarstellung der Delta-Funktion $\delta(\omega' - \omega)$ ist.

Es folgt für die Strahlungsenergie pro Flächeneinheit

$$F = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega \tag{2.15}$$

Da nur positive Frequenzen eine physikalische Bedeutung haben, wählen wir als untere Integrationsgrenze die Null. Die Beziehung

$$F = \int_0^{\infty} \frac{dI}{d\omega}(\omega, b) d\omega \tag{2.16}$$

definiert dann das sogenannte Intensitätsspektrum, das die in das Frequenzintervall $d\omega$ abgestrahlte Energie pro Flächeneinheit beschreibt.

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\omega}(\omega, b) &= \frac{c}{4\pi} \left[|E(\omega)|^2 + |E(-\omega)|^2 \right] \\ &= \frac{c}{2\pi} |E(\omega)|^2 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Gleichung (2.17) fächert sich für die Strahlungsimpulse P_z und P_x auf zu

$$\frac{dI_z}{d\omega}(\omega, b) = \frac{c}{2\pi} |E_x(\omega)|^2 \tag{2.18}$$

$$\frac{dI_x}{d\omega}(\omega, b) = \frac{c}{2\pi} |E_z(\omega)|^2. \tag{2.19}$$

Einsetzen von (2.4) und (2.12) ergibt die Fourierintegrale

$$\frac{dI_z}{d\omega}(\omega, b) = \frac{c}{2\pi} \left| \frac{\gamma Z e b}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp{(i\omega t)}}{(\sqrt{b^2 + \gamma^2 v^2 t^2})^3} dt \right|^2 \tag{2.20}$$

$$\frac{dI_x}{d\omega}(\omega, b) = \frac{c}{2\pi} \left| - \frac{\gamma Z e v}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t \exp{(i\omega t)}}{(\sqrt{b^2 + \gamma^2 v^2 t^2})^3} dt \right|^2. \tag{2.21}$$

Nach Übergang zu der Integrationsvariablen $x = \frac{\gamma v t}{b}$ lässt sich hierfür auch

$$\frac{dI_z}{d\omega}(\omega, b) = \frac{c}{2\pi} \left| \left(\frac{Ze}{bv} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \left[i(\frac{\omega b}{\gamma v})x \right]}{(\sqrt{1 + x^2})^3} dx \right|^2 \tag{2.22}$$

$$\frac{dI_x}{d\omega}(\omega, b) = \frac{c}{2\pi} \left| - \left(\frac{Ze}{\gamma b v} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \exp \left[i(\frac{\omega b}{\gamma v})x \right]}{(\sqrt{1 + x^2})^3} dx \right|^2 \tag{2.23}$$

schreiben. Aus einer Tafel über Fouriertransformierte [Gr65] liest man ab, dass die Integrale proportional zu modifizierten Bessel-Funktionen K_1 und K_0 von erster bzw. nullter Ordnung sind. Die Bessel-Funktionen sind im Anhang A angegeben.

$$\frac{dI_z}{d\omega}(\omega, b) = \left(\frac{Ze}{\pi \beta b} \right)^2 \frac{1}{c} \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right)^2 K_1^2 \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right) \tag{2.24}$$

$$\frac{dI_x}{d\omega}(\omega, b) = \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{Ze}{\pi \beta b} \right)^2 \frac{1}{c} \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right)^2 K_o^2 \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right) \tag{2.25}$$

Abbildung 2.4: Darstellung der Intensitätsspektren I_z und I_x der beiden äquivalenten Strahlungsimpulse P_z und P_x. Wegen dem Faktor γ^{-2} kann I_x gegenüber I_z für genügend grosse γ's vernachlässigt werden.

Die Intensität des Strahlungsimpulses P_x enthält den Faktor γ^{-2} und ist - wie oben bereits angedeutet - für ultrarelativistische Teilchen ohne Bedeutung.
Die Form dieser Spektren ist in Abbildung 2.4 dargestellt. Sie ist leicht zu verstehen, wenn man sich daran erinnert, dass die Felder des Strahlungsimpulses P_z bezüglich der Zeit eine Glockenkurve der Breite $\Delta t \cong \frac{b}{\gamma v}$ bilden. Das Spektrum enthält daher alle Frequenzen bis zu einem Maximum in der Grössenordnung $\omega_{max} \simeq \frac{1}{\Delta t}$ und damit auch Photonen aller Energien, die kleiner als die sogenannte adiabatische Abschneideenergie

$$E_\gamma^{max} = \gamma \frac{\hbar c}{b} \tag{2.26}$$

sind. Entsprechend kann in einem photoinduzierten Prozess maximal die Energie E_γ^{max} an das Target übergeben werden.
Die Felder des Strahlungsimpulses P_x erstrecken sich über nahezu eine Periode einer Sinuswelle der Frequenz $\omega \sim \frac{\gamma v}{b}$. Das Spektrum enthält somit nur einen schmalen Frequenzbereich, der sich um $\frac{\gamma v}{b}$ konzentriert.

Die Anzahl der äquivalenten Photonen $N(\omega, b)$ im Energieintervall $d(\hbar\omega)$ erhält man aus dem Intensitätsspektrum über die Beziehung

$$\frac{dI}{d\omega}(\omega, b) d\omega = N(\omega, b) d(\hbar\omega). \tag{2.27}$$

Mit $x = \frac{\omega b}{\gamma \beta}$ und der Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ ergibt sich für das äquivalente Photonenspektrum

$$N(\omega, b) \quad = \quad \frac{1}{\hbar} \frac{dI_{tot}}{d\omega}(\omega, b)$$

$$= \frac{1}{\hbar}\left(\frac{dI_z}{d\omega}(\omega,b) + \frac{dI_x}{d\omega}(\omega,b)\right)$$

$$= \frac{Z^2\alpha}{\pi^2}\left(\frac{c}{v}\right)^2\left(\frac{\omega}{\gamma v}\right)^2\left[K_1^2(x) + \frac{1}{\gamma^2}K_0^2(x)\right]. \tag{2.28}$$

Die Anregungswahrscheinlichkeit $\frac{d^2P(b)}{d\omega}$ des Targets durch einen Mode des äquivalenten Feldes ist gegeben durch die in das Energieintervall $d(\hbar\omega)$ gestreute Energie

$$N(\omega,b)d\sigma_{\gamma A_2\rightarrow X}d(\hbar\omega),$$

dividiert durch die Energie des emittierten Quantums

$$\hbar\omega.$$

Integration über alle Moden führt zur Anregungswahrscheinlichkeit $dP(b)$ des Targets

$$dP_{A_1A_2\rightarrow A_1'X}(b) = \int\frac{d\omega}{\omega}N_{A_1}(\omega,b)d\sigma_{\gamma A_2\rightarrow X}. \tag{2.29}$$

Durch Integration über den Stossparameter $\vec{b}$ und Vertauschung der Integrationen ergibt sich aus der Anregungswahrscheinlichkeit der Wirkungsquerschnitt für die Gesamtreaktion des photoinduzierten Prozesses

$$d\sigma_{A_1A_2\rightarrow XA_1'} = \int\frac{d\omega}{\omega}n_{A_1}(\omega)d\sigma_{\gamma A_2\rightarrow XA_2'}. \tag{2.30}$$

Dabei ist

$$n(\omega) = 2\pi\int_{b_{min}}^{\infty}bN(\omega,b)db \tag{2.31}$$

das integrierte äquivalente Photonenspektrum. Mit dem vorliegenden Stossparameter-abhängigen Spektrum (2.28) lässt sich Gleichung (2.31) mit dem adiabatischen Parameter

$$\xi = \frac{\omega b_{min}}{\gamma v} \tag{2.32}$$

in geschlossener Form angeben

$$n(\omega) = \frac{2\alpha}{\pi}\left(\frac{Z}{\beta}\right)^2\left[\xi K_0(\xi)K_1(\xi) - \frac{\beta^2}{2}\xi^2\left[K_1^2(\xi) - K_0^2(\xi)\right]\right]. \tag{2.33}$$

Dieses äquivalente Photonenspektrum vereinfacht sich im hochrelativistischen Fall $\gamma \gg 1$ - ausser für sehr kleine Frequenzen ω mit $\frac{\omega b_{min}}{c} \ll 1$ - zu

$$n(\omega) = \left(\frac{Z^2\alpha}{\pi}\right)\ln\left[\left(\frac{\delta}{\xi}\right)^2 + 1\right] \simeq \left(\frac{2}{\pi}Z^2\alpha\right)\ln\left(\frac{\delta}{\xi}\right) \tag{2.34}$$

mit der Konstanten

$$\delta = 0.681....$$

Bei sehr hohen Frequenzen $\omega \gg \frac{\gamma v}{b_{min}}$ setzt der durch (2.26) gegebene adiabatische Cutoff ein so, dass in diesem Fall das Photonenspektrum (2.33) durch (siehe Anhang A)

$$n(\omega) = \left(\frac{Z^2\alpha}{\beta^2}\right)\exp\left[-2\left(\frac{\omega b_{min}}{\gamma v}\right)\right] \tag{2.35}$$

Abbildung 2.5: Die durchgezogenen Linien stellen das Photonenspektrum für verschiedene Werte von γ dar. Schon bei $\gamma = 10$ stimmt die Approximation (gestrichelte Linie) gut mit dem exakten Spektrum überein. Für $\gamma = 50$ lassen sich Approximation und Original in dieser graphischen Darstellung nicht mehr unterscheiden.

angenähert werden kann.
In den Abbildungen 2.5 und 2.6 sind das integrierte Photonenspektrum (2.33) sowie die Näherungen (2.34) und (2.35) aufgetragen.

Die Wahl des minimalen Stossparameters b_{min} in Gleichung (2.31) ist jeweils gut zu überlegen. Sie muss so getroffen werden, dass die Felder des Projektils für $b > b_{min}$ die gleiche Wirkung auf das Target ausüben wie die äquivalenten Strahlungsimpulse. In dem jeweils betrachteten Prozess muss das Feld für $b > b_{min}$ deshalb aus quasireellen Photonen ($q^2 \sim 0$) bestehen, sodass sie durch reelle ($q^2 = 0$) ersetzt werden können. - Die Photonen der Felder mit $b < b_{min}$ sind entweder für den betrachteten Prozess irrelevant oder müssen auf eine andere Art berücksichtigt werden. In jedem Falle werden diese Photonen in der äquivalenten Photonen-Approximation vernachlässigt.
Bei peripheren Stössen ist der minimale Stossparameter b_{min} in natürlicher Weise durch die Summe der Radii von Projektil und Target gegeben

$$b_{min} = R_P + R_T. \tag{2.36}$$

Der Radius von Schwerionen mit der Massenzahl A ist

$$R \simeq 1.2 fm \sqrt[3]{A}\,; \tag{2.37}$$

bei Elektronen kann er durch die Comptonwellenlänge

$$R \simeq \frac{\hbar}{mc} \tag{2.38}$$

Abbildung 2.6: Adiabatischer Cutoff des Photonenspektrums (durchgezogene Linie) und die Approximation (gestrichelte Linie).

abgeschätzt werden.
Die Festlegung des minimalen Stossparameters durch Gleichung (2.36) ist deshalb sinnvoll, da für $b > b_{min}$ die elektromagnetische Wechselwirkung in voller Reinheit auftritt. Bei Kollisionen mit $b < b_{min}$ beginnen Prozesse der kurzreichweitigen starken Wechselwirkung eine Rolle zu spielen und überlagern diejenigen der elektromagnetischen Wechselwirkung.

2.2 $\gamma\gamma$-Prozesse

Sobald die Felder beider Kerne durch äquivalente Photonen ersetzt werden, kann man $\gamma\gamma$-Prozesse untersuchen. Entsprechend den Gleichungen (2.29) und (2.30) kann dann im Falle relativistischer, peripherer Stösse geschrieben werden

$$\begin{aligned} dP_{A_1 A_2 \to A_1' A_2' X}(b) &= \int \frac{d\omega_1}{\omega_1}\frac{d\omega_2}{\omega_2} d^2 b_1 d^2 b_2 \delta^{(2)}(\vec{b} + \vec{b_1} - \vec{b_2}) \\ &\quad \times N_{A_1}(\omega_1, b_1) N_{A_2}(\omega_2, b_2) d\sigma_{\gamma A_2 \to X} \end{aligned} \qquad (2.39)$$

$$d\sigma_{A_1 A_2 \to X A_1' A_2'} = \int \frac{d\omega_1}{\omega_1}\frac{d\omega_2}{\omega_2} n_{A_1}(\omega_1) n_{A_2}(\omega_2) d\sigma_{\gamma\gamma \to X}. \qquad (2.40)$$

Abbildung 2.1 zeigt das entsprechende Feynmann-Diagramm.

2.3 Vergleich mit semiklassischen Resultaten

Bei der Herleitung der Gleichungen (2.29) und (2.30) bzw. (2.39) und (2.40) haben wir die an der Kollision beteiligten Kerne jeweils als punktförmige Ladungen betrachtet. Ausser bei der Wahl des minimalen Stossparameters ist nirgendwo die wirkliche räumliche

Ladungsverteilung der Kerne in die Rechnung eingeflossen. Winther und Alder [Wi79] haben diesen Mangel behoben und im Rahmen der semiklassischen Methode analytische Ausdrücke für die äquivalenten Photonenspektren aller Multipole hergeleitet. Im Folgenden zeichnen wir diese Methode kurz nach.
Die Bewegung des Projektils wird in der semiklassischen Näherung als geradlinig angenommen; das Target durch den Eigenvektor $|IM>$ beschrieben, wo I der Drehimpuls und M die magnetische Quantenzahl bedeuten. Die Amplitude der elektromagnetischen Anregung des Targets ist in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie durch

$$a_{fi} = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t} < I_f M_f | V[\vec{r}(t)] | I_i M_i > \tag{2.41}$$

gegeben, wobei

$$\omega = \frac{(E_f - E_i)}{\hbar} \tag{2.42}$$

und E_i bzw. E_f Anfangs- bzw. Endenergie des Targets sind. Das Wechselwirkungspotential $V[\vec{r}(t)]$ kann in Multipolkomponenten entwickelt werden so, dass sich nach mehreren Rechenschritten [Wi79, Be88] die Übergangsamplitude in der Form

$$\begin{aligned} a_{fi} &= -i \frac{Ze}{\gamma \hbar v} \sum_{\pi l m} (-1)^m \sqrt{2l+1} \kappa^l G_{\pi l m}(c/v) K_m(\frac{\omega b}{\gamma v}) \\ & \quad < I_f M_f | \vec{M}(\pi l, -m) | I_i M_i > \end{aligned} \tag{2.43}$$

schreiben lässt. $\pi = E$ steht für elektrische und $\pi = M$ für magnetische Anregungen. Die Funktionen $G_{\pi l m}$, K_m, $\vec{M}(\pi, l, m)$ sowie der Faktor κ sind im Anhang A oder B explizit angegeben.
Das Betragsquadrat der Übergangsamplitude gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der das Target vom Anfangszustand $|i>$ auf den Endzustand $|f>$ angeregt wird. Der entsprechende Wirkungsquerschnitt ist durch

$$\sigma_{i \to f} = 2\pi \int_{b_{min}}^{\infty} b db (2I_i + 1)^{-1} \sum_{M_i M_f} |a_{fi}|^2 \tag{2.44}$$

gegeben, wobei nur Kollisionen mit $b > b_{min}$ berücksichtigt wurden. Integration über alle Energieintervalle $d(\hbar\omega)$ und Summation über alle mögliche Endzustände des Targets führt zu

$$\sigma = \sum_f \int \sigma_{i \to f} \rho_f(\hbar\omega) d(\hbar\omega) \tag{2.45}$$

mit der Zustandsdichte $\rho_f(\hbar\omega)$ der Endzustände mit der Energie E_f. Einsetzen von Gleichung (2.44) in Gleichung (2.45) erlaubt es, den Gesamtwirkungsquerschnitt in der folgenden Form zu schreiben

$$\sigma = \sum_l \int \left\{ n_{El}(\omega) \sigma_\gamma^{El}(\omega) + n_{Ml}(\omega) \sigma_\gamma^{Ml}(\omega) \right\} \frac{d\omega}{\omega} \; ; \tag{2.46}$$

mit den photonuklearen Absorptionsquerschnitten für gegebene Multipole πl

$$\sigma_\gamma^{\pi l}(\omega) = \frac{(2\pi)^3 (l+1)}{l[(2l+1)!!]^2} \sum_f \rho_f(\hbar\omega) k^{2l-1} B(\pi l), \tag{2.47}$$

die aufsummiert über alle Multipole πl den totalen photonuklearen Wirkungsquerschnitt darstellen

$$\sigma_\gamma = \sum_{\pi l} \sigma_\gamma^{\pi l}(\omega). \tag{2.48}$$

Das zu einem Multipol gehörende äquivalente Photonenspektrum ergibt sich zu

$$n_{\pi l}(\omega) = Z^2\alpha \frac{l[(2l+1)!!]^2}{(2\pi)^3(l+1)} \sum_m |G_{\pi lm}(c/v)|^2 g_m(\xi). \tag{2.49}$$

Neben $G_{\pi lm}$ sind auch $B(\pi l)$ und g_m im Anhang B angegeben. ξ ist der in (2.32) definierte Abschneideparameter.

Die ganze Dynamik der Anregung des Targets ist im photonuklearen Absorptionsquerschnitt σ_γ enthalten und beeinflusst die äquivalenten Photonenspektren $n_{\pi l}$ nicht. Diese hängen nur von der Kinematik der Kollision ab.

B. Hoffmann und G. Baur [Ho84] haben gezeigt, dass das in der semiklassischen Näherung berechnete E1-Photonenspektum das gleiche wie (2.33) auf Seite 9 ist.

$$\begin{aligned} n_{E1}(\omega) &= n_{E1,m=1} + n_{E1,m=0} + n_{E1,m=-1} \\ &= \frac{2}{\pi} Z^2\alpha \left(\frac{c}{v}\right)^2 \left[\xi K_0(\xi)K_1(\xi) - \frac{\beta^2}{2}\xi^2 \left[K_1^2(\xi) - K_0^2(\xi)\right]\right] \end{aligned} \tag{2.50}$$

Die Methode von E. Fermi, C. F. von Weizsäcker und E. J. Williams ist daher mit dem Mangel behaftet, dass das Photonenspektum (2.33) nicht von der Multipolarität der Strahlung abhängt. Dieser ist in der semiklassischen Näherung behoben worden.

Wir geben hier noch die Spektren der M1- , E2- und M2-Anregung in expliziter Form an.

$$\begin{aligned} n_{M1}(\omega) &= \beta^2 \left[n_{E1,m=1} + n_{E1,m+-1}\right] \\ &= \frac{2}{\pi} Z^2\alpha \left[\xi K_0(\xi)K_1(\xi) - \frac{\xi^2}{2} \left[K_1^2(\xi) - K_0^2(\xi)\right]\right] \end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned} n_{E2}(\omega) &= \frac{2}{\pi} Z^2\alpha \left(\frac{c}{v}\right)^4 \left[2\left(1-\beta^2\right)K_1^2(\xi)\right. \\ &\left. +\xi\left(2-\beta^2\right)^2 K_0(\xi)K_1(\xi) - \frac{\xi^2}{2}\beta^4\left(K_1^2(\xi) - K_0^2(\xi)\right)\right] \end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned} n_{M2}(\omega) &= \frac{2}{\pi} Z^2\alpha \left(\frac{c}{v}\right)^2 \left[2\left(1-\beta^2\right)K_1^2(\xi)\right. \\ &\left. +\xi K_0(\xi)K_1(\xi) - \frac{\xi^2}{2}\beta^2\left(K_1^2(\xi) - K_0^2(\xi)\right)\right] \end{aligned} \tag{2.53}$$

Aus Abbildung 2.7 ist ersichtlich, dass die zunächst der Intensität nach unterschiedlichen Photonenspektren

$$n_{E2}(\omega) \gg n_{M2}(\omega) \gg n_{E1}(\omega) \gg n_{M1}(\omega)$$

mit zunehmendem Lorentzfaktor γ sich immer mehr angleichen.

Für den Grenzfall $\gamma \gg 1$ ergibt sich aus den im Anhang A oder B angegebenen Approximationen für die Photonenspektren *aller* Multipole die gleiche Näherung.

$$n(\omega) = \left(\frac{Z^2\alpha}{\pi}\right) \ln\left[\left(\frac{\delta}{\xi}\right)^2 + 1\right] \simeq \left(\frac{2}{\pi}Z^2\alpha\right) \ln\left(\frac{\delta}{\xi}\right) \tag{2.54}$$

Für grosse Frequenzen $\omega \gg \frac{\gamma v}{b_{min}}$ setzt bei allen Multipolen der adiabatische Cutoff

$$n_{\pi l} \propto e^{-2\xi} \tag{2.55}$$

Abbildung 2.7: Äquivalente Photonenspektren der E1-, E2-, M1- und M2-Strahlung. Auffallend ist die Angleichung der verschiedenen Spektren mit zunehmendem γ.

ein. Eine gute Abschätzung ist daher in vielen Fällen für $\xi \leq 1$ durch Gleichung (2.54) und für $\xi > 1$ durch $n_{\pi l}(\omega) = 0$ gegeben.

Die in der semiklassischen Näherung erhaltenen Resultate widersprechen den nach der Methode von E. Fermi, C. F. von Weizsäcker und E. J. Williams hergeleiteten nicht. Im Grenzfall $\gamma \gg 1$ fallen beide zusammen und für kleinere $\gamma' s$ präzisiert die semiklassische Betrachtungsweise die 'Aussage' des Photonenspektrums (2.32) in der Weise, dass das letztere nur für elektrische Dipolanregungen korrekt ist.

Kapitel 3

Photonenspektrum des Protons

Protonen sind Hadronen. Sie unterliegen sowohl der elektromagnetischen als auch der starken Wechselwirkung.
Mit umfassenden Symmetrieforderungen aus der Quantenelektrodynamik (QED) werden wir in diesem Kapitel die Struktur des Photonenspektrums des Protons bis auf zwei sogenannte Formfaktoren herleiten. Die Formfaktoren selbst lassen sich in Beziehung zur elektrischen Ladungsverteilung und der Verteilung der magnetischen Momente des Protons bringen; deren explizite Form kann aber nicht ohne Berücksichtigung der Dynamik der starken Wechselwirkung hergeleitet werden. Unser Photonenspektrum zeigt deshalb zwei Aspekte: Einerseits ist es nach den Regeln der QED theoretisch hergeleitet worden. Andererseits wurde der Einfluss der starken Wechselwirkung durch zwei Formfaktoren parametrisiert, die als phänomenologische Grössen in das Spektrum einfliessen.
Im Wesentlichen folgen wir dem Weg, den Kniehl [Kn91] vorgezeichnet hat.

3.1 Wirkungsquerschnitt für $ep \to Xp$

Wir betrachten die Produktion eines N-Teilchen-Systems X durch die inelastisch-elastische Elektron-Proton-Streuung

$$e + p \to X + p. \tag{3.1}$$

Die Wechselwirkung ist durch virtuelle Photonen gegeben; die Notation der Vierervek-

Abbildung 3.1: Feynman-Diagramm der Produktion eines N-Teilchen-Systems durch elastische Elektron-Proton-Streuung. Die dargestellte Notation wird im Text verwendet.

toren aus Abbildung 3.1 ersichtlich. Weiterhin definieren wir:

$$\begin{array}{rcll} s &=& (p+P)^2 & \text{Schwerpunktsenergie} \\ \hat{s} &=& (p+k)^2 & \text{Schwerpunktsenergie des} \\ &&& \text{Photon} - \text{Proton} - \text{Systems} \\ t &=& k^2 & \text{Impulsübertrag} \end{array} \tag{3.2}$$

Im Gegensatz zu der Protonenmasse m wird die Masse des Elektrons vernachlässigt.

$$p^2 = 0 \tag{3.3}$$

$$P^2 = P'^2 = m^2 \tag{3.4}$$

Das T-Matrixelement für den Prozess (3.1) hat folgende Struktur

$$iT = -i < P'|J^\nu_{em}(0)|P > \frac{-ig_{\nu\mu}}{k^2}\, iV^\mu(p,k;\, p_1,\ldots,p_N), \tag{3.5}$$

wobei $J^\mu_{em}(x)$ die elektromagnetische Stromdichte des Protons und $V^\mu(p,k;\, p_1,\ldots,p_N)$ das Matrixelementes des Subprozesses

$$e + \gamma^* \to X \tag{3.6}$$

sind. Das Betragsquadrat des T-Matrixelementes lässt sich nach Mittelung über die Spins der Anfangszustände und Summation über die Polarisationen der Endzustände mit dem hadronischen Tensor

$$H^{\mu\nu}(P,P') = \frac{1}{2}\sum_{spins} < P'|J^\nu_{em}(0)|P >^* < P'|J^\mu_{em}(0)|P > \tag{3.7}$$

und

$$T_{\mu\nu}(p,k;\, p_1,\ldots,p_N) = \frac{1}{2}\left[V_\mu(p,k;\, p_1,\ldots,p_N)V_\nu(p,k;\, p_1,\ldots,p_N)^*\right] \tag{3.8}$$

in der Form

$$\overline{|T|^2} = \frac{1}{t^2}H^{\mu\nu}(P,P')T_{\mu\nu}(p,k;\, p_1,\ldots,p_N) \tag{3.9}$$

schreiben.
Der totale Wirkungsquerschnitt ist durch [Pe95]

$$\sigma(s) = \frac{1}{2(s-m^2)}\int dPS_{N+1}(p+P;\, p_1,\ldots,p_N,P')\overline{|T|^2} \tag{3.10}$$

definiert, wobei wir die Abkürzung

$$dPS_N(p;\, p_1,\ldots,p_n) = (2\pi)^4\delta\left(p - \sum_{i=1}^N p_i\right)\prod_{i=1}^N \frac{d^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3 2p_i^0} \tag{3.11}$$

für das lorentzinvariante N-Teilchen-Phasenraumelement benützt haben.
Der Phasenraum der (N+1) Teilchen kann unter Verwendung der Impulserhaltung des Subprozesses (3.6)

$$\int \delta\left(p + k - \sum_{i=1}^N p_i\right)\, d^4\left(\sum_{i=1}^N p_i\right) = 1 \tag{3.12}$$

und der invarianten Masse des N-Teilchen-Systems X

$$\int \delta\left(\hat{s} - m_X^2\right) d\hat{s} = 1 \tag{3.13}$$

in ein Produkt eines 2-Teilchen- und N-Teilchen-Phasenraums zerlegt werden.

$$
\begin{aligned}
& dPS_{N+1}(p+P;\, p_1,\ldots,p_N,P') \quad = \\
= \quad & (2\pi)^4 \delta\left(p - \textstyle\sum_{i=1}^N p_i\right) \prod_{i=1}^N \frac{d^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3 2p_i^0} \int \delta\left(p+k-\textstyle\sum_{i=1}^N p_i\right) d^4\left(\textstyle\sum_{i=1}^N p_i\right) \\
& \times \int \delta\left(\hat{s} - m_X^2\right) d\hat{s} \\
= \quad & \int\int \frac{d\hat{s}}{(2\pi)} dPS_2\left(p+P;\, \textstyle\sum_{i=1}^N p_i, P'\right) dPS_N(p+k;\, p_1,\ldots,p_N)
\end{aligned}
$$

Der totale Wirkungsquerschnitt geht dann über in

$$
\sigma(s) = \frac{1}{2(s-m^2)} \int \frac{d\hat{s}}{2\pi} dPS_2\left(p+P;\, \sum_{i=1}^N p_i, P'\right) \frac{1}{t^2} H^{\mu\nu}(P,P') X_{\mu\nu}(p,k), \qquad (3.14)
$$

wobei die ganze Information über das produzierte System X im Lorentztensor

$$
X_{\mu\nu}(p,k) = \int dPS_N(p+k;\, p_1,\ldots,p_N) T_{\mu\nu}(p,k;\, p_1,\ldots,p_N) \qquad (3.15)
$$

enthalten ist.
Im Folgenden werden wir die Tensoren, die innerhalb des Ausdrucks für den totalen Wirkungsquerschnitt (3.14) auftreten, genauer untersuchen.

3.1.1 Hadronischer Tensor

Das Übergangsmatrixelement des Protons

$$
< P'|J^\nu_{em}(0)|P >= e\bar{u}(P')\Gamma^\mu(P,P')u(P) \qquad (3.16)
$$

ist - entsprechend der Feynmann-Regel für ein Spin-$\frac{1}{2}$-Vertex - in niedrigster Ordnung durch

Abbildung 3.2: Proton-Photon-Vertex mit loop-Korrekturen

$$
\Gamma^\mu(P,P') = \gamma^\mu \qquad (3.17)
$$

gegeben. Dabei haben wir nur das erste der in Abbildung 3.2 angedeuteten Summe von Feynmann-Diagrammen berücksichtigt, die in vollständiger Weise den Übergang des Protons beschreibt. Um die räumlichen Verteilungen von Ladung und magnetischen Momenten des Protons miteinzubeziehen, müssten wir eigentlich die Summe der

Feynmann-Diagramme in Abbildung 3.2 in Formeln umsetzen - ein aussichtsloses Unterfangen! Stattdessen kann ein anderer, sehr eleganter Weg eingeschlagen werden.
Durch umfassende Argumente der QED kann die Form von $\Gamma^\mu(P,P')$ bis auf zwei skalare Funktionen eingeschränkt werden. Offensichtlich ist $\Gamma^\mu(P,P')$ ein Ausdruck, der

$$P, \quad P', \quad \gamma^\mu \tag{3.18}$$

und Konstanten wie m und e sowie reelle Zahlen enthält. Bis auf den total antisymmetrischen Tensor $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ ist diese Aufzählung vollständig, da keine anderen Grössen in den Feynmann-Regeln auftreten. $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ bzw. γ^5 können aber ausgeschlossen werden, da die Parität erhalten bleibt. Lorentzinvarianz fordert, dass $\Gamma^\mu(P,P')$ sich wie ein Vektor transformiert und deshalb eine Linearkombination von P^μ, P'^μ und γ^μ sein muss. Ein möglicher Ansatz ist

$$\Gamma^\mu(P,P') = A\gamma^\mu + B(P'^\mu + P^\mu) + C(P'^\mu - P^\mu). \tag{3.19}$$

Die Koeffizienten A, B und C können jede Art von skalaren Variablen enthalten, die sich aus Grössen der Liste (3.18) konstruieren lassen, so z.B. $\gamma_\mu P^\mu$ oder $\gamma_\mu P'^\mu$. Die Dirac-Gleichung

$$(\gamma_\mu P^\mu - m)\, u(P) = 0 \tag{3.20}$$

zeigt, dass $\gamma_\mu P^\mu$ und $\gamma_\mu P'^\mu$ durch die Masse des Protons ersetzt werden können. Ebenso fallen $\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$ und $P^2 = P'^2 = m^2$ weg. Als einzige nicht-triviale Variable bleibt PP' übrig, die wir in der Form

$$k^2 = (P - P')^2 = -2PP' + 2m^2 \tag{3.21}$$

berücksichtigen. A, B und C können daher nur eine Funktion von k^2 (sowie von Konstanten wie m) sein.
Die Liste der erlaubten Vektoren kann durch die Viererstromerhaltung weiter reduziert werden. Multiplizieren wir Gleichung (3.19) mit k_μ von links, so hebt sich der mittlere Term von alleine auf; ebenso fällt der erste Term weg, wenn er zwischen die Spinoren $\bar{u}(P')$ und $u(P)$ eingeklemmt wird (Dirac-Gleichung für $\bar{u}(P')$ und $u(P)$).

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{u}(P') k_\mu \Gamma^\mu(P,P') u(P) \\ &= \bar{u}(P') \left[A k_\mu \gamma^\mu + B k_\mu (P'^\mu + P^\mu) + C k^2 \right] u(P) \\ &= C\, \bar{u}(P') k^2 u(P) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Da es sich bei k um ein virtuelles Photon handelt, verschwindet der dritte Term nicht automatisch. Es folgt, dass $C = 0$ ist.
Mit

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{3.23}$$

und der Gordon-Identität

$$\bar{u}(P')\gamma^\mu u(P) = \bar{u}(P') \left[\frac{P'^\mu + P^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu} k_\nu}{2m} \right] u(P) \tag{3.24}$$

lässt sich Gleichung (3.19) in der Form

$$\Gamma^\mu(P,P') = \gamma^\mu F_1(t) - \frac{i\sigma^{\mu\nu} k_\nu}{2m} F_2(t) \tag{3.25}$$

und das Übergangsmatrixelement des Protons als

$$< P' | J^\nu_{em}(0) | P >= e\bar{u}(P') \left[\gamma^\mu F_1(t) - \frac{i\sigma^{\mu\nu} k_\nu}{2m} F_2(t) \right] u(P) \tag{3.26}$$

schreiben. Die sogenannten Formfaktoren F_1 und F_2 sind Funktionen des Impuls-übertrages t und werden weiter unten eingehend behandelt.
Zunächst wollen wir den hadronischen Tensor (3.7) unter Verwendung der Parametrisierung des Übergangsmatrixelementes des Protons (3.26) in expliziter Form aufschreiben. Dabei ist reichlich Gelegenheit gegeben, uns in γ-Gymnastik zu üben.

$$\begin{aligned}
H^{\mu\nu}(P,P') &= \frac{1}{2}\sum_{spins} < P'|J^{\nu}_{em}(0)|P >^* < P'|J^{\mu}_{em}(0)|P > \\
&= \frac{1}{2}e^2\sum_{s}\bar{u}(P)\left[\gamma^{\nu}F_1(t)+\frac{i\sigma^{\nu\rho}k_{\rho}}{2m}F_2(t)\right]u(P')\bar{u}(P')\left[\gamma^{\mu}F_1(t)\right. \\
&\quad \left. -\frac{i\sigma^{\mu\eta}k_{\eta}}{2m}F_2(t)\right]u(P) \\
&= \frac{1}{2}e^2\Bigg[\underbrace{tr\left[(\gamma_{\beta}P^{\beta}+m)\gamma^{\nu}F_1(\gamma_{\beta}P'^{\beta}+m)\gamma^{\mu}F_1\right]}_{=S_1} \\
&\quad +\underbrace{tr\left[(\gamma_{\beta}P^{\beta}+m)\frac{\sigma^{\nu\rho}k_{\rho}}{2m}F_2(\gamma_{\beta}P'^{\beta}+m)\frac{\sigma^{\mu\eta}k_{\eta}}{2m}F_2\right]}_{=S_2} \\
&\quad +\underbrace{tr\left[(\gamma_{\beta}P^{\beta}+m)\gamma^{\nu}F_1(\gamma_{\beta}P'^{\beta}+m)\frac{i\sigma^{\mu\eta}k_{\eta}}{2m}F_2\right]}_{=S_3} \\
&\quad +\underbrace{tr\left[(\gamma_{\beta}P^{\beta}+m)\frac{(-i)\sigma^{\nu\rho}k_{\rho}}{2m}F_2(\gamma_{\beta}P'^{\beta}+m)\gamma^{\mu}F_1\right]}_{=S_4}\Bigg]
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Die Spuren werten wir separat aus.

$$\begin{aligned}
S_1 &= tr\left[(\gamma_{\beta}P^{\beta}+m)\gamma^{\nu}F_1(\gamma_{\beta}P'^{\beta}+m)\gamma^{\mu}F_1\right] \\
&= 4F_1^2\left[P'^{\mu}P^{\nu}+P'^{\nu}P^{mu}-g^{\mu\nu}(P'P-m^2)\right] \\
&= 2F_1^2(2P^{\mu}-k^{\mu})(2P^{\nu}-k^{\nu})+2F_1^2(tg^{\mu\nu}-k^{\mu}k^{\nu})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= tr\left[(\gamma_{\beta}P^{\beta}+m)\frac{\sigma^{\nu\rho}k_{\rho}}{2m}F_2(\gamma_{\beta}P'^{\beta}+m)\frac{\sigma^{\mu\eta}k_{\eta}}{2m}F_2\right] \\
&= (-2)\frac{tF_2^2}{4m^2}(2P^{\mu}-k^{\mu})(2P^{\nu}-k^{\nu})+2F_2^2(tg^{\mu\nu}-k^{\mu}k^{\nu})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_3+S_4 &= tr\left[(\gamma_{\beta}P^{\beta}+m)\gamma^{\nu}F_1(\gamma_{\beta}P'^{\beta}+m)\frac{i\sigma^{\mu\eta}k_{\eta}}{2m}F_2\right] \\
&\quad +tr\left[(\gamma_{\beta}P^{\beta}+m)\frac{(-i)\sigma^{\nu\rho}k_{\rho}}{2m}F_2(\gamma_{\beta}P'^{\beta}+m)\gamma^{\mu}F_1\right] \\
&= 4F_1F_2(tg^{\mu\nu}-k^{\mu}k^{\nu})
\end{aligned}$$

Aufaddieren der einzelnen Spuren führt zum hadronischen Tensor

$$H^{\mu\nu}(P,P') = 2e^2\left[H_1(t)(2P^{\mu}-k^{\mu})(2P^{\nu}-k^{\nu})+H_2(t)(tg^{\mu\nu}-k^{\mu}k^{\nu})\right] \tag{3.28}$$

mit den zwei neu definierten Formfaktoren

$$H_1(t) = F_1^2(t)-\frac{t}{4m^2}F_2^2(t) \tag{3.29}$$

und

$$H_2(t) = [F_1(t) + F_2(t)]^2. \tag{3.30}$$

Weiter unten werden wir die $\mu \leftrightarrow \nu$-Symmetrie des hadronischen Tensors benötigen. Wir weisen schon jetzt auf sie hin. Sie ist aus Gleichung (3.28) klar ersichtlich.

$$H^{\mu\nu}(P, P') = H^{\nu\mu}(P, P') \tag{3.31}$$

3.1.2 Formfaktoren

Es steht nun an, die im letzten Abschnitt erhaltenen Formfaktoren zu interpretieren und deren explizite Gestalt als Funktion von t zu eruieren.
$\Gamma^\mu(P, P')$ aus (3.25) ist der analytische Ausdruck für die Summe aller Vertex-Diagramme aus Abbildung 3.2. Obwohl wir bei der Herleitung von (3.25) ständig mit dem Bild eines gestreuten Protons gearbeitet haben, ist in die Argumentation nur die Spin-$\frac{1}{2}$-Eigenschaft eingeflossen. Andererseits können wir das Photon k als Wechselwirkung des Fermions P mit einem äusseren elektromagnetischen Feld A_μ interpretieren. So gesehen enthalten die Formfaktoren die vollständige Information über den Einfluss eines elektromagnetischen Feldes auf ein Spin-$\frac{1}{2}$-Fermion und damit auch alle Information über die elektrische und magnetische Koppelung des Fermions an das äussere Feld. Die Amplitude eines an einem zeitlich invarianten, klassischen Potential A_μ^{cl} gestreuten Spin-$\frac{1}{2}$-Fermions ist durch

$$iM(2\pi)\delta(P^0 - P'^0) = -ie\bar{u}(P')\Gamma^\mu(P, P')u(P)\tilde{A}_\mu^\nu(P - P') \tag{3.32}$$

gegeben [Ha84]. Um die elektrische Koppelung des Fermions zu isolieren, streuen wir dieses an dem elektrostatischen Potential

$$A_\mu^{cl}(x) := (\phi(x), 0, 0, 0), \tag{3.33}$$

dessen Fouriertransformierte

$$\tilde{A}_\mu^{cl}(q) = (2\pi\delta(k^0)\tilde{\phi}(\vec{k}), 0, 0, 0) \tag{3.34}$$

ist. Einsetzen in Gleichung (3.32) ergibt

$$iM = ie\bar{u}(P')\Gamma^0(P, P')u(P)\tilde{\phi}_{\vec{k}}. \tag{3.35}$$

Da wir zunächst am statischen Limit ($t = 0$) der Formfaktoren interessiert sind, wählen wir ein Feld $A_\mu^{cl}(x)$, das sich über weite Strecken nur wenig ändert, sodass $\tilde{\phi}(\vec{k})$ sich um $\vec{k} = 0$ konzentriert. Wir setzen den Grenzwert $\vec{k} \to 0$ in das Spinor-Matrixelement (3.26) ein, verwenden

$$u^\dagger(P')u(P) \to 2m \tag{3.36}$$

und sehen, dass nur der Formfaktor $F_1(0)$ übrig bleibt

$$iM = -ieF_1(0)\tilde{\phi}(\vec{k})2m. \tag{3.37}$$

Dies entspricht der Born'schen Näherung der Streuung eines Teilchens mit der Ladung $eF_1(0)$ an dem Potential $\phi(x)$. $F_1(0)$ stellt deshalb die elektrische Ladung Q des Fermions in Einheiten von e dar.

$$eF_1(0) = Q \tag{3.38}$$

Ebenso kann eine Beziehung zwischen den Formfaktoren im statischen Limit und dem magnetischen Moment des Fermions hergeleitet werden, wenn die Streuung an einem statischen Vektorpotential

$$A_\mu^{cl}(x) := (0, \vec{A}^{cl}(\vec{x})) \tag{3.39}$$

betrachtet wird. Einsetzen der Fouriertransformierten

$$\tilde{A}^{cl}_\mu(k) = (0, 2\pi\delta(k_0)\tilde{\vec{A}}^{cl}(\vec{k})) \tag{3.40}$$

in Gleichung (3.32) unter Verwendung der nichrelativistischen Näherung des Spinors

$$u(P) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma}\xi \\ \sqrt{p\bar{\sigma}}\xi \end{pmatrix} \simeq \sqrt{m} \begin{pmatrix} (1 - \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{2m})\xi \\ (1 + \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{2m})\xi \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

und der Identität

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k \qquad i, j, k \in \{1, 2, 3\} \tag{3.42}$$

führt zu

$$\begin{aligned} iM &= ie\left[\bar{u}(P')\left(\gamma^i F_1 + \frac{i\sigma^{i\nu}k_\nu}{2m}F_2\right)u(P)\right]\tilde{A}^i_{cl}(k) \\ &= ie2m\xi'^\dagger\left[F_1(t)(P_i + P'_i) - \frac{i}{2m}\epsilon^{ijk}\sigma^k q^j[F_1(t) + F_2(t)]\right]\xi\tilde{A}^i_{cl}(k). \end{aligned} \tag{3.43}$$

Der zu $\vec{P} + \vec{P'}$ proportionale, spin-unabhängige Term ist der Beitrag des Operators $[\vec{P}\vec{A} + \vec{P}\vec{A}]$ des kinetischen Energieterms der nichtrelativistischen Quantenmechanik. Er hat nichts mit der Wechselwirkung der magnetischen Momente zu tun und wird deshalb ersatzlos gestrichen. Übrig bleibt ein Term proportional zu k^i. Es ist daraus ersichtlich, dass wir nicht schon zu Beginn der Herleitung (Gleichung (3.43)) den Limit $\vec{k} = 0$ hätten einsetzen dürfen, sondern alle Terme proportional zu k^i berücksichtigen müssen (im Gegensatz zu Termen höherer Ordnung in k^i, die schon in (3.43) weggelassen wurden). Mit der Fourriertransformierten des magnetischen Feldes, das durch $\vec{A}^{cl}(\vec{x})$ gegeben ist,

$$\tilde{B}^k(\vec{k}) = -i\epsilon^{ijk}k^i\tilde{A}^j_{cl}(\vec{k}) \tag{3.44}$$

finden wir damit im Limit $k \to 0$ die Übergangsamplitude

$$iM = -ie(2m)\xi'^\dagger\left(\frac{(-1)}{2m}\sigma^k[F_1(0) + F_2(0)]\xi\tilde{B}^k(\vec{k})\right). \tag{3.45}$$

Wieder kann M als die Born'sche Näherung der Streuung eines Fermions durch das Potential

$$V(\vec{x}) = -<\vec{\mu}>\vec{B}(\vec{x}) \tag{3.46}$$

interpretiert werden. Das Potential entspricht der Wechselwirkung des magnetischen Momentes

$$-<\vec{\mu}> = \frac{e}{2m}2[F_1(0) + F_2(0)]\xi'^\dagger\frac{\vec{\sigma}}{2}\xi \tag{3.47}$$

mit dem äusseren Feld (3.39). Vergleichen wir Gleichung (3.47) mit dem Standartausdruck für das magnetische Moment

$$\vec{\mu} = \mu\vec{\sigma}, \tag{3.48}$$

so sehen wir, dass

$$\frac{e}{2m}[F_1(0) + F_2(0)] = \mu \tag{3.49}$$

ist.

Wird das bisher angenommene Fermion gleich einem Elektron gesetzt, so folgt aus Gleichung (3.38) $F_1^e(0) = 1$ und, da das Bohr'sche Magneton $\frac{e}{2m}$ beträgt, aus Gleichung (3.49) $F_2^e(0) = 0$. Es zeigt sich aber, dass $F_2^e(0)$ schon in der nächsthöheren Ordnung in α ungleich Null ist und damit ein anomales magnetisches Moment beim Elektron auftritt. J. Schwinger hat 1948 [Sch48] das erste Mal diese Ordnung berechnet und mit dem Resultat

$$F_2^e(0) = \frac{\alpha}{2\pi} \sim 0.0011614,$$

das schon äusserst genau mit den experimentellen Daten übereinstimmte, die Gültigkeit der QED eindrücklich bestätigt. Heute hat man das anomale magnetische Moment des Elektrons bis zur Ordnung α^8 berechnet. Siehe [Gr95].

$$F_2^{e,aktuell}(0) = 0.001\,159\,652\,140 \;\pm\; 0.000\,000\,000\,028$$

Mit dem aktuellen experimentellen Wert

$$F_2^{exp}(0) = 0.001\,159\,652\,193 \;\pm\; 0.000\,000\,000\,010$$

stimmt dies bis auf die neunte Nachkommastelle überein.
Auch die t-Abhängigkeit der Formfaktoren kann aus der QED abgeleitet werden. Die so erhaltenen Formfaktoren beschränken sich in ihrer Gültigkeit aber auf das Elektron [La91]. Die Formfaktoren des Protons - an denen wir schlussendlich interessiert sind - können innerhalb der QED nicht behandelt werden, da diese Theorie nur die elektromagnetische Wechselwirkung umfasst. Die Herleitung von Gleichung (3.25) basiert nur auf allgemeinen Symmetrie-Prinzipien. Deshalb gilt auch für das Proton, dass seine elektromagnetische Wechselwirkung durch zwei Formfaktoren vollständig parametrisiert wird. Ebenso gelten die Überlegungen, die zu den Gleichungen (3.38) und (3.49) geführt haben. Die t-Abhängigkeit der Formfaktoren des Protons gehen auf diesem Stadium der Theorie als phänomenologische Grössen in die Rechnung ein.
Experimentell ergeben sich die statischen Formfaktoren des Protons zu

$$F_1(0) = 1, \tag{3.50}$$
$$F_2(0) = 1.79. \tag{3.51}$$

Es erweist sich als geschickt, die Formfaktoren in der Form der sogenannten Sachs-Kombinationen

$$G_E(t) = F_1(t) + \frac{t}{4m^2} F_2(t) \tag{3.52}$$
$$G_M(t) = F_1(t) + F_2(t) \tag{3.53}$$

zu parametrisieren. Im Breit frame, dem Koordinatensystem mit $\vec{P} = -\vec{P'}$ (siehe Abbildung 3.3), tauchen $G_E(t)$ und $G_M(t)$ als Faktoren der Wahrscheinlichkeitsdichte ρ bzw.

Abbildung 3.3: Breit frame

der Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\vec{J}$ auf [Ha84].

$$\begin{aligned} \rho &= 2mG_E(t) & \lambda = -\lambda' \\ J_1 \pm iJ_2 &= \mp 2|\vec{k}|G_m(t) & \lambda = \lambda' = \mp\tfrac{1}{2} \end{aligned} \tag{3.54}$$

λ gibt die Helizität des Protons vor und λ' nach der Wechselwirkung mit dem Photon an.
Für $t \ll m^2$, d.h.. kleine Impulse $\vec{P}$ und $\vec{P'}$ im Breit frame, können $G_E(t)$ und $G_M(t)$ als Fouriertransformierte der Ladungsverteilung $\rho_E(x)$ bzw. der Verteilung der magnetischen Momente $\rho_M(x)$ des Protons [Ha84] angesehen werden.

$$G_i(t) = G_i(0) \int \frac{1}{G_i(0)} \rho_i(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} d^3x \qquad (i = E, M) \tag{3.55}$$

$G_E(t)$ bzw. $G_M(t)$ werden deshalb - unabhängig vom gewählten Koordinatensystem - als elektrische bzw. magnetische Formfaktoren bezeichnet.
Durch entsprechende Streuexperimente erweisen sich beide Sachs-Kombinationen als gut durch eine Dipolform

$$G_E(t) = (1 - \frac{t}{0.71GeV^2})^{-2} \tag{3.56}$$
$$G_M(t) = 2.79 G_E(t) \tag{3.57}$$

parametrisiert. Mit den Sachs-Kombinationen schreiben sich die in (3.29) und (3.30) definierten Formfaktoren folgendermassen:

$$H_1(t) = \frac{G_E^2(t) - \left(\frac{t}{4m^2}\right) G_M^2(t)}{1 - \frac{t}{4m^2}} \tag{3.58}$$
$$H_2(t) = G_M^2(t) \tag{3.59}$$

3.1.3 Eigenschaften des Protons

Da die Fourierinterpretation der Sachs-Kombinationen unter der Annahme $t \ll m^2$ gilt, können wir $e^{i\vec{k}\vec{x}}$ in Gleichung (3.55) entwickeln

$$\begin{aligned} G_i(t) &= G_i(0) \int \left(1 + i\vec{k}\vec{x} - \frac{(\vec{k}\vec{x})^2}{2} + \ldots\right) \frac{1}{G_i(0)} \rho_i(\vec{k}) d^3x \\ &= G_i(0) \left(1 - \frac{1}{6} |\vec{k}|^2 < r_i^2 > + \ldots\right), \qquad (i = E, M) \end{aligned} \tag{3.60}$$

wobei wir die Verteilung $\rho_i(\vec{x})$ als sphärisch symmetrische Funktionen angenommen haben. Damit ist der elektrische bzw. magnetische Radius durch

$$< r_i^2 >= \frac{6}{G_i(0)} \frac{dG_i(t)}{dt}\bigg|_{t=0} \qquad (i = E, M) \tag{3.61}$$

gegeben. Einsetzen der Sachs-Kombinationen (3.56) bzw. (3.57) ergibt

$$r_E = r_M = 0.81 \cdot 10^{-13} cm \simeq 0.8 fm. \tag{3.62}$$

Bezüglich der elektrischen wie auch der Verteilung der magnetischen Momente hat das Proton also denselben Radius (im Breit frame).
Der Vollständigkeit halber führen wir auch weitere charakteristischen Daten des Protons auf:

$$\begin{aligned} m &= 938.3\text{MeV} \\ s &= \frac{1}{2} \\ Q &= +|e| \\ \mu &= 2.79 \end{aligned}$$

3.1.4 Tensor $X_{\mu\nu}$

Neben dem hadronischen Tensor muss auch $X_{\mu\nu}$ aus (3.15) in eine explizite Form gebracht werden so, dass der totale Wirkungsquerschnitt (3.14) berechnet werden kann. Wir benutzen wieder die Idee der Parametrisierung, die wir schon beim Proton verwendet haben. Im Unterschied zum Vektor $\Gamma^\mu(P, P')$ geht es jetzt um den Tensor $X_{\mu\nu}$, der bereits über die Spins gemittelt und summiert worden ist. Produkte von γ^μ-Vektoren brauchen deshalb nicht berücksichtigt zu werden, sondern nur solche der unabhängigen Impulse - wir wählen p und k - sowie $g_{\mu\nu}$. Ein Ansatz ist

$$X_{\mu\nu} = -W_1 g_{\mu\nu} + W_2 p_\mu p_\nu + W_3 k_\mu k_\nu + W_4 \left(p_\mu k_\nu + k_\mu p_\nu\right) \tag{3.63}$$

wobei die antisymmetrischen Beiträge zu $X_{\mu\nu}$ weggelassen wurden, da sie von selbst bei der Produktbildung mit dem hadronischen Tensor gemäss Gleichung (3.14) wegfallen würden. Der hadronische Tensor ist ja, wie aus Gleichung (3.31) ersichtlich, symmetrisch. Mit der Viererstromerhaltung

$$\begin{aligned} 0 &= k^\mu X_{\mu\nu} \\ &= \left(-W_1 + W_3 t + W_4 pk\right) k_\nu + \left(W_2 pk + W_4 t\right) p_\nu \end{aligned} \tag{3.64}$$

reduziert sich mit

$$\begin{aligned} W_3 &= \frac{1}{t} W_1 + \left(\frac{pk}{t}\right)^2 W_2 \\ W_4 &= -\frac{pk}{t} W_2 \end{aligned}$$

die Anzahl der unabhängigen Koeffizienten in Gleichung (3.63) auf zwei.

$$\begin{aligned} X_{\mu\nu}(p,k) &= \frac{1}{2t}\left[\frac{(\hat{s}-t)^2 W_2}{2t}\left(\frac{2t}{\hat{s}-t}p_\mu - k_\mu\right)\left(\frac{2t}{\hat{s}-t}p_\nu - k_\nu\right)\right. \\ &\left. \quad + (-2W_1)(t g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)\right] \end{aligned} \tag{3.65}$$

W_1 und W_2 sind Funktionen der unabhängigen Variablen $\hat{s}$ und t. Aus Gründen, die später ersichtlich sind, ersetzen wir W_1 und W_2 durch die Lorentzskalare

$$X_1(\hat{s}, t) = \frac{4t}{(\hat{s}-t)^2} p^\mu p^\nu X_{\mu\nu}(p,k) \tag{3.66}$$

und

$$X_2(\hat{s}, t) = g^{\mu\nu} X_{\mu\nu}(p,k). \tag{3.67}$$

Der Tensor $X_{\mu\nu}$ geht dann über in

$$\begin{aligned} X_{\mu\nu}(p,k) &= \frac{1}{2t}\left[\left[3X_1(\hat{s},t) + X_2(\hat{s},t)\right]\left(\frac{2t}{\hat{s}-t}p_\mu - k_\mu\right)\left(\frac{2t}{\hat{s}-t}p_\nu - k_\nu\right)\right. \\ &\left. \quad + \left[X_1(\hat{s},t) + X_2(\hat{s},t)\right](t g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)\right]. \end{aligned} \tag{3.68}$$

3.1.5 Zusammenfassung

Den totalen Wirkungsquerschnitt (3.14) für den Prozess $ep \to Xp$ können wir nun in expliziter Form angeben. Unter Verwendung von

$$p \cdot k = \frac{1}{2}(\hat{s} - t), \quad p \cdot P = \frac{1}{2}(s - m^2), \quad k \cdot P = \frac{1}{2}t \tag{3.69}$$

und

$$dPS_2\left(p+P;\sum_{i=1}^{N}p_i,P'\right)=\frac{dt}{8\pi(s-m^2)} \tag{3.70}$$

ergibt Einsetzen der Gleichungen (3.28) und (3.68) in Gleichung (3.14)

$$\begin{aligned}\sigma(s) &= \frac{\alpha}{4\pi}\frac{1}{(s-m^2)^2}\\ &\times\int\limits_{\hat{s}_{min}}^{(\sqrt{s}-m)^2}d\hat{s}\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{dt}{t}\left\{\left[2\frac{s-m^2}{\hat{s}-t}\left(\frac{s-m^2}{\hat{s}-t}-1\right)[3X_1(\hat{s},t)+X_2(\hat{s},t)]\right.\right.\\ &\left.\left.+2\frac{m^2}{t}[X_1(\hat{s},t)+X_2(\hat{s},t)]+X_1(\hat{s},t)\right]H_1(t)+X_2(\hat{s},t)H_2(t)\right\},\end{aligned} \tag{3.71}$$

wobei $\hat{s}_{min}$ die minimale invariante Masse von X bezeichnet und

$$t_{1,2}=2m^2-\frac{1}{2s}[(s+m^2)(s-\hat{s}+m^2)\pm(s-m^2)\sqrt{(s-\hat{s}+m^2)^2-4sm^2}] \tag{3.72}$$

ist.
Bis jetzt wurde nur die Elektronenmasse vernachlässigt.

3.2 Photonenverteilfunktion des Protons

Aufgrund der empirischen Form der Sachs-Kombinationen (3.56) und (3.57) kann der Wirkungsquerschnitt (3.71) vereinfacht werden, wenn die invariante Masse von X gross ist im Vergleich zu derjenigen des Protons ($\hat{s}_{min} \gg m^2$). Der Beitrag von $t \ll -0.71GeV^2$ zum inneren Integral von (3.71) verschwindet. Wir können daher $|t|$ gegenüber $\hat{s}$ und m^2 gegenüber s vernachlässigen. Dies bedeutet nichts anderes, als dass die quasireellen Photonen ($t \sim 0$) durch reelle ($t = 0$) ersetzt werden. Das hat einerseits

$$X_i(\hat{s},t)\approx X_i(\hat{s},0) \qquad (i=1,2) \tag{3.73}$$

und mit der Definition des Lorentzskalars (3.66)

$$X_1(\hat{s},0)=0 \tag{3.74}$$

zur Folge. Andererseits wird das virtuelle Photon γ^* des Subprozesses 3.6 zu einem reellen, sodass sich das T-Matrixelement für den Subprozess als

$$iT_0=\epsilon^\mu(k)iV_\mu(p,k;\,p_1,\ldots,p_N)|_{t=0} \tag{3.75}$$

schreiben lässt. $\epsilon(k)$ ist der Polarisationsvektor des Photons. Der entsprechende Wirkungsquerschnitt ist dann durch

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(\hat{s}) &= \frac{1}{2\hat{s}}\int dPS_N(p+k;\,p_1,\ldots,p_N)|T_0|^2\\ &= -\frac{1}{2\hat{s}}g^{\mu\nu}\int dPS_N(p+k;\,p_1,\ldots,p_N)T_{\mu\nu}(p,k;\,p_1,\ldots,p_N)\\ &= -\frac{1}{2\hat{s}}X_2(\hat{s},0)\end{aligned} \tag{3.76}$$

gegeben. Mit der Variablen

$$x=\frac{\hat{s}}{s} \tag{3.77}$$

und unter Verwendung der äquivalenten Photonen-Approximation durch (3.74) und (3.76) vereinfacht sich der totale Wirkungsquerschnitt (3.71) zu

$$\sigma(s) \approx \int_{\hat{s}_{min}}^{(\sqrt{s}-m)^2} dx \hat{\sigma}(xs) f_{\gamma/p}(x). \tag{3.78}$$

Die äquivalente Photonenverteilfunktion $f_{\gamma/p}(x)$ der elastischen ep-Streuung ist durch

$$f_{\gamma/p}(x) = -\frac{\alpha}{2\pi} x \int_{t_1}^{t^2} \frac{dt}{t} \left\{ 2\left[\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right) + \frac{m^2}{t}\right] H_1(t) + H_2(t) \right\} \tag{3.79}$$

definiert. In der Hauptsache haben wir alle Überlegungen dieses Kapitels angestellt, um diese Verteilfunktion herzuleiten!
Die Integrationsgrenzen (3.72) lassen sich für kleine m^2 entwickeln.

$$t_1 = -s(1-x) + O(m^2) \tag{3.80}$$

$$t_2 = -m^2 \frac{x^2}{(1-x)} + O(m^4) \tag{3.81}$$

Da t im Nenner des Integranden der Verteilfunktion (3.79) auftaucht, können wir von

$$t_1 = -\infty \tag{3.82}$$

bis

$$t_2 = -\frac{m^2 x^2}{(1-x)} \tag{3.83}$$

integrieren.
Wir werden nun das Integral der Verteilfunktion (3.79) mit den Integrationsschranken (3.82) und (3.83) analytisch lösen. Dazu schreiben wir es zunächst um.

$$-\frac{2\pi}{\alpha x} f_{\gamma/p}(x) = \frac{2}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right) \int_{t_1}^{t_2} \frac{H_1(t)}{t} dt + 2m^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{H_1(t)}{t^2} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{H_2(t)}{t} dt \tag{3.84}$$

Unter Verwendung der Konstanten

$$a = \frac{4m^2}{0.71\ GeV^2} \tag{3.85}$$

$$b = 2.79 \tag{3.86}$$

$$c = 0.71\ GeV^2 \tag{3.87}$$

$$d = 4m^2 \tag{3.88}$$

führt Einsetzen der Formfaktoren (3.58) und (3.59) zu

$$\begin{aligned}
-\frac{2\pi}{\alpha x} f_{\gamma/p}(x) = {} & \frac{2}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right) \left[c^4 d \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t} \frac{1}{(c-t)^4 (d-t)} dt \right. \\
& \left. - c^4 b^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{(c-t)^4 (d-t)} dt \right] \\
& + 2m^2 \left[c^4 d \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t^2} \frac{1}{(c-t)^4 (d-t)} dt - c^4 b^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t} \frac{1}{(c-t)^4 (d-t)} dt \right] \\
& + \left[c^4 b^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t} \frac{1}{(c-t)^4} dt \right].
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Mit den Partialbruchzerlegungen

$$\frac{1}{t(d-t)} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{(d-t)}\right) \tag{3.90}$$

$$\frac{1}{t^2(d-t)} = \frac{1}{dt^2} + \frac{1}{d^2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{(d-t)}\right) \tag{3.91}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
-\frac{2\pi}{\alpha x} f_{\gamma/p}(x) = {} & \frac{2}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)\left[c^4 \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t}\frac{1}{(c-t)^4} dt\right. \\
& \left. + c^4(1-b^2) \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{1}{(c-t)^4}\frac{1}{(d-t)} dt\right] \\
& + 2m^2\left[c^4 \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t^2}\frac{1}{(c-t)^4} dt\right. \\
& \left. + \frac{c^4}{d}(1-b^2)\left(\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t}\frac{1}{(c-t)^4} dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{1}{(c-t)^4}\frac{1}{(d-t)} dt\right)\right] \\
& + \left[b^2 c^4 \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t}\frac{1}{(c-t)^4} dt\right]
\end{aligned} \tag{3.92}$$

und zusammenfassen...

$$\begin{aligned}
-\frac{2\pi}{\alpha x} f_{\gamma/p}(x) = {} & \left[c^4\left(\frac{2}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right) + \frac{2m^2}{d}\right)\left(1-b^2\right)\right] \underbrace{\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{1}{(c-t)^4}\frac{1}{(d-t)} dt}_{I_1} \\
& + \left[c^4\left(\frac{2}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right) + \frac{2m^2}{d}(1-b^2) + b^2\right)\right] \underbrace{\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t}\frac{1}{(c-t)^4} dt}_{I_2} \\
& + \left[2m^2 c^4\right] \underbrace{\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t^2}\frac{1}{(c-t)^4} dt}_{I_3}
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Die drei Integrale I_1, I_2 und I_3 sind analytisch lösbar.

$$\begin{aligned}
-\frac{2\pi}{\alpha x} f_{\gamma/p}(x) = {} & \left[c^4\left(\frac{2}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right) + \frac{2m^2}{d}\right)\left(1-b^2\right)\right] \\
& \times \frac{1}{(c-t)^4}\left[\ln\left(\frac{c-t}{d-t}\right) - \frac{(c-d)}{(c-t)} - \frac{(c-d)^2}{2(c-t)^2} - \frac{(c-d)^3}{3(c-t)^3}\right]_{t_1}^{t_2} \\
& + \left[c^4\left(\frac{2}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right) + \frac{2m^2}{d}(1-b^2) + b^2\right)\right] \\
& \times \frac{1}{c^4}\left[\ln\left(\frac{t}{c-t}\right) + \frac{c}{(c-t)} + \frac{c^2}{2(c-t)^2} + \frac{c^3}{3(c-t)^3}\right]_{t_1}^{t_2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left[2m^2c^4\right] \\
&\times \frac{1}{c^5}\left[4\ln\left(\frac{t}{c-t}\right) - \frac{c}{t} + \frac{3c}{(c-t)} + \frac{c^2}{(c-t)^2} + \frac{c^3}{3(c-t)^3}\right]_{t_1}^{t_2} \qquad (3.94)
\end{aligned}
$$

Einsetzen der Integrationsgrenzen (3.82) und (3.83) ergibt mit den von x abhängigen Variablen

$$
y = \frac{1}{2} - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \qquad (3.95)
$$

$$
z = 1 + \frac{ax^2}{4(1-x)} \qquad (3.96)
$$

den definitiven Ausdruck für das Verteilspektrum.

$$
\begin{aligned}
f_{\gamma/p}(x) = \frac{\alpha}{2\pi} x &\left[c_1 y \ln\left(1 + \frac{c_2}{z}\right) - (y + c_3)\ln\left(1 - \frac{1}{z}\right)\right. \\
&\left. + \frac{c_4}{z-1} + \frac{c_5 y + c_6}{z} + \frac{c_7 y + c_8}{z^2} + \frac{c_9 y + c_{10}}{z^3}\right] \qquad (3.97)
\end{aligned}
$$

c_i $(i = 1, \ldots, 10)$ sind Konstanten, die nur von a und b abhängen.

$$
\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{(b^2-1)}{(a-1)^4} \approx -2.76 \cdot 10^{-2} \\
c_2 &= a - 1 \approx 3.96 \\
c_3 &= 2a + 0.5b^2 \approx 13.8 \\
c_4 &= -0.5a \approx -2.48 \\
c_5 &= \frac{(b^2-1)}{(a-1)^4} \approx -0.891 \\
c_6 &= -0.5(3a + b^2) \approx -11.3 \\
c_7 &= -0.5\left[\frac{(b^2-1)}{((a-1)^2)} - 1\right] \approx -0.716 \\
c_8 &= -0.5(a + 0.5b^2) \approx -4.43 \\
c_9 &= \frac{1}{3}\left[\frac{(b^2-1)}{a-1} - 1\right] \approx 0.238 \\
c_{10} &= -\frac{1}{6}(a + b^2) \approx -2.12 \qquad (3.98)
\end{aligned}
$$

Die zu Beginn von Abschnitt 3.2 benutzte Bedingung

$$
s, s_{min} \gg m^2
$$

gilt, wenn es sich bei (3.1) um einen relativistischen Prozess ($\gamma \gg 1$) handelt. Unter diesen Umständen kann die in Gleichung (3.77) eingeführte Variable x als das Verhältnis von Photonenenergie und (relativistischer) Energie des Protons interpretiert werden.

$$
x = \frac{\hat{s}}{s} \cong \frac{\hbar\omega}{E_p} \qquad (3.99)
$$

Das Photonenspektrum des Protons ist damit über die Beziehung

$$
n_p(\omega) = x f_{\gamma/p}(x)|_{x=\frac{\hbar\omega}{E}} \qquad (3.100)
$$

definiert.

Abbildung 3.4: In (a) sind verschiedene Versionen des Kniehl-Spektrums dargestellt: doppelt durchgezogene Linie=vollständiges Kniehl-Spektrum; durchgezogene Linie=Kniehl-Spektrum mit $\mu = 0$; gestrichelte Linie=Kniehl-Spektrum mit allen $c_i = 0$. In (b) werden das vollständige Kniehl-Spektrum (doppelt durchgezogene Linie), das E1-Spektrum (strichpunktierte Linie) sowie die Approximation der Multipolspektren (punktierte Linie) miteinander verglichen.

3.3 Vergleich der Photonenspektren

Das Photonenspektrum (3.100) skaliert mit $x = \omega/E$. Durch Variation des numerischen Wertes für μ kann die Empfindlichkeit des äquivalenten Photonenspektrums gegenüber dem magnetischen Moment des Protons untersucht werden. Durch Betrachtung des Matrixelementes des Protonenstromes kann gezeigt werden, dass die Photonenemissionen, die mit G_M gehen, mit einem Spin-flip des Protons verbunden sind; für $\mu = 0$ finden keine Spin-flip Ereignisse statt.
In Abbildung 3.4a ist das äquivalente Photonenspektrum des Protons als Funktion des relativen Energieverlustes $x = \omega/E$ aufgetragen. Die doppelt durchgezogene Linie entspricht dem Spektrum mit physikalischem magnetischen Moment ($\mu = 2.79$), während die einfach durchzogene Linie das Spektrum unter Vernachlässigung aller Spin-flip Beiträge zeigt ($\mu = 0$). Oberhalb von $x = 0.25$ tragen die Spin-flip Ereignisse erheblich zum Photonenspektrum bei; ohne Spin-flip Term fällt das Spektrum sehr stark ab und ist bei $x = 0.5$ eine Grössenordung zu klein. Die gestrichelte Linie berücksichtigt nur den Term

$$-y \ln\left(1 - \frac{1}{z}\right)$$

innerhalb des Kniehl-Spektrums (3.97); alle c_i $(i = 1, \ldots, 10)$ werden gleich Null gesetzt. Aus Abbildung 3.4a geht hervor, dass das Hauptverhalten des Spektrums durch diesen Term gut, aber mit etwas zu hohen Werten wiedergegeben ist.
In Abbildung 3.4b ist das Kniehl-Spektrum (doppelt durchgezogene Linie) mit dem elektrischen Dipolspektrum (2.33) (strichpunktierte Linie) und dessen Approximation (2.34) (punktierte Linie) dargestellt. Bei $x = 0.5$ ist das E1-Spektrum eine Zehnerpotenz grösser als das Kniehl-Spektrum. Es ist aber zu bedenken, dass für $x \sim 1$ beim E1-Spektrum ein exponentieller Cutoff einsetzt; bei der Approximation sogar schon bei $x \sim 0.68$.
Beim Dipol-Spektrum haben wir die in Gleichung (2.32) definierte Variable ξ mit x gleichgesetzt, da die maximale Photonenenergie nach Gleichung (2.26)

$$E_\gamma^{max} = \gamma \frac{\hbar c}{b_{min}}$$

ist und dies aus physikalischen Gründen die Energie des Protons sein muss.

Kapitel 4

Elementare Müonenpaarproduktion

Die äquivalenten Photonen-Approximation vereinfacht die Berechnung des Wirkungsquerschnitts für die Müonenpaarproduktion in peripheren pp-Kollisionen in der Weise, dass das Photonenspektrum des Protons sowie der Wirkungsquerschnitt für die Produktion

$$\gamma + \gamma \to \mu^+ + \mu^- \tag{4.1}$$

separat behandelt werden und anschliessend über das Produkt dieser beiden Grössen gemäss Gleichung (2.40) auf Seite 11 integriert wird. In den vorangehenden zwei Kapiteln haben wir uns mit den äquivalenten Photonenspektren befasst und mehrere Versionen bereitgestellt. In diesem Kapitel werden wir den unpolarisierten Wirkungsquerschnitt für die $\gamma\gamma$-Fusion (4.1) herleiten.
Die Formeln dieses Kapitels gelten für alle Leptonen, die elektromagnetische Wechselwirkung zeigen (Elektronen, Tauonen). In den Ausdrücken müssen einfach die Massen angepasst werden. Unsere Berechnungen beziehen sich aber nur auf das Müon.

4.1 Koordinatenunabhängige Formulierung

Die Müonenpaarproduktion (4.1) ist bis zur niedrigsten Ordnung in α durch die in Abbildung 4.1 dargestellte Summe zweier Feynman-Diagramme definiert. Mit den Polarisationsvektoren $\epsilon_\nu(k_1)$ und $\epsilon_\mu(k_2)$, die die eingehenden Photonen beschreiben, und den Spinoren $v^s(p_1)$ für μ^+ (ausgehend) und $\bar{u}^s(p_2)$ für μ^- (ausgehend) erhalten wir für die

Abbildung 4.1: Summe von Feynman-Diagrammen für die Müonenpaarproduktion

Übergangsamplitude

$$\begin{aligned}
iM &= \bar{u}^s(p_2)\epsilon_\mu(k_2)(ie\gamma^\mu)\left[\frac{i(\gamma_\alpha k_1^\alpha - \gamma_\beta p_1^\beta + m)}{(k_1-p_1)^2-m^2}\right](ie\gamma^\nu)\epsilon_\nu(k_1)v^s(p_1) \\
&\quad + \bar{u}^s(p_2)\epsilon_\nu(k_1)(ie\gamma^\nu)\left[\frac{i(\gamma_\alpha k_2^\alpha - \gamma_\beta p_1^\beta + m)}{(k_2-p_1)^2-m^2}\right](ie\gamma^\mu)\epsilon_\mu(k_2)v^s(p_1) \\
&= -ie^2\epsilon_\nu(k_1)\epsilon_\mu(k_2)\bar{u}^s(p_2) \\
&\quad \times\left[\frac{\gamma^\mu(\gamma_\alpha k_1^\alpha - \gamma_\beta p_1^\beta + m)\gamma^\nu}{(k_1-p_1)^2-m^2} + \frac{\gamma^\nu(\gamma_\alpha k_2^\alpha - \gamma_\beta p_1^\beta + m)\gamma^\mu}{(k_2-p_1)^2-m^2}\right]v^s(p_1) \\
&= -ie^2\epsilon_\nu(k_1)\epsilon_\mu(k_2)\bar{u}^s(p_2) \\
&\quad \times\left[\frac{\gamma^\mu\gamma_\alpha k_1^\alpha\gamma^\nu - 2\gamma^\mu p_1^\nu}{-2k_1p_1} + \frac{\gamma^\nu\gamma_\alpha k_2^\alpha\gamma^\mu - 2\gamma_\nu p_1^\mu}{-2k_2p_1}\right]v^s(p_1). \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

$|T|^2$ bezeichnet die quadrierte Übergangsamplitude, welche über die Polarisationen der Photonen gemittelt und über die Spins der Müonen addiert worden ist.

$$\begin{aligned}
|T|^2 &= \frac{1}{4}\sum_{s,\lambda}|M|^2 \\
&= \frac{e^4}{4}g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}(\gamma_\alpha p_2^\alpha + m)tr\left[\frac{\gamma^\mu\gamma_\alpha k_1^\alpha\gamma^\nu - 2\gamma^\mu p_1^\nu}{-2k_1p_1} + \frac{\gamma^\nu\gamma_\alpha k_2^\alpha\gamma^\mu - 2\gamma_\nu p_1^\mu}{-2k_2p_1}\right] \\
&\quad \times(\gamma_\beta p_1^\beta - m)\left[\frac{\gamma^\rho\gamma_\alpha k_1^\alpha\gamma^\sigma - 2\gamma^\rho p_1^\sigma}{-2k_1p_1} + \frac{\gamma^\sigma\gamma_\alpha k_2^\alpha\gamma^\rho - 2\gamma_\sigma p_1^\rho}{-2k_2p_1}\right] \\
&\ \ \vdots \\
&= 2e^4\left[\frac{p_1k_2}{p_1k_1} + \frac{p_1k_1}{p_1k_2} + 2m^2\left(\frac{1}{p_1k_2} + \frac{1}{p_1k_1}\right) - m^4\left(\frac{1}{p_1k_2} + \frac{1}{p_1k_1}\right)^2\right] \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Die Symmetrie der Müonenpaarproduktion bezüglich der beiden fusionierenden Photonen ist in Gleichung (4.3) klar ersichtlich und auch selbstverständlich, da sie als Prämisse in die Summe der Feynmann-Diagramme aus Abbildung 4.1 eingegangen ist.
Mit Gleichung (4.3) und dem allgemeinen Ausdruck für den differentiellen Wirkungsquerschnitt [Pe95]

$$\begin{aligned}
d\sigma_{\gamma\gamma} &= \frac{1}{|\epsilon_{\mu xy\nu}k_1^\mu k_2^\nu|} \\
&\quad \times\left(\frac{d^3\vec{p_1}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\varepsilon_1}\frac{d^3\vec{p_2}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\varepsilon_2}\right)|T|^2(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1+k_2-p_1-p_2) \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

ist die koordinatenunabhängige Formulierung der Müonenpaarproduktion in erschöpfender Weise behandelt.
Im Folgenden werden wir den Wirkungsquerschnitt für die $\gamma\gamma$-Fusion in zwei Koordinatensystemen auswerten: Zuerst im Schwerpunktsystem der Protonen; dann im Koordinatensystem, das durch die invariante Masse M der beiden Photonen sowie deren Rapidität Y definiert ist.

4.2 dσ im Schwerpunktsystem der Protonen

Die Ausbreitungsrichtung der Protonen des Prozesses (1.1) wählen wir in Richtung der z-Achse. Die äquivalenten Photonenfelder dieser Protonen bestehen nach Überlegungen in

Abbildung 4.2: Koordinaten im Schwerpunktsystem der Protonen. Die reellen Photonen k_1 und k_2 breiten sich parallel zur z-Achse aus. Die Müonenpaarproduktion ist rotationssymmetrisch um die Ausbreitungsrichtung der Protonen.

Kapitel 2 und Kapitel 3 in guter Näherung nur aus reellen Photonen. Deren transversale Impulse können vernachlässigt werden. Die Photonen k_1 und k_2 der Müonenpaarproduktion (4.1) breiten sich demnach parallel zur z-Achse aus (siehe Abbildung 4.2) und tragen im Allgemeinen unterschiedliche Energien ω_1 und ω_2.

$$k_1 = (\omega_1, \omega_1 \vec{e}_z) \tag{4.5}$$
$$k_2 = (\omega_2, -\omega_2 \vec{e}_z) \tag{4.6}$$

Die Viererimpulse der Müonen sind

$$p_1 = (\varepsilon_1, \vec{p}_1) \tag{4.7}$$
$$p_2 = (\varepsilon_2, \vec{p}_2). \tag{4.8}$$

Die Viererimpulserhaltung der soeben definierten Impulse der Müonenpaarproduktion liefert die kinematische Relation

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 \tilde{E}}{2\omega_1 - \hat{E}}$$

mit den Abkürzungen

$$\tilde{E} = \varepsilon_1 - p_1 \cos\theta$$
$$\hat{E} = \varepsilon_1 + p_1 \cos\theta.$$

Den Elementarwirkungsquerschnitt $d\sigma_{\gamma\gamma}$ berechnen wir etappenweise. Zunächst widmen wir die Aufmerksamkeit dem Quadrat der Übergangsamplitude (4.3). Einsetzen der Viererimpulse (4.5), (4.6) und (4.7) liefert

$$\begin{aligned} |T|^2 = 2e^2 \Bigg[& \frac{\omega_2(\varepsilon_1 + p_1\cos\theta)}{\omega_1(\varepsilon_1 - p_1\cos\theta)} + \frac{\omega_1(\varepsilon_1 - p_1\cos\theta)}{\omega_2(\varepsilon_1 + p_1\cos\theta)} \\ & + 2m^2 \left(\frac{1}{\omega_1(\varepsilon_1 - p_1\cos\theta)} + \frac{1}{\omega_2(\varepsilon_1 + p_1\cos\theta)} \right) \\ & - m^4 \left(\frac{1}{\omega_1(\varepsilon_1 - p_1\cos\theta)} + \frac{1}{\omega_2(\varepsilon_1 + p_1\cos\theta)} \right)^2 \Bigg]. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Der weitere Verlauf der Berechnung kann durch die Lorentzinvarianz von $|T|^2$ vereinfacht werden. Wir wechseln deshalb kurzzeitig in das Schwerpunktsystem der Photonen

$$\omega_1 = \omega_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \equiv \omega_0,$$

$$\begin{aligned}
|T|^2 &= 2e^2 \left[\frac{\omega_0(\omega_0 + p_1\cos\theta)}{\omega_0(\omega_0 - p_1\cos\theta)} + \frac{\omega_0(\omega_0 - p_1\cos\theta)}{\omega_0(\omega_0 + p_1\cos\theta)} \right. \\
&\quad +2m^2 \left(\frac{1}{\omega_0(\omega_0 - p_1\cos\theta)} + \frac{1}{\omega_0(\omega_0 + p_1\cos\theta)} \right) \\
&\quad \left. -m^4 \left(\frac{1}{\omega_0(\omega_0 - p_1\cos\theta)} + \frac{1}{\omega_0(\omega_0 + p_1\cos\theta)} \right)^2 \right] \\
&\vdots \\
&= 4e^2 \left[\frac{2\omega_0^2 - m^2 + (\omega_0^2 - m^2)\sin^2\theta}{m^2 + (\omega_0^2 - m^2)\sin^2\theta} - \frac{2(\omega_0^2 - m^2)^2\sin^4\theta}{(m^2 + (\omega_0^2 - m^2)\sin^2\theta)^2} \right] \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

und kommen wieder auf das ursprüngliche Koordinatensystem aus Abbildung 4.2 zurück

$$\begin{aligned}
|T|^2 &= 4e^2 \left\{ \frac{2\omega_1\omega_2 - m^2 + (\omega_1\omega_2 - m^2)\sin^2\theta}{m^2 + (\omega_1\omega_2 - m^2)\sin^2\theta} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2(\omega_1\omega_2 - m^2)^2\sin^4\theta}{(m^2 + (\omega_1\omega_2 - m^2)\sin^2\theta)^2} \right\}. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

In der zweiten Etappe setzen wir das Resultat (4.11) der ersten in den Elemtarwirkungsquerschnitt ein.

$$\begin{aligned}
\frac{d^6\sigma_{\gamma\gamma}}{d^3\vec{p_1}d^3\vec{p_2}} &= \frac{\alpha^2}{2}\frac{1}{\omega_1\omega_2}\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \left\{ \begin{array}{c} \text{siehe} \\ (4.11) \end{array} \right\} \\
&\quad \times\delta(\omega_1 + \omega_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)\delta^{(3)}((\omega_1 - \omega_2)\vec{e}_z - \vec{p_1} - \vec{p_2}) \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Integration über $d^3\vec{p_2}$ mit Hilfe der δ-Funktion des Dreierimpulses liefert den dreifach differentiellen Elementarwirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned}
\frac{d^3\sigma_{\gamma\gamma}}{d^3\vec{p_1}} &= \frac{\alpha^2}{2}\frac{1}{\omega_1\omega_2}\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \\
&\quad \times \left\{ \frac{2\omega_1\omega_2 - m^2 + (\omega_1\omega_2 - m^2)\sin^2\theta}{m^2 + (\omega_1\omega_2 - m^2)\sin^2\theta} - \frac{2(\omega_1\omega_2 - m^2)^2\sin^4\theta}{(m^2 + (\omega_1\omega_2 - m^2)\sin^2\theta)^2} \right\} \\
&\quad \times\delta(\omega_1 + \omega_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2). \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

Dieser Wirkungsquerschnitt wird im nächsten Kapitel gebraucht.

In dem Falle, dass die Ungleichung

$$(\omega_1\omega_2 - m^2)\sin^2\theta \gg m^2 \qquad (4.14)$$

gilt, kann der Elementarwirkungsquerschnitt (4.13) durch

$$\frac{d^3\sigma_{\gamma\gamma}}{d^3\vec{p_1}} = \frac{\alpha^2}{2}\frac{1}{\omega_1\omega_2}\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \left\{ \frac{2 - \sin^2\theta}{\sin^2\theta} \right\} \delta(\omega_1 + \omega_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \qquad (4.15)$$

approximiert werden. Diese Approximation ist für kleine Winkel θ ungültig. Andererseits wird sie umso besser, je grösser die invariante Masse der Photonen

$$M^2 = (k_1 + k_2)^2 = 4\omega_1\omega_2 \tag{4.16}$$

ist.

4.3 σ im MY-System der Photonen

In der äquivalenten Photonen-Approximation (bei Vernachlässigung der Transversalimpulse) ist die Rapidität Y der beiden Photonen durch

$$Y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \tag{4.17}$$

definiert. Ausgedrückt in den neuen Variablen M und Y sind die Photonenenergien

$$\omega_1 = \frac{M}{2}e^Y \tag{4.18}$$
$$\omega_2 = \frac{M}{2}e^{-Y} \tag{4.19}$$

und deren Differentiale

$$d\omega_1 = \frac{M}{2}e^Y dY \tag{4.20}$$
$$d\omega_2 = \frac{e^{-Y}}{2}dM. \tag{4.21}$$

Um den Elementarwirkungsquerschnitt in den neuen Variablen auszudrücken, weisen wir darauf hin, dass der allgemeine Ausdruck für den differentiellen Wirkungsquerschnitt (4.4 mit $|T|^2$ und dem invarianten Phasenraumelement $dPS_2(k_1, k_2; p_1, p_2)$ (siehe Definition (3.11)) sich aus zwei lorentzinvarianten Faktoren zusammensetzt und nur der Faktor

$$\frac{1}{|\epsilon_{\mu xy\nu}k_1^\mu k_2^\nu|}$$

aus der Reihe tanzt. Dieser ist invariant nur unter Transformationen entlang der z-Achse. Im Elementarwirkungsquerschnitt (4.13) ist der aus der Reihe tanzende Faktor im Wesentlichen durch

$$\frac{1}{\omega_1\omega_2}$$

gegeben. Wir drücken ihn direkt in der Variablen M aus.

$$\frac{1}{\omega_1\omega_2} = \frac{4}{M^2}$$

Der Rest von (4.13) ist lorentzinvariant. Es ist daher erlaubt, in das Schwerpunktsystem der Photonen zu wechseln (Transformation entlang der z-Achse!) und in diesem System über

$$d^3\vec{p}_1 = p_1\varepsilon_1 d\varepsilon_1 d\vartheta d(\cos\theta).$$

zu integrieren.

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \frac{2\alpha^2}{M^2}\int\int\int\frac{1}{\varepsilon_1^2}$$

Abbildung 4.3: Gesamtwirkungsquerschnitt der Müonenpaarproduktion im MY-System

$$
\begin{aligned}
& \times \left\{ \frac{2\omega_0^2 - m^2 + (\omega_0^2 - m^2)\sin^2\theta}{m^2 + (\omega_0^2 - m^2)\sin^2\theta} - \frac{2(\omega_0^2 - m^2)^2 \sin^4\theta}{(m^2 + (\omega_0^2 - m^2)\sin^2\theta)^2} \right\} \\
& \times \delta(2\omega_0 - 2\varepsilon_1) p_1 \varepsilon_1 d\varepsilon_1 d\vartheta d(\cos\theta) \\
= & \frac{2\pi\alpha^2}{M^2} \int \frac{p_1}{\omega_0} \\
& \times \left\{ \frac{2\omega_0^2 - m^2 + (\omega_0^2 - m^2)\sin^2\theta}{m^2 + (\omega_0^2 - m^2)\sin^2\theta} - \frac{2(\omega_0^2 - m^2)^2 \sin^4\theta}{(m^2 + (\omega_0^2 - m^2)\sin^2\theta)^2} \right\} d(\cos\theta) \\
& \vdots \\
= & \frac{4\pi\alpha^2}{M^2} \left\{ \left(2 + \frac{2m^2}{\omega_0^2} - \frac{m^4}{\omega_0^4} \right) \ln \left| \frac{\omega_0}{m} + \sqrt{\frac{\omega_0^2}{m^2} - 1} \right| - \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega_0^2}} \left(1 + \frac{m^2}{\omega_0^2} \right) \right\}
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

Die Integration über $d(\cos\theta)$ haben wir in Anhang C verlegt.
Der Gesamtwirkungsquerschnitt für die elementare Müonenpaarproduktion in der neuen 'Variable' M ist

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\gamma\gamma} = & \frac{4\pi\alpha^2}{M^2} \left\{ \left(2 + \frac{8m^2}{M^2} - \frac{16m^4}{M^4} \right) \right. \\
& \left. \times \ln \left| \frac{M}{2m} + \sqrt{\frac{M^2}{4m^2} - 1} \right| - \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \left(1 + \frac{4m^2}{M^2} \right) \right\}.
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Die Rapidität Y taucht im Elementarwirkungsquerschnitt nicht mehr auf. Wenn die Masse m entsprechend angepasst wird, gilt dieser Wirkungsquerschnitt auch für Elektronen und Tauonen.
Die M-Abhängigkeit des Gesamtwirkungsquerschnitts für die Müonenpaarproduktion ist in Abbildung 4.3 graphisch aufgetragen.

Kapitel 5

Müonenpaarproduktion in peripheren pp-Kollisionen

Alle Voraussetzungen sind nun vorhanden, um die Müonenpaarproduktionen in *pp*-Kollisionen mit Hilfe der äquivalenten Photonen-Approximation zu untersuchen. In diesem Kapitel stellen wir unsere numerischen Ergebnisse vor und interpretieren sie.

5.1 dσ im Schwerpunktsystem der Protonen

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Müonenpaarproduktion in peripheren *pp*-Kollisionen über den Mechanismus der $\gamma\gamma$-Fusion ist in der äquivalenten Photonen-Approximation durch Gleichung (2.40) auf Seite 11 gegeben. Den Elementarwirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem der Protonen (4.13) entnehmen wir dem Kapitel 4. Mit Hilfe der δ-Funktion wird über ω_2 integriert. Die kinematische Relation

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 \tilde{E}}{2\omega_1 - \hat{E}} \tag{5.1}$$

erlangt dadurch ihre Gültigkeit. Die Abkürzungen $\hat{E}$ und $\tilde{E}$ stehen für

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \varepsilon_1 + p_1 \cos\theta & (5.2)\\ \tilde{E} &= \varepsilon_1 - p_1 \cos\theta. & (5.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^3\sigma_{pp} &= \frac{\alpha^2}{2} \int\int \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(\omega_1\omega_2)^2} \frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2} n(\omega_1) n(\omega_2) \left\{ \begin{array}{c} \text{siehe} \\ (4.11) \end{array} \right\} \\ &\quad \times \delta(\omega_1 + \omega_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) d^3\vec{p}_1 \\ &= \frac{\alpha^2}{2} \int\int \frac{d\omega_1 d\omega_2'}{(\omega_1\omega_2')^2} \frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2} n(\omega_1) n(\omega_2') \left\{ \begin{array}{c} \text{siehe} \\ (4.11) \end{array} \right\} \\ &\quad \times \frac{\varepsilon_2}{(2\omega_1 - \hat{E})} \delta(\omega_2' - \omega_2) \varepsilon_1 p_1 d\varepsilon_1 d\Omega_1 \\ &= \frac{\alpha^2}{2} p_1 \int \frac{d\omega_1}{\omega_1^4} \frac{(2\omega_1 - \hat{E})}{\tilde{E}^2} n(\omega_1)\, n\left(\frac{\omega_1 \tilde{E}}{2\omega_1 - \hat{E}}\right) \left\{ \begin{array}{c} \text{siehe} \\ (4.11) \end{array} \right\} d\varepsilon_1 d\Omega_1 \end{aligned}$$

Die Integration über ω_1 muss numerisch durchgeführt werden. Da der der Wirkungsquerschnitt sowohl für μ^+ wie für μ^- gilt, lassen wir der Einfachheit halber die Indizes

Abbildung 5.1: Kinematische Relation

weg und erhalten den vollständig ausgeschriebenen, dreifach differentiellen Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem der Protonen.

$$\begin{aligned}\frac{d^3\sigma_{pp}}{d\varepsilon d\Omega} &= \frac{\alpha^2}{2}p\int_{\hat{E}/2}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega^4}\frac{(2\omega-\hat{E})}{\tilde{E}^2}n(\omega)\,n\left(\frac{\omega\tilde{E}}{2\omega-\hat{E}}\right)\\ &\quad\times\left\{\frac{2\omega\omega'-m^2+(\omega\omega'-m^2)\sin^2\theta}{m^2+(\omega\omega'-m^2)\sin^2\theta}-\frac{2(\omega\omega'-m^2)^2\sin^4\theta}{[m^2+(\omega\omega'-m^2)\sin^2\theta]^2}\right\}\\ &\quad\omega'=\frac{\omega\tilde{E}}{2\omega-\hat{E}}\end{aligned} \tag{5.4}$$

Im Wesentlichen ist dieser Wirkungsquerschnitt zweifach differentiell, da die Müonenpaarproduktion rotationssymmetrisch um die Ausbreitungsrichtung der Protonen ist.

$$\frac{d^2\sigma_{pp}}{d\varepsilon d(\cos\theta)}=2\pi\,\frac{d^3\sigma_{pp}}{d\varepsilon d\Omega} \tag{5.5}$$

Die untere Integrationsschranke in Gleichung (5.4) ergibt sich aus der kinematischen Relation (5.1) und der positiven Definitheit

$$\omega_1,\omega_2\geq 0$$

der Energie.
Wie in Abbildung 5.1 ersichtlich, folgt

$$\begin{aligned}\omega_1 &\geq \frac{\hat{E}}{2}\\ \omega_2 &\geq \frac{\tilde{E}}{2}.\end{aligned}$$

Der Wirkungsquerschnitt (5.4) ist bezüglich

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

symmetrisch, da

$$\hat{E}(\theta) = \tilde{E}(\pi - \theta)$$

gilt und der Wirkungsquerschnitt nicht von der Reihenfolge der Integration über die Photonenenergien ω_1 und ω_2 abhängt. Letzteres würde die Symmetrie des Prozesses bezüglich dem Austausch der beiden Photonen verletzen.

Wenn die Approximation des Elementarwirkungsquerschnittes (4.15) für den Fall $(\omega_1\omega_2 - m^2)\sin^2\theta \gg m^2$ und die Approximation (2.34) des Photonenspektrums in Gleichung (2.40) verwendet werden, ist auch die Integration über die zweite Photonenenergie durchführbar. Es folgt

$$\frac{d^2\sigma_{pp}}{d\varepsilon d\Omega} = Z^4\alpha^4 \frac{8}{3\pi^2}\frac{p}{\varepsilon^4}\left[\ln\left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon}\right)\right]^2 \frac{2-\sin^2\theta}{\sin^6\theta} \tag{5.6}$$

mit

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= 0.681\frac{\gamma}{R} \\ &= 0.681\gamma m, \end{aligned} \tag{5.7}$$

wobei R der Abschneideradius (2.38) ist. Siehe auch [Ba92], wo nur Elektronen betrachtet wurden.

Der differentiellen Wirkungsquerschnitt (5.4) ist auf ein bestimmtes Koordinatensystem festgelegt, die Wahl des Photonenspektrums aber noch nicht getroffen. Im Folgenden nutzen wir diese Freiheit und vergleichen die mit unterschiedlichen Spektren berechneten differentiellen Wirkungsquerschnitte miteinander.

5.1.1 Numerische Ergebnisse

In der ersten Phase der numerischen Auswertung haben wir die Müonenpaarproduktion unter Verwendung des vollen Kniehl-Spektrums (3.97) untersucht. Insbesondere die Winkel- und Energieverteilung des differentiellen Wirkungsquerschnitts (5.4) haben uns interessiert. Die Berechnung wurde in doppelter Genauigkeit in FORTRAN durchgeführt. Als vorgegebene Integrationsroutine haben wir DINTEG [DINT] verwendet. Die Genauigkeit der Integration des Wirkungsquerschnittes (5.4) über die Photonenenergie liegt bei Werten, die besser als 0.1% sind. Grosse Schwankungen bei der numerischen Auswertung des Kniehl-Spektrums für

$$x = \frac{\omega}{E_p} > 0.9993$$

hatten keinen Einfluss auf die Integrationsgenauigkeit, da es sich in diesem Bereich beim Photonenspektrum um sehr kleine absolute Werte handelt ($\sim 10^{-19}$). Ein Test für die Korrektheit unserer Berechnungen war die Symmetrie der Winkelverteilung um $\pi/2$.
Die durchgezogene Linie in Abbildung 5.2 stellt die Winkelverteilung der Müonenproduktion in pp-Kollisionen unter LHC-Bedingungen ($\gamma = 7000$) für verschiedene Müonenenergien und der Verwendung des vollen Kniehl-Spektrums dar. Es geht daraus hervor, dass die Müonenpaare bevorzugt entlang der z-Achse (Ausbreitungsrichtung der Protonen und Photonen) produziert werden. Dieses Verhalten ist umso ausgeprägter, je grösser die Energie des produzierten Müons ist.

Abbildung 5.2: Winkelabhängigkeit von $d^2\sigma/d\epsilon d\Omega$ für $\gamma = 7000$ und verschiedene Energien. Die Figuren sind im Text ausführlich erläutert.

Abbildung 5.3: Energieabhängigkeit von $d^2\sigma/d\epsilon d\Omega$ für $\gamma = 7000$ und verschiedene Winkel. Die Figuren sind im Text ausführlich erläutert.

Aus der Abbildung 5.3, die die Abhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnitts von der Energie der produzierten Müonen für verschiedene Winkel darstellt, ist ersichtlich, dass diejenige Müonenenergie, die für die Produktion eines Müons in einen fest vorgegebenen Winkel θ die wahrscheinlichste ist, mit zunehmendem Winkel

1. kleiner wird und

2. die Produktionswahrscheinlichkeit abnimmt.

Weiterhin ist klar, dass der Wirkungsquerschnitt erst bei der Energie

$$\varepsilon = m_\mu \cong 0.1056\mathrm{GeV}$$

einsetzt.
In der zweiten Phase der numerischen Auswertung haben wir den zweifach differentiellen Wirkungsquerschnitt (5.4) auf seine Abhängigkeit von der Wahl der Photonenspektren hin untersucht. In den Abbildungen 5.2 bis 5.5 bedeuten die punktgestrichelten Linien die Berechnung der Müonenpaarproduktion mit der für grosse Protonenenergien (ausser für kleine Winkel) sehr guten Approximation (5.6). Bei der punktierten Linie wurde vom Kniehl-Spektrum nur der Term

$$-y \ln\left(1 - \frac{1}{z}\right) \tag{5.8}$$

berücksichtigt.
Der Vergleich der durchgezogenen mit der punktgestrichenen Linie zeigt, dass die Produktionsrate der Müonenpaare, berechnet mit dem Kniehl-Spektrum, gegenüber derjenigen, die mit den Multipolspektren berechnet wurde, ungefähr um den Faktor 2 grösser ist! Die Berechnungen mit dem Kniehl-Spektrum zeigen also eine deutliche Differenz zu den Berechnungen mit den gewöhnlichen äquivalenten Photonenspektren. ('Gewönlich'

Abbildung 5.4: Energieabhängigkeit von $d^2\sigma/d\epsilon d\Omega$ für $\gamma = 7000$ und verschiedene Winkel.

Abbildung 5.5: Energieabhängigkeit von $d^2\sigma/d\epsilon d\Omega$ für $\gamma = 7000$ und verschiedene Winkel.

bedeutet hier, dass das Photonenspektrum (2.34) verwendet wird.)
Wenn wir die punktierte und die durchgezogene Linie miteinander vergleichen, bestätigt sich die Bemerkung am Ende des Kapitels 3, dass der Logarithmus-Term (5.8) im wesentlichen die Struktur des Kniehl-Spektrums wiedergibt, aber um einen gewissen Faktor zu gross ist.

5.2 dσ im MY-System der Photonen

Durch Einsetzen des elementaren Wirkungsquerschnitts (4.23) in die äquivalente Photonen-Approximation (2.40) und unter Verwendung der Gleichungen (4.18) bis (4.21) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma_{pp}}{dMdY} &= \frac{4\pi\alpha^2}{M^3}\, n\left(\frac{M}{2}e^{Y}\right) n\left(\frac{M}{2}e^{-Y}\right) \left\{ \left(2 + \frac{8m^2}{M^2} - \frac{16m^4}{M^4}\right) \right. \\ & \left. \times \ln\left|\frac{M}{2m} + \sqrt{\frac{M^2}{4m^2} - 1}\right| - \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}}\left(1 + \frac{4m^2}{M^2}\right) \right\} \end{aligned} \tag{5.9}$$

Dieser Wirkungsquerschnitt beschreibt die Müonenpaarproduktion in pp-Kollisionen in den Variablen Rapidität Y und invariante Masse M der beiden Photonen.

Im MY-System der Photonen haben wir nur mit dem Kniehl-Spektrum gearbeitet. Ein Test für die Korrektheit der Berechnungen ist die Symmetrie der Rapiditätsverteilung um 0. Sie tritt als Forderung auf, da die Vertauschung der beiden Photonen nichts am Prozess ändern darf. Siehe Gleichung (4.17).

Die Verteilung der invarianten Masse M ist durch ein ausgeprägtes Maximum in der Nähe der zweifachen Masse des Müons charakterisiert. Dieses Maximum entfernt sich

Abbildung 5.6: Rapiditätsabhängigkeit von $d^2\sigma/dY dM$ für $\gamma = 7000$ und verschiedene invariante Massen

mit zunehmender Rapidität von der Schwelle und wird grösser. Bei der Schwellenenergie

$$M = 2m_\mu \cong 0.2112\text{GeV}$$

ist $d^2\sigma/dY dM$ verständlicherweise auf Null abgefallen.

Abbildung 5.7: Abhängigkeit von der invariante Masse von $d^2\sigma/dY\,dM$ für $\gamma = 7000$ und verschiedene Rapiditätswerte

Kapitel 6

Inelastische pp-Kollisionen

Bisher sind wir davon ausgegangen, dass es sich bei den peripheren *pp*-Kollisionen um elastische Streuung der Protonen handelt. Bei der Berechnung des Photonenspektrums in Kapitel 3 haben wir deshalb das Proton P auch nach der Wechselwirkung mit dem Photon k als Proton der invarianten Masse $P'^2 = m^2$ betrachtet. Siehe Abbildung 3.1. Diese Annahme trifft für *pp*-Kollisionen unter LHC-Bedingungen (γ=7000) nicht vollständig zu [Ba96]. Das Proton wird teilweise inelastisch gestreut, wodurch die Protonen zum Beispiel zu kurzzeitigen Δ-Resonanzen angeregt werden können. Experimentell wird die Δ-Resonanz über die Zerfälle $\Delta^+ \rightarrow p^+ \, \pi^0$ und $\Delta^+ \rightarrow n \, \pi^+$ nachgewiesen.

Abbildung 6.1: Inelastisch-elastische pp-Kollision

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit dem Photonenspektrum des $p\Delta$-Übergangs und vergleichen dieses mit dem Kniehl-Spektrum der elastischen Streuung.

6.1 Photonenspektrum des $p\Delta$-Übergangs

K. Hencken hat in [He95] die äquivalente Photonen-Approximation für inelastische Streuung behandelt. Der Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt der *pp*-Kollision

$$d\sigma_{pp} = \int \frac{d\omega_1}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{\omega_2} n_1(\omega_1) n_2(\omega_2) d\sigma_{\gamma\gamma} \tag{6.1}$$

bleibt derselbe wie derjenige für die elastische. Siehe Gleichung (2.40). Die äquivalenten Photonenspektren der inelastischen Übergänge sind durch ((A7) in [He95])

$$n(\omega) = \int \frac{(-2\omega^2 C + k_\perp^2 P^2 D)}{(2\pi)^3 2EP(k^2)^2} d^2 k_2^\perp \tag{6.2}$$

gegeben, wobei C und D Parameter des Photonendichtetensors

$$\rho^{\mu\nu} = \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right) C + \left(P^\mu - \frac{kP}{k^2}k^\mu\right)\left(P^\nu - \frac{kP}{k^2}k^\nu\right) D \tag{6.3}$$

und Funktionen von Lorentzskalaren sind. Bei K. Hencken [He95] enthalten die Formfaktoren C und D - im Gegensatz zu [Bu75] - bereits den Faktor

$$4\pi\alpha = e^2.$$

Der Photonendichtetensor entspricht im Wesentlichen dem Tensor $X_{\mu\nu}$ aus Kapitel 3, der den inelastischen Prozess $e+\gamma \to X$ beschreibt. Durch Vergleich von (6.3) und (3.65) finden wir

$$\begin{aligned} C &\doteq -W_1 \\ D &\doteq W_2. \end{aligned}$$

E in Gleichung (6.3) ist die relativistische Energie des einfallenden Protons und

$$P = m\gamma\beta \tag{6.4}$$

der Betrag des Dreierimpulses desselben. $k_\perp$ ist durch

$$k^2 = -\left[k_{min}^2 + k_\perp^2\right] \tag{6.5}$$

definiert. Wenn der Impuls (6.4) und $E = \gamma m$ in Gleichung (6.2) eingesetzt und die LHC-Daten

$$\gamma = 7000$$

und

$$\beta \sim 1$$

berücksichtigt werden, vereinfacht sich das Photonenspektrum auf

$$\begin{aligned} n(\omega) &= \int \frac{(-2\omega^2 C + k_\perp^2 \gamma^2 m^2 D)}{(2\pi)^3 2\gamma^2 m^2 (k^2)^2} d^2 k_\perp \\ &\simeq \int \frac{k_\perp^2 D}{2(2\pi)^3 k^4} d^2 k_\perp . \end{aligned} \tag{6.6}$$

für Photonenenergien $\hbar\omega < \gamma m$.
Um den Formfaktor D für den $p\Delta$-Übergang zu bestimmen, beziehen wir uns auf G. Chanfray et al.. Er gibt in [Ch93] den hadronischen Tensor in der Form

$$W_{\mu\nu} = W_1^{Ch} A_{\mu\nu} + W_2^{Ch} B_{\mu\nu} \tag{6.7}$$

an, wobei

$$A_{\mu\nu} = -\left[g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right] \tag{6.8}$$

$$B_{\mu\nu} = \frac{\left(P^\mu - \frac{kP}{k^2}k^\mu\right)\left(P^\nu - \frac{kP}{k^2}k^\nu\right)}{m^2} \tag{6.9}$$

Abbildung 6.2: Vergleich der Photonenspektren von *pp*-Übergang (doppelt durchgezogene Linie), $p\Delta$-Übergang (einfach durchgezogene Linie) und der groben Näherung des $p\Delta$-Übergangs (gestrichelte Linie).

sind und wir die 'ict'-Metrik in [Ch93] bereits in unsere (siehe Gleichung (1.3)) übersetzt haben. Die Formfaktoren W_1^{Ch} und W_2^{Ch} werden in transversale und longitudinale Komponenten aufgespalten.

$$W_1^{Ch} = \frac{1}{2} R_T \tag{6.10}$$

$$W_2^{Ch} = -\left[-\frac{k^2}{\vec{k}^2} R_L + \frac{1}{2} R_T \right] \frac{k^2}{\vec{k}^2} \tag{6.11}$$

Für den $p\Delta$-Übergang sind diese Komponenten durch ((12) in [Ch93])

$$R_L = 0 \tag{6.12}$$

$$R_T = \frac{2}{9}\, G_M^{*2}(t)\, \frac{[(m^* - m)^2 - t]}{4m^2}\, \delta\left(\omega - \frac{m^{*2} - m^2 - t}{2m} \right) \tag{6.13}$$

gegeben, wobei $t = k^2$ und m^* die Masse der Deltaresonanz des Protons sind. Der Berechnung der Komponenten (6.12) und (6.13) liegt die Annahme zugrunde, dass es sich bei der Δ-Resonanz um einen stabilen Zustand handelt.
Unter Verwendung von

$$m^* = m + E_\Delta \cong 1232 \text{MeV} \tag{6.14}$$

(E_Δ=Anregungsenergie) und der Vernachlässigung von t und E_Δ^2 gegenüber m vereinfacht sich die transversale Komponente zu

$$R_T \simeq \frac{2}{9}\, G_M^{*2}(t)\, \frac{[E_\Delta^2 - t]}{4m^2}\, \delta(\omega - E_\Delta). \tag{6.15}$$

Der magnetische Formfaktor hat die Struktur

$$G_M^*(t) \quad = \quad \left(1 - \frac{t}{\Lambda^2}\right)^{-2} \mu^* \left(\frac{m^* + m}{2m}\right)^2 \tag{6.16}$$

mit dem Abschneideparameter des Protons

$$\Lambda^2 = 0.71 \mathrm{GeV}^2 \tag{6.17}$$

und dem magnetischen Übergangsmoment des $p\Delta$-Übergangs

$$\mu^* = 2 \cdot 4.71 = 9.42 \tag{6.18}$$

Durch Vergleich des Photonendichtetensors (6.3) mit dem hadronischen Tensor (6.7)

$$\rho_{\mu\nu}\delta(\omega - E_\Delta) = 16\pi\alpha m^2 W_{\mu\nu} \tag{6.19}$$

erhalten wir die Formfaktoren

$$C = -\frac{4\pi\alpha}{9}(E_\Delta^2 - t)G_M^{*2}(t) \tag{6.20}$$

und

$$D = -\frac{4\pi\alpha}{9}\frac{t}{m^2}G_M^{*2}(t). \tag{6.21}$$

Einsetzen des Formfaktors D in das Photonenspektrum (6.6) unter Verwendung von

$$dt = -2k_\perp dk_\perp$$

ergibt:

$$\begin{aligned} n_\Delta(\omega) &= \frac{\alpha}{4\pi}\frac{\mu^{*2}}{9m^2}\left(\frac{m^*+m}{2m}\right)^4 \Lambda^8 \int_{-t_{min}}^{-\infty} \frac{[t + t_{min}]}{t[\Lambda^2 - t]^4} dt \\ &= \frac{\alpha}{4\pi}\frac{\mu^{*2}}{9m^2}\left(\frac{m^*+m}{2m}\right)^4 \Lambda^8 \left\{ t_{min} \underbrace{\int_{-t_{min}}^{-\infty} \frac{dt}{t[\Lambda^2 - t]^4}}_{I_1} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\int_{-t_{min}}^{-\infty} \frac{dt}{[\Lambda^2 - t]^4}}_{I_2} \right\} \end{aligned} \tag{6.22}$$

Die Integrale I_1 und I_2 lassen sich analytisch lösen.

$$\begin{aligned} I_1|_{-t_{min}}^{-\infty} &= -\frac{1}{\Lambda^8}\left\{ \ln\left(\frac{\Lambda^2 - t}{t}\right) - \frac{3t}{(\Lambda^2 - t)} - \frac{3t^2}{2(\Lambda^2 - t)^2} - \frac{t^3}{3(\Lambda^2 - t)^3} \right\}\Bigg|_{-t_{min}}^{-\infty} \\ &= -\frac{1}{\Lambda^8}\left\{ \ln\left(\frac{t_{min}}{\Lambda^2 + t_{min}}\right) + \frac{11}{6} - \frac{3t_{min}}{(\Lambda^2 + t_{min})} + \frac{3t_{min}^2}{2(\Lambda^2 + t_{min})^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{t_{min}^3}{3(\Lambda^2 + t_{min})^3} \right\} \end{aligned} \tag{6.23}$$

$$\begin{aligned} I_2|_{-t_{min}}^{-\infty} &= \frac{1}{3}\frac{1}{(\Lambda^2 - t)^3}\Bigg|_{-t_{min}}^{-\infty} \\ &= -\frac{1}{3}\frac{1}{(\Lambda^2 + t_{min})^3} \end{aligned} \tag{6.24}$$

Mit diesen Integralen ergibt sich das Photonenspektrum für den $p\Delta$-Übergang.

$$\begin{aligned} n_\Delta(\omega) &= \frac{\alpha}{4\pi}\frac{\mu^{*2}}{9m^2}\left(\frac{m^*+m}{2m}\right)^4\left[t_{min}\left\{\ln\left(\frac{t_{min}}{\Lambda^2+t_{min}}\right)+\frac{11}{6}-\frac{3t_{min}}{(\Lambda^2+t_{min})}\right.\right. \\ &\quad \left.\left. +\frac{3t_{min}^2}{2(\Lambda^2+t_{min})^2}-\frac{t_{min}^3}{3(\Lambda^2+t_{min})^3}\right\}+\frac{\Lambda^8}{3}\frac{1}{(\Lambda^2+t_{min})^3}\right] \end{aligned} \tag{6.25}$$

Dieses Spektrum gilt für $\hbar\omega < \gamma m$. Der minimale Impulsübertrag bestimmt sich zu

$$t_{min} = \frac{\omega^2}{\gamma^2}+\frac{E_\Delta^2}{\gamma^2}+2\frac{\omega E_\Delta}{\gamma}. \tag{6.26}$$

In Abbildung 6.2 bedeutet die einfach durchgezogene Linie das Δ-Spektrum (6.25) während die doppelt durchgezogene Linie das Kniehl-Spektrum darstellt. Ab $\omega \sim 3500$GeV ($x \sim 0.5$) zieht das Δ-Spektrum mit dem Kniehl-Spektrum gleich und wird bald um ungefähr eine Zehnerpotenz mächtiger. Die Gültigkeitsgrenze für das betrachtete Δ-Spektrum ist $\omega < 7000$GeV.

Der Übergang des Protons zur Δ-Resonanz ist durch ein Spin-flip eines seiner Quarks gekennzeichnet. Dieser Spin-flip trägt ab $x \sim 0.5$ wesentlich zum Photonenspektrum bei. Die gestrichelte Linie in Abbildung 6.2 zeigt den wesentlichen Term des Δ-Spektrums (6.25). Für kleine Energien ist das Δ-Spektrum also durch

$$n_\Delta(\omega) \sim \frac{\alpha}{4\pi}\frac{\mu^{*2}}{9m^2}\left(\frac{m^*+m}{2m}\right)^4\frac{\Lambda^2}{3} \tag{6.27}$$

gegeben.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

In Kapitel 2 dieser Arbeit wurde das Hauptinstrument, mit welchem wir die Methode der Müonenpaarproduktion untersucht haben, hergeleitet: die Methode der äquivalenten Photonen. Aus der semiklassischen Betrachtungsweise ergeben sich auch erste Ausdrücke für die äquivalenten Photonenspektren, die sogenannten Multipolspektren, welche von der Multipolarität der Strahlung abhängen.
In Kapitel 3 haben wir das quantenmechanisch korrekte, äquivalente Photonenspektrum des Protons hergeleitet; als phänomenologische Grössen gehen in dieses zwei Formfaktoren ein, die die Unkenntnis des Einflusses der starken Wechselwirkung parametrisieren.
Kapitel 4 stellt den Elementarwirkungsquerschnitt für die Produktion eines Müonenpaares durch die $\gamma\gamma$-Fusion zur Verfügung.
Im Kapitel 5 geben wir eine vollständige Übersicht über die Winkel- und Energieverteilungen der Müonenpaarproduktion in pp-Kollisionen. Das Hauptergebnis ist, dass die Müonen-Spektren, welche mit dem quantenmechanisch korrekten, äquivalenten Photonenspektrum berechnet wurden, um ungefähr einen Faktor 2 grösser sind als diejenigen, welchen die semiklassischen, äquivalenten Photonenspektren zugrunde gelegt wurden. - Die Abhängigkeit der zweifach differentiellen Wirkungsquerschnitte von den transversalen Impulskomponenten haben wir stets vernachlässigt.
Im Kapitel 6 wurde schliesslich die Wichtigkeit des $p\Delta$-Übergangs für die Müonenpaarproduktion in pp-Kollisionen demonstriert; insbesondere für $x > 0.5$.

Eine zukünftige Aufgabe und Herausforderung ist es, sich einen Überblick über den Einfluss weiterer, bzw. aller Nukleonresonanzen auf die Müonenpaarproduktion zu erarbeiten.

Insgesamt können wir schlussfolgern, dass sich die Müonenpaarproduktion als guter Luminositätsmonitor in pp-Kollisionen eignet, sofern die $\mu^+\mu^-$-Paare genau gemessen werden können. Wenn dies nicht der Fall sein sollte, ist mit unseren Ergebnissen der $\mu^+\mu^-$-Background gut verstanden.

Anhang A

Bessel-Funktionen

A.1 Bessel-Funktionen erster, zweiter und dritter Art

Lösungen der Bessel'schen Differenzialgleichung

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0 \tag{A.1}$$

sind die Bessel-Funktionen erster Art der Ordnung $\pm n$

Abbildung A.1: Bessel-Funktionen erster Art

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\Gamma(j+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \tag{A.2}$$

$$J_{-n}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\Gamma(j-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \tag{A.3}$$

Ist n keine ganze Zahl, so stellen $J_{\pm n}(x)$ zwei linear unabhängige Lösungen dar. Für ganzzahlige n sind die beiden Lösungen jedoch linear abhängig.

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x) \qquad \text{für} \quad n \in \{0, 1, 2, 3, ...\} \tag{A.4}$$

Selbst für nicht ganzzahlige n wird deshalb das Paar $J_{\pm n}(x)$ durch $J_n(x)$ und die Bessel-Funktion zweiter Art

$$N_n(x) = \frac{J_n(x)\cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)} \tag{A.5}$$

ersetzt. $J_n(x)$ und $N_n(x)$ sind auch für ganzzahlige n linear unabhängig.
Die Bessel-Funktionen dritter Art sind als Linearkombinationen von $J_n(x)$ und $N_n(x)$ definiert.

$$H_n^{(1)(x)} = J_n(x) + iN_n(x) \tag{A.6}$$
$$H_n^{(2)(x)} = J_n(x) - iN_n(x) \tag{A.7}$$

A.2 Modifizierte Bessel-Funktionen

Lösungen der Differenzialgleichung

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + n^2)y = 0 \tag{A.8}$$

sind die modifizierten Bessel-Funktionen, die nichts anderes sind als die Bessel-Funktionen mit rein imaginären Argument. Als linear unabhängige Lösungen wählt man im Allgemeinen die mit $I_n(x)$ und $K_n(x)$ bezeichneten Funktionen

Abbildung A.2: modifizierte Bessel-Funktionen

$$I_n(x) = i^{-n}\, J_n(ix) \tag{A.9}$$
$$K_n(x) = \frac{\pi}{2}\, i^{n+1}\, H_n^{(1)}(ix), \tag{A.10}$$

die für reelle x und n reelle Funktionen sind.
Die asymptotischen Darstellungen für grosse und kleine x-Werte haben für reelles $n \geq 0$ die Gestalt

$$x \ll 1 \quad I_n(x) \quad \to \quad \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^n \tag{A.11}$$

$$x \ll 1 \quad K_n(x) \quad \to \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + C\right], & n = 0 \\ \\ \frac{\Gamma(n)}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^n, & n \neq 0 \end{array} \right\} \tag{A.12}$$

$$x \gg 1 \quad I_n(x) \quad \to \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \tag{A.13}$$

$$x \gg 1 \quad K_n(x) \quad \to \quad \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \tag{A.14}$$

mit der Eulerschen Konstante $C = 0.5772...$.

Anhang B

Multipolspektren

Alle Funktionen, die in der Übergangsamplitude (2.43) oder dem äquivalenten Photonenspektrum (2.49) auftreten, sind in [Wi79, Be88] hergeleitet bzw. angegeben worden. Die modifizierten Bessel-Funktionen K_m haben wir in Anhang A behandelt.

B.1 $G_{\pi lm}$

A. Winther und K. Alder haben die relativistisch kinematischen Funktionen $G_{\pi lm}(x)$, wobei $x = c/v$ ist, als erste in [Wi79] berechnet. $G_{\pi lm}(x)$ können durch die Legendre-Polynome $P_l^m(x)$ ausgedrückt werden und lauten für $x > 1$ und $m \geq 0$

$$\begin{aligned} G_{Elm}(x) &= i^{l+m} \frac{\sqrt{16\pi}}{l(2l+1)!!} \left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{\frac{1}{2}} \left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \left\{ \frac{(l+1)(l+m)}{2l+1} P_{l-1}^m(x) - \frac{l(l-m+1)}{2l+1} P_{l+1}^m(x) \right\} \end{aligned} \tag{B.1}$$

$$G_{Mlm}(x) = i^{l+m+1} \frac{\sqrt{16\pi}}{l(2l+1)!!} \left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{\frac{1}{2}} \left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}} m P_l^m(x). \tag{B.2}$$

Für $m < 0$ sind sie durch

$$G_{El,-m}(x) = (-1)^m G_{Elm}(x) \tag{B.3}$$

$$G_{Ml,-m}(x) = (-1)^{m+1} G_{Mlm}(x) \tag{B.4}$$

gegeben. Im nicht-relativistischen Grenzfall $x \gg 1$ finden wir

$$G_{Elm}(x) = i^{l+m} \frac{\sqrt{16\pi}}{2l+1} \frac{(\frac{c}{v})^l}{[(l+m)!(l-m)!]^{\frac{1}{2}}} \tag{B.5}$$

$$G_{Mlm}(x) = i^{l+m+1} \frac{m}{l} \frac{\sqrt{16\pi}}{2l+1} \frac{(\frac{c}{v})^{l-1}}{[(l+m)!(l-m)!]^{\frac{1}{2}}} \tag{B.6}$$

Für die ab Seite 13 berechneten E1-, E2-, M1- und M2-Spektren äquivalenter Photonen geben wir $G_{\pi lm}(x)$ für $l \leq 2$ in expliziter Form an.

$$\begin{aligned} G_{E11}(x) &= \frac{1}{3}\sqrt{8\pi}\, x \\ G_{E10}(x) &= -i\,\frac{4}{3}\sqrt{\pi(x^2-1)} \end{aligned}$$

$$G_{M11}(x) = -i\,\frac{1}{3}\sqrt{8\pi}$$

$$
\begin{aligned}
G_{M10}(x) &= 0 \\
G_{E22}(x) &= -\frac{2}{5}\,x\sqrt{\frac{\pi(x^2-1)}{6}} \\
G_{E21}(x) &= i\,\frac{2}{5}\sqrt{\frac{\pi}{6}}\left(2x^2-1\right) \\
G_{E20}(x) &= \frac{2}{5}\,x\sqrt{\pi(x^2-1)} \\
G_{M22}(x) &= i\,\frac{2}{5}\sqrt{\frac{\pi(x^2-1)}{6}} \\
G_{M21}(x) &= \frac{2}{5}\,x\sqrt{\frac{\pi}{6}} \\
G_{M20}(x) &= 0
\end{aligned}
$$

Der Rest folgt aus B.3 und B.4.

B.2 $M(\pi, l, m)$ und κ

Die Multipolmatrixelemente $M(\pi, l, m)$ sind für elektrische Anregungen durch

$$M(E, l, m) = \frac{(2l+1)!!}{\kappa^{l+1}c(l+1)} \int \vec{j}(\vec{r}) \cdot \nabla \times \vec{L}[J_l(\kappa r)Y_{lm}(\hat{r})]d^3r \tag{B.7}$$

und für magnetische durch

$$M(M, l, m) = -i\frac{(2l+1)!!}{\kappa^{l+1}c(l+1)} \int \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{L}[J_l(\kappa r)Y_{lm}(\hat{r})]d^3r \tag{B.8}$$

definiert, wobei der Faktor

$$\kappa = \frac{\omega}{c} \tag{B.9}$$

und die Besselfunktionen erster Art $J_l(\kappa r)$ sowie die Kugelfunktionen $Y_{lm}(\hat{r})$ benutzt wurden.

B.3 $B(\pi l)$

Die reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit ist durch

$$B(\pi l, I_i \to I_f) = \frac{1}{2I_i+1} \sum_{M_i M_f} | < I_f M_f | M(\pi l m) | I_i M_i > |^2 \tag{B.10}$$

definiert.

B.4 $g_m(x)$

$$
\begin{aligned}
g_m(\xi) &= g_{-m}(\xi) \\
&= 2\pi\left(\frac{\omega}{\gamma v}\right)^2 \int_{b_{min}}^{\infty} b\,db\,[K_m(\xi)]^2 \\
&= \pi\xi^2\left[K_{m+1}(\xi)K_{m-1}(\xi) - [K_m(\xi)]^2\right] \qquad \text{(B.11)}
\end{aligned}
$$

$$\xi = \frac{\omega b_{min}}{\gamma v} \tag{B.12}$$

Im Grenzfall $\xi \ll 1$ reduziert sich B.11 auf

$$g_m = \left\{ \begin{array}{lll} \pi(m-1)[(m-2)!]^2 \left(\frac{2}{\xi}\right)^{2m-2} & \text{für} & m > 1 \\ \pi \ln\left[\left(\frac{\delta}{\xi}\right)^2 + 1\right] & \text{für} & m = 1 \\ \pi & \text{für} & m = 0 \end{array} \right\} \tag{B.13}$$

mit $\delta = 0.681085...$.

Anhang C

Integration des Elementarwirkungsquerschnitts

In der Gleichungskette (4.22) wird über

$$x = \cos\theta \tag{C.1}$$

integriert. Wir vollziehen diese Integration hier in ihren Details nach.

$$\begin{aligned}
\sigma_{\gamma\gamma} &= \frac{2\pi\alpha^2}{M^2}\int\frac{p_1}{\omega_0} \\
&\quad\times\left\{\frac{2\omega_0^2-m^2+(\omega_0^2-m^2)(1-x^2)}{m^2+(\omega_0^2-m^2)(1-x^2)}-\frac{2(\omega_0^2-m^2)^2(1-x^2)^2}{[m^2+(\omega_0^2-m^2)(1-x^2)]^2}\right\}dx \\
&= \frac{2\pi\alpha^2}{M^2}\int\frac{p_1}{\omega_0}\left\{\frac{3\omega_0^2-2m^2-(\omega_0^2-m^2)x^2}{\omega_0^2-(\omega_0^2-m^2)x^2}\right. \\
&\quad\left.-\frac{2(\omega_0^2-m^2)^2-4(\omega_0^2-m^2)^2x^2+2(\omega_0^2-m^2)^2x^4}{[\omega_0^2-(\omega_0^2-m^2)x^2]^2}\right\}dx \\
&= \frac{2\pi\alpha^2}{M^2}\int\frac{p_1}{\omega_0}\left\{\frac{\left(\frac{3\omega_0^2-2m^2}{\omega_0^2-m^2}\right)-x^2}{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-m^2}\right)-x^2}-\frac{2-4x^2+2x^4}{\left[\frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2-m^2)}-x^2\right]^2}\right\}dx \\
&= \frac{2\pi\alpha^2}{M^2}\frac{p_1}{\omega_0}\left\{\frac{3\omega_0^2-m^2}{\omega_0^2-m^2}\int_1^{-1}\frac{dx}{a^2-x^2}-\int_1^{-1}\frac{x^2dx}{a^2-x^2}-2\int_1^{-1}\frac{dx}{(a^2-x^2)^2}\right. \\
&\quad\left.+4\int_1^{-1}\frac{x^2dx}{(a^2-x^2)^2}-2\int_1^{-1}\frac{x^4dx}{(a^2-x^2)^2}\right\}
\end{aligned} \tag{C.2}$$

mit

$$a = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-m^2} = \frac{\omega_0^2}{p_1^2} \tag{C.3}$$

Alle auftretenden Integrale sind analytisch lösbar und ergeben:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\gamma\gamma} &= \frac{2\pi\alpha^2}{M^2}\frac{p_1}{\omega_0}\left\{\frac{3\omega_0^2-m^2}{p_1\omega_0}2\ln(A)-\left((-2)+\frac{\omega_0}{p_1}2\ln(A)\right)\right. \\
&\quad -2\left(\frac{p_1^4}{\omega_0^2m^2}+\frac{p_1^3}{\omega_0^3}\ln(A)\right)+4\left(\frac{p_1^2}{m^2}-\frac{p_1}{\omega_0}\ln(A)\right) \\
&\quad\left.-2\left(2+\frac{\omega_0^2}{m^2}-3\frac{\omega_0}{p_1}\ln(A)\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\pi\alpha^2}{M^2}\frac{p_1}{\omega_0}\left\{\left[2\frac{3\omega_0^2 - m^2}{p_1\omega_0} - 2\frac{\omega_0}{p_1} - 2\frac{p_1^3}{\omega_0^3} - 4\frac{p_1}{\omega_0} + 6\frac{\omega_0}{p_1}\right]\ln(A)\right. \\ &\quad \left. + \left[2 - \frac{2p_1^4}{\omega_0^2 m^2} + \frac{4p_1^2}{m^2} - 4 - \frac{2\omega_0^2}{m^2}\right]\right\} \end{aligned} \tag{C.4}$$

mit der Abkürzung

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{\omega_0 + p_1}{\omega_0 - p_1}} \\ &= \frac{\omega_0}{m} + \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{m^2} - 1\right)}. \end{aligned} \tag{C.5}$$

Mit

$$\left[2\frac{3\omega_0^2 - m^2}{p_1\omega_0} - 2\frac{\omega_0}{p_1} - 2\frac{p_1^3}{\omega_0^3} - 4\frac{p_1}{\omega_0} + 6\frac{\omega_0}{p_1}\right] = 2\frac{\omega_0}{p_1}\left[2 + 2\frac{m^2}{\omega_0^2} - \frac{m^4}{\omega_0^4}\right] \tag{C.6}$$

und

$$\left[2 - \frac{2p_1^4}{\omega_0^2 m^2} + \frac{4p_1^2}{m^2} - 4 - \frac{2\omega_0^2}{m^2}\right] = (-2)\left[1 + \frac{m^2}{\omega_0^2}\right] \tag{C.7}$$

erhalten wir das Schlussresultat:

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\gamma} &= \frac{4\pi\alpha^2}{M^2}\left\{\left(2 + \frac{2m^2}{\omega_0^2} - \frac{2m^4}{\omega_0^4}\right)\right. \\ &\quad \left. \times \ln\left|\frac{\omega_0}{m} + \sqrt{\frac{\omega_0^2}{m^2} - 1}\right| - \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega_0^2}}\left(1 + \frac{m^2}{\omega_0^2}\right)\right\} \end{aligned} \tag{C.8}$$

Siehe Gleichung (4.22).

Literaturverzeichnis

[As93] A. Aste, *Elektron-Positron-Paarerzeugung.* Diplomarbeit, Universität Basel, 1993

[Ba92] N. Baron and G. Baur, *Phys. Rev.*, D46(1992) R3699.

[Ba96] G. Baur, *private communication.*
K. Eggert and A. Morsch, *A Full Acceptance Experiment at Cern LHC*, (unpuplished).

[Ba] Niels Ch. Baron, *Photon-Photon und Photon-Hadron Prozesse in relativistischen Schwerionenkollisionen*, Doktorarbeit, Forschungszentrum Jülich.

[Be88] C. A. Bertulani and G. Baur, *Phys. Rep.*, 163(1988) 299.

[Bu75] V. M. Budnev, I. F. Ginzburg, G. V. Meledin, V. G. Serbo, *Phys. Rep.*, 15(1975)181.

[Ch93] G. Chanfray et al., *Nucl. Phys.*, A556(1993) 439.

[DINT] DINTEG ist eine Gauss'sche Integrationsroutine von D. Trautmann

[Fe24] E. Fermi, *Zs. f. Phys.*, 29(1924) 315.

[Gr65] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products.* Academic Press, NY, 1965.

[Gr95] W. Greiner und J. Reinhardt *Theoretische Physik, Band 7, Quantenelektrodynamik.* 2. Auflage, Harri Deutsch, 1995.

[Ha84] F. Halzen and A. D. Martin, *Quarks and Leptons.* John Wiley, NY, 1984.

[He95] K. Hencken, D. Trautmann and G. Baur, *Zs. f. Phys.*, C68(1995) 473.

[He96] K. Hencken, D. Trautmann and G. Baur, *Phys. Rev. C*, 53(1996) 2532.

[Ho84] B. Hoffmann and G. Baur, *Phys. Rev.*, C30(1984) 247.

[Ja75] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics.* John Wiley, NY, 1975.

[Kn91] B. A. Kniehl, *Phys. Lett.*, B254(1991) 267.

[La91] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik IV, Quantenelektrodynamik.* Akademie Verlag, 1991.

[Me96] H. Meier et al. *Pair Production by Bremsstrahlung.* (to be published)

[Pe95] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory.* Addison-Wesley, 1995.

[Sch48] J. Schwinger, *Phys. Rev.*, 73(1948) 416L.

[We34] C. F. von Weizsäcker, *Zs. f. Phys.*, 88(1934) 612.

[Wi34] E. J. Williams, *Phys. Rev.*, 45(1934) 729.

[Wi79] A. Winther and K. Alder, *Nucl. Phys.*, A319(1979) 518.