

Variation der Diagonalen bei den umstülpbaren Modellen der Platonischen Körper*

Oliver Conradt und Klaus Ernhofer

PAUL SCHATZ hat beim Bau der Turbula-Mischmaschine technisch ausgenutzt, dass bei der sechsgliedrigen Kette des umstülpbaren Würfels die Diagonalenlänge während des Umstülpvorganges konstant bleibt [4]. Durch die Arbeiten von KLAUS ERNHOFER ist bekannt, dass den fünf Platonischen Körpern auf zwölf verschiedene Arten umstülpbare, sechsgliedrige Modelle entnommen werden können [3, S. 74]. Die letzteren sind allesamt Gelenkringe mit Zwangslauf, die durch den Winkel ψ , der durch zwei aufeinanderfolgende Drehachsen gebildet wird, charakterisiert werden. Diese Gelenkringe lassen sich auch losgelöst von den Platonischen Körpern betrachten, indem die bei den genannten Modellen auftretenden Eigenschaften als gegeben vorausgesetzt sowie der Winkel ψ (zunächst) beliebig als Bedingung vorgegeben werden. Die Diagonalen für die sechsgliedrigen Gelenkringe mit beliebigem Winkel ψ können so analytisch bestimmt werden. Es stellt sich heraus, dass die Diagonalenlänge nur beim umstülpbaren Würfel ($\psi = 90^\circ$) konstant bleibt. In den restlichen Fällen variiert sie mit der Umstülpbewegung. Und zwar nimmt die Variation kontinuierlich zu, je weiter sich der für den Gelenkring charakteristische Winkel ψ von 90° entfernt.

Der Bestimmung der Diagonalenlänge liegen Drehungen bezüglich willkürlich vorgegebener Achsen im Raum zugrunde. Diese Drehungen werden mit Hilfe der geometrischen Algebra im Anhang A formuliert, um sie im Abschnitt 4 anwenden zu können.

Bei der graphischen Darstellung der Ergebnisse haben wir uns auf die Winkel $\psi = 90^\circ$, 72° und 60° beschränkt. Die beiden letzteren werden in einem zur Zeit laufenden Forschungsprojekt von Klaus Ernhofer auf technische Anwendbarkeit hin untersucht.

1 Voraussetzungen

Gegeben sei ein sechsgliedriger Gelenkring mit folgenden Eigenschaften:

*Erschienen in *Mathematisch-Physikalische Korrespondenz* Nr. 211, S. 13-24, 2002.

1. Alle Glieder sind gleich lang: $l_i \equiv l \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. Die Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Drehachsen sind alle gleich gross: $\psi_i \equiv \psi \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3. Jedes Paar gegenüberliegender Drehachsen a_i und a_{i+3} liegt in jedem Bewegungszustand des Gelenkringes in einer gemeinsamen Ebene $E_{i,i+3}$. Diese drei Ebenen gehören einem Ebenenbüschel an, dessen Trägergerade s die Symmetrieachse des Gelenkringes darstellt. Alle drei Ebenen schliessen jeweils einen 60° -Winkel ein.
4. Die Drehachsen a_1, a_3, a_5 gehören in jedem Bewegungszustand einem Strahlenbündel an, dessen Trägerpunkt U auf der Symmetrieachse s liegt. Entsprechend gehören die Drehachsen a_2, a_4, a_6 einem zweiten Strahlenbüschel an, dessen Träger V auch auf der Symmetrieachse liegt.
5. Der Gelenkring geht in jedem Bewegungszustand bei einer Drehung von 120° um die Symmetrieachse s in sich selbst über.

2 Bezeichnungen

l	Länge der Glieder
ψ	Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Drehachsen
a_i	i -te Drehachse
\mathbf{a}_i	Richtungsvektor der i -ten Drehachse
M_i	Mittelpunkt der i -ten Drehachse
ω_1	Winkel zwischen den Gliedern $\overline{M_6M_1}$ und $\overline{M_1M_2}$
ω_2	Winkel zwischen den Gliedern $\overline{M_3M_4}$ und $\overline{M_4M_5}$

3 Ansatz

Die drei Drehachsenmittelpunkte M_1, M_3, M_5 liegen wegen der dreizähligen Symmetrie in einer Ebene, die senkrecht auf der Symmetrieachse s steht. Entsprechendes gilt für die drei anderen Mittelpunkte. Wir legen nun fest, dass die Mittelpunkte M_1, M_3, M_5 in die xy -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems zu liegen kommen und die Symmetrieachse s mit der z -Achse zusammenfallen soll. Die sechs Mittelpunkte M_i , die Schnittpunkte U und V und die sechs Richtungsvektoren \mathbf{a}_i der Drehachsen lassen sich

daher folgendermassen ansetzen:

$$\begin{aligned} M_1(0/-R_U/0), \quad R_U \geq 0, & \quad M_2(R_V \cos 30^\circ / -R_V \sin 30^\circ / z), \\ M_3(R_U \cos 30^\circ / R_U \sin 30^\circ / 0), & \quad M_4(0/R_V/z), \quad R_V \geq 0, \\ M_5(-R_U \cos 30^\circ / R_U \sin 30^\circ / 0), & \quad M_6(-R_V \cos 30^\circ / -R_V \sin 30^\circ / z), \end{aligned}$$

$$U(0/0/R_U \tan \alpha), \quad V(0/0/-R_V \tan \beta + z),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, & \mathbf{a}_2 &= \begin{pmatrix} -\cos 30^\circ \cos \beta \\ \sin 30^\circ \cos \beta \\ -\sin \beta \end{pmatrix}, \\ \mathbf{a}_3 &= \begin{pmatrix} -\cos 30^\circ \cos \alpha \\ -\sin 30^\circ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, & \mathbf{a}_4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \beta \\ -\sin \beta \end{pmatrix}, \\ \mathbf{a}_5 &= \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \cos \alpha \\ -\sin 30^\circ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, & \mathbf{a}_6 &= \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \cos \beta \\ \sin 30^\circ \cos \beta \\ -\sin \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wenn der Mittelpunkt M_2 bezüglich der Achse a_1 in die yz -Ebene gedreht wird, so soll er mit dem Punkt S_1 zusammenfallen; entsprechend kann M_3 bezüglich der Achse a_4 in die yz -Ebene gedreht werden und kommt in den Punkt S_2 zu liegen,

$$S_1(0/-(R_U + l \sin \alpha)/l \cos \alpha), \quad S_2(0/(R_V - l \sin \beta)/(z + l \cos \beta)).$$

Wenn wir den Winkel α als Parameter für die Umstülpbewegung nehmen, bleiben noch die vier Grössen β , $R_U \geq 0$, $R_V \geq 0$, z und die beiden Winkel ω_1 und ω_2 in Abhängigkeit von α zu bestimmen.

4 Bedingungen

Der Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Drehachsen soll ψ sein:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 &= \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_5 \cdot \mathbf{a}_6 = \mathbf{a}_6 \cdot \mathbf{a}_1 = \\ &= \frac{1}{2} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \stackrel{!}{=} \cos \psi. \end{aligned} \quad (1)$$

Wenn der Punkt S_1 bezüglich der Drehachse a_1 um den Winkel $\omega_1/2$ gedreht¹ wird, ergibt sich der Mittelpunkt M_2 :

$$\begin{aligned} D\left(\overrightarrow{OS_1}, \frac{\omega_1}{2}, a_1\right) &= \begin{pmatrix} l \sin\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \\ -R_U - l \sin\alpha \cdot \cos\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \\ l \cos\alpha \cdot \cos\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}R_V \\ -\frac{1}{2}R_V \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OM_2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Wenn der Punkt S_2 bezüglich der Drehachse a_4 um den Winkel $\omega_2/2$ gedreht wird, ergibt sich der Mittelpunkt M_3 :

$$\begin{aligned} D\left(\overrightarrow{OS_2}, \frac{\omega_2}{2}, a_4\right) &= \begin{pmatrix} l \sin\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \\ R_V - l \sin\beta \cdot \cos\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \\ z + l \cos\beta \cdot \cos\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}R_U \\ \frac{1}{2}R_U \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OM_3}. \end{aligned} \quad (3)$$

5 Lösungsweg

Aus der Bedingung 1 lässt sich der Winkel β in Abhängigkeit von den Parametern α und ψ berechnen. Die Gleichung 1 kann auf die Form

$$A \cos\beta + B \sin\beta + C = 0 \quad (4)$$

mit den Koeffizienten $A = \cos\alpha$, $B = -2 \sin\alpha$ und $C = -2 \cos\psi$ gebracht werden. Mit den Zwischenschritten

$$\begin{aligned} A^2 \cos^2\beta &= B^2 \sin^2\beta + 2BC \sin\beta + C^2, \\ A^2 - A^2 \sin^2\beta &= B^2 \sin^2\beta + 2BC \sin\beta + C^2, \\ 0 &= (A^2 + B^2) \sin^2\beta + 2BC \sin\beta - A^2 + C^2 \end{aligned}$$

erhalten wir die beiden Sinuswerte

$$\sin(\beta_{1/2}) = \frac{-BC \pm A\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2}$$

¹Die Drehung D ist im Anhang A mit Hilfe der geometrischen Algebra hergeleitet und formuliert.

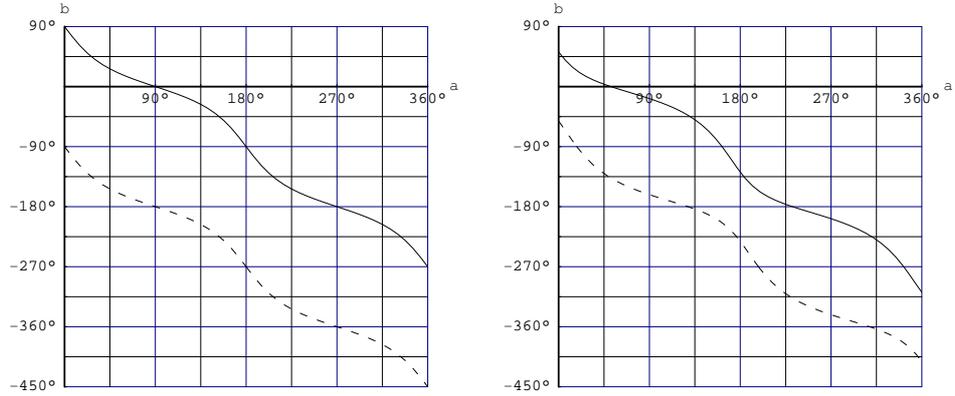


Abbildung 1: In den beiden Graphen ist die Abhängigkeit der Winkel β_1 (durchgezogen) bzw. β_2 (gestrichelt) von α für die zwei Fälle $\psi = 90^\circ$ (links) und $\psi = 72^\circ$ (rechts) aufgetragen.

und durch Einsetzen in Gleichung 4 die zugehörigen Cosinuswerte

$$\cos(\beta_{1/2}) = -\frac{B \sin(\beta_{1/2}) + C}{A} = \frac{-AC \mp B\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{A^2 + B^2}.$$

Mit den Koeffizienten der Bedingungsgleichung 1 erhalten wir

$$\sin(\beta_{1/2}) = \frac{-4 \sin \alpha \cos \psi \pm \cos \alpha \sqrt{\cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - 4 \cos^2 \psi}}{\cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha}, \quad (5a)$$

$$\cos(\beta_{1/2}) = \frac{2 \cos \alpha \cos \psi \pm 2 \sin \alpha \sqrt{\cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - 4 \cos^2 \psi}}{\cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha} \quad (5b)$$

und damit

$$\begin{aligned} \tan(\beta_{1/2}) &= \frac{-4 \sin \alpha \cos \psi \pm \cos \alpha \sqrt{\cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - 4 \cos^2 \psi}}{2 \cos \alpha \cos \psi \pm 2 \sin \alpha \sqrt{\cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - 4 \cos^2 \psi}} \\ &= \pm \frac{\cos \psi \sqrt{2 - 6 \cos(2\alpha) - 8 \cos(2\psi)} - \sin(2\alpha)}{2[\cos(2\alpha) + \cos(2\psi)]}. \end{aligned} \quad (5c)$$

Die Gleichungen 5 liefern ein interessantes Nebenergebnis. Aus der Forderung, dass die Diskriminante nicht negativ sein soll,

$$\cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - 4 \cos^2 \psi \geq 0,$$

folgt ein eingeschränkter Winkelbereich für ψ : $60^\circ \leq \psi \leq 120^\circ$. Dies stimmt mit der Aussage aus Satz 4 in [3, S. 22] überein.

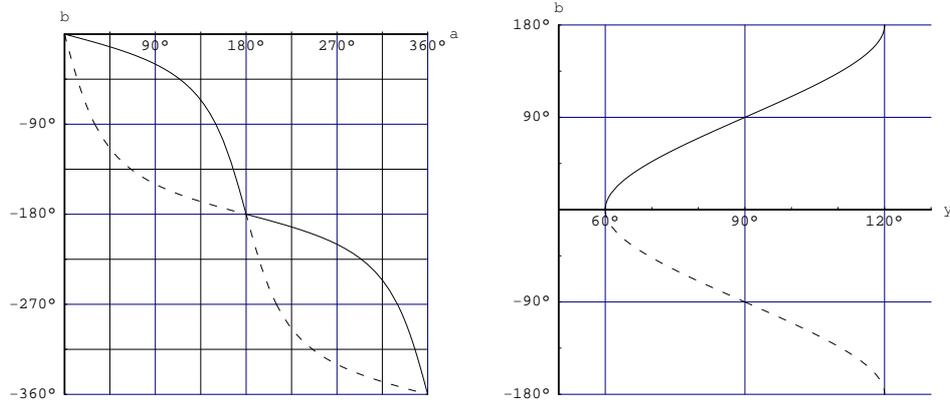


Abbildung 2: Der linke Graph ergänzt die Abbildung 1 um den Fall $\psi = 60^\circ$. Der rechte Graph zeigt β_1 (durchgezogen) bzw. β_2 (gestrichelt) in Abhängigkeit von ψ für $\alpha = 0^\circ$.

Der Bedingungsgleichung 2 entnehmen wir die Abhängigkeit der Größen R_V , R_U und z von l , α und ω_1 ,

$$R_V = \frac{2}{\sqrt{3}}l \sin\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad (6a)$$

$$R_U = \frac{1}{\sqrt{3}}l \sin\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - l \sin \alpha \cos\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad (6b)$$

$$z = l \cos(\alpha) \cos\left(\frac{\omega_1}{2}\right). \quad (6c)$$

Entsprechend führt die Bedingungsgleichung 3 auf die Abhängigkeit der Größen R_V , R_U und z von l , β und ω_2 ,

$$R_U = \frac{2}{\sqrt{3}}l \sin\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \quad (7a)$$

$$R_V = \frac{1}{\sqrt{3}}l \sin\left(\frac{\omega_2}{2}\right) + l \sin \beta \cos\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \quad (7b)$$

$$z = -l \cos(\beta) \cos\left(\frac{\omega_2}{2}\right). \quad (7c)$$

Elimination von R_U , R_V und z führt auf die Gleichungen

$$2 \sin\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = \sin\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - \sqrt{3} \sin \alpha \cos\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad (8a)$$

$$2 \sin\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = \sin\left(\frac{\omega_2}{2}\right) + \sqrt{3} \sin \beta \cos\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \quad (8b)$$

$$0 = \cos \alpha \cos\left(\frac{\omega_1}{2}\right) + \cos \beta \cos\left(\frac{\omega_2}{2}\right). \quad (8c)$$

Setzen wir in das Doppelte der Gleichung 8b die Gleichungen 8a und 8c ein, so erhalten wir über die Zwischenschritte

$$\begin{aligned} 4 \sin\left(\frac{\omega_1}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - \sqrt{3} \sin \alpha \cos\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - 2\sqrt{3} \sin \beta \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \cos\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \\ 3 \sin\left(\frac{\omega_1}{2}\right) &= -\sqrt{3} (\sin \alpha + 2 \cos \alpha \tan \beta) \cos\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \end{aligned}$$

den Winkel ω_1 in Abhängigkeit von α und β ,

$$\tan\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} (\sin \alpha + 2 \cos \alpha \tan \beta). \quad (9)$$

Mit Hilfe der Gleichung 5c ist ω_1 in alleiniger Abhängigkeit von α und ψ bestimmt. Setzen wir in das Doppelte der Gleichung 8a die Gleichungen 8b und 8c ein, so erhalten wir über die Zwischenschritte

$$\begin{aligned} 4 \sin\left(\frac{\omega_2}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\omega_2}{2}\right) + \sqrt{3} \sin \beta \cos\left(\frac{\omega_2}{2}\right) + 2\sqrt{3} \sin \alpha \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cos\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \\ 3 \sin\left(\frac{\omega_2}{2}\right) &= \sqrt{3} (\sin \beta + 2 \cos \beta \tan \alpha) \cos\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \end{aligned}$$

den Winkel ω_2 in Abhängigkeit von α und β ,

$$\tan\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sin \beta + 2 \cos \beta \tan \alpha). \quad (10)$$

Über die Gleichungen 5a und 5b hängt ω_2 nur noch von α und ψ ab. Mit den Winkeln ω_1 und ω_2 sind nun auch die Grössen R_U , R_V und z der Gleichungen 6 und 7 in Abhängigkeit von α , ψ und l berechenbar.

6 Variation der Diagonalen

Der Abstand zweier gegenüberliegender Mittelpunkte M_i und M_{i+3} verändert sich im Allgemeinen während der Umstülpbewegung des Gelenkringes. Wegen der dreizähligen Symmetrie sind die drei Diagonalen — so sollen diese Abstände genannt werden — in jedem Bewegungszustand gleich lang. Es reicht also, die Variation einer Diagonalen zu bestimmen,

$$d^2 = \overline{M_1 M_4}^2 = (R_U + R_V)^2 + z^2.$$

Mit den Gleichungen 6 hängt die Diagonale von α , l und ω_1 ,

$$\begin{aligned} d &= l \sqrt{\left[\sqrt{3} \sin\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - \sin \alpha \cos\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \right]^2 + \cos^2(\alpha) \cos^2\left(\frac{\omega_1}{2}\right)} \\ &= l \sqrt{2 - \cos \omega_1 - \sqrt{3} \sin \alpha \sin \omega_1}, \end{aligned} \quad (11a)$$

mit den Gleichungen 7 von β , l und ω_2 ,

$$\begin{aligned} d &= l\sqrt{\left[\sqrt{3}\sin\left(\frac{\omega_2}{2}\right) + \sin\beta\cos\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\right]^2 + \cos^2(\beta)\cos^2\left(\frac{\omega_2}{2}\right)} \\ &= l\sqrt{2 - \cos\omega_2 + \sqrt{3}\sin\beta\sin\omega_2}, \end{aligned} \quad (11b)$$

ab. Über die Gleichungen 9 bzw. 10 und 5 ist die Diagonalenlänge nur noch von α , ψ und l abhängig (Abbildungen 3 und 4).

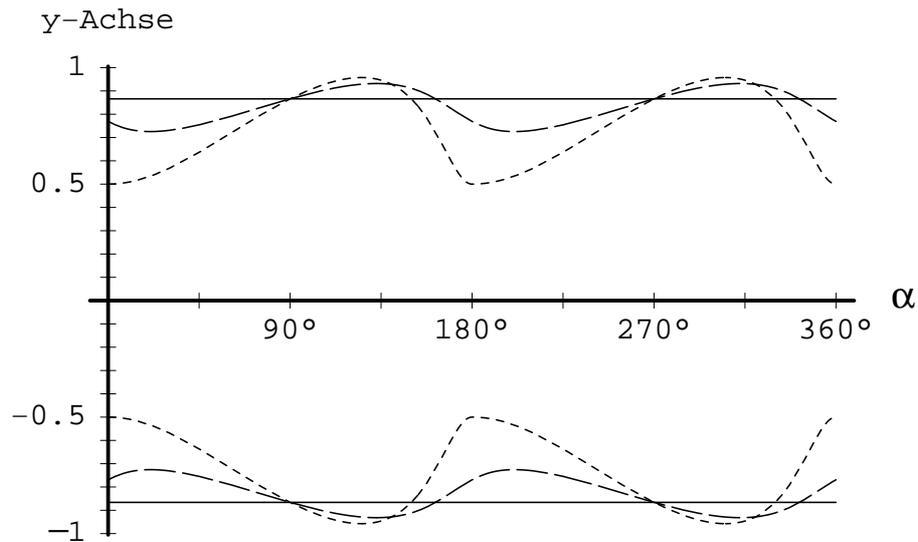


Abbildung 3: Variation der Diagonalen in Abhängigkeit von α . Auf der y -Achse wurde die Diagonalenlänge so abgetragen, dass der Mittelpunkt der Diagonalen immer bei $y = 0$ liegt. Die durchgezogenen Striche stellen den Fall des umstülpbaren Würfels dar ($\psi = 90^\circ$), die langgestrichelten Kurven entsprechen dem umstülpbaren Modell des Pentagondodekaeders mit $\psi = 72^\circ$ und die kurzgestrichelten Kurven entsprechen einem charakteristischen Winkel von $\psi = 60^\circ$. Den dargestellten Längenvariationen liegt die Gliedlänge $l = 1$ und der Fall β_1 aus Gleichung 5 zugrunde.

A Drehungen

Wie lässt sich eine räumliche Drehung bezüglich einer beliebigen Achse a um den Winkel θ analytisch darstellen? — Diese Frage soll mit den Mitteln der geometrischen Algebra beantwortet werden, indem die in den Aufsätzen [1, 2] dargestellten Techniken und Konventionen zur Anwendung kommen.

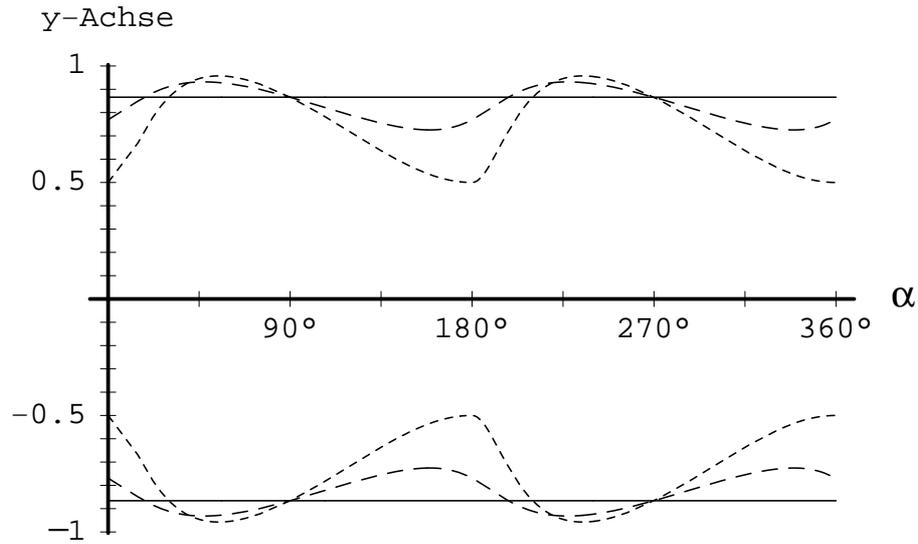


Abbildung 4: Variation der Diagonalen für den Fall β_2 . Bezeichnungen wie in Abbildung 3.

Sei

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

ein willkürlich gewählter Punkt des Raumes und

$$\mathbf{n} = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2 + Z\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{n}^2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

ein beliebiger Einheitsvektor. Die zu \mathbf{n} senkrechte Ebenenstellung wird durch den Einheitsbivektor

$$\mathbf{B} = \mathbf{nI} = X\mathbf{E}_1 + Y\mathbf{E}_2 + Z\mathbf{E}_3, \quad \mathbf{B}^2 = \mathbf{nInI} = -\mathbf{n}^2 = -1,$$

dargestellt. Der Ortsvektor \mathbf{r} kann bezüglich des Vektors \mathbf{n} in die Summe einer parallelen und einer senkrechten Komponente zerlegt werden,

$$\mathbf{r} = \lambda\mathbf{n} + \mu\mathbf{m}, \quad \mathbf{n}^2 = 1, \quad \mathbf{m}^2 = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0.$$

Wir können nun zeigen, dass die Abbildung

$$\mathbf{r}' = \exp\left(-\frac{\theta}{2}\mathbf{B}\right) \mathbf{r} \exp\left(\frac{\theta}{2}\mathbf{B}\right) \quad (12)$$

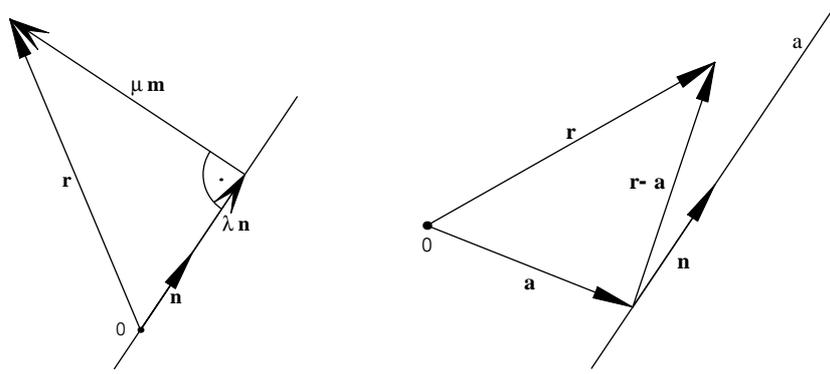


Abbildung 5: Drehung um den Ursprung (links) und Drehung um eine beliebige Achse a (rechts).

eine Drehung bezüglich der Ursprungsgeraden mit Richtung \mathbf{n} um den Winkel θ darstellt. Um den Exponentialterm in bekannter Weise umzuformen, benutzen wir die Abkürzung $\alpha := \theta/2$,

$$\begin{aligned} \exp(\alpha \mathbf{B}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha \mathbf{B})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k} \mathbf{B}^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+1} \mathbf{B}^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} \right) \mathbf{1} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \mathbf{B} \\ &= \cos(\alpha) \mathbf{1} + \sin(\alpha) \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Gleichung 12 kann nun folgende Form annehmen²,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= [\cos(\alpha) \mathbf{1} - \sin(\alpha) \mathbf{B}] \mathbf{r} [\cos(\alpha) \mathbf{1} + \sin(\alpha) \mathbf{B}] \\ &= \cos^2(\alpha) \mathbf{r} + \cos(\alpha) \sin(\alpha) (\mathbf{r} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{r}) - \sin^2(\alpha) \mathbf{B} \mathbf{r} \mathbf{B} \\ &= \cos^2(\alpha) \mathbf{r} + 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - 2 \sin^2(\alpha) \mathbf{B} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) + \sin^2(\alpha) \mathbf{r} \\ &= \mathbf{r} - \mathbf{B} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) + \sin(\theta) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) + \cos(\theta) \mathbf{B} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (13)$$

²Für den Schritt von der zweiten zur dritten Zeile wurden die Umformungen

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{r} &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{B}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{B} \wedge \mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{B} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{r} \wedge \mathbf{B} = 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}), \\ \mathbf{B} \mathbf{r} \mathbf{B} &= \mathbf{B} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} (2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{B} \wedge \mathbf{r}) = \mathbf{B} (2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{B} \mathbf{r}) \\ &= 2\mathbf{B} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{B}^2 \mathbf{r} = 2\mathbf{B} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{r} \end{aligned}$$

und für den Schritt von der dritten zur vierten Zeile die Beziehungen

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1, \quad 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) = \sin(2\alpha), \quad 2 \sin^2(\alpha) = 1 - \cos(2\alpha)$$

benutzt.

Der Term $\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$ stellt einen Vektor erster Stufe der Länge μ dar, der senkrecht auf \mathbf{n} und \mathbf{r} steht,

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} &= \langle \mathbf{rn} \mathbf{I} \rangle_1 = \langle \mathbf{rn} \rangle_2 \mathbf{I} = -(\mathbf{n} \wedge \mathbf{r}) \mathbf{I} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}, \\ |\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}| &= \sqrt{-\mu^2 (\mathbf{m} \wedge \mathbf{n})(\mathbf{m} \wedge \mathbf{n})} = \mu \sqrt{(\mathbf{mn})(\mathbf{nm})} = \mu \mathbf{1};\end{aligned}$$

der Term $\mathbf{B}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})$ stellt die zur Drehachse senkrechte Komponente von \mathbf{r} dar,

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) &= -\mathbf{n} \mathbf{I} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{r}) \mathbf{I} = \mu \mathbf{n} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{m}) = \mu \mathbf{m}, \\ |\mathbf{B}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})| &= \mu \mathbf{1};\end{aligned}$$

und der Term $\mathbf{r} - \mathbf{B}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})$ gibt die Projektion von \mathbf{r} auf die Drehrichtung \mathbf{n} an,

$$\mathbf{r} - \mathbf{B}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) = \lambda \mathbf{n}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass der Vektor \mathbf{r}' durch Drehung des Vektors \mathbf{r} bezüglich der Ursprungsgerade mit Richtung \mathbf{n} um den (positiven) Winkel θ entsteht. — Die Drehungen um den Ursprung bestätigen den Namen der geometrischen Algebra, welche geometrische Sachverhalte durch algebraische Begriffe koordinatenfrei auszudrücken vermag: Alle Terme der vierten Zeile von Gleichung 13 besitzen eine anschaulich geometrische Bedeutung (Abbildung 5, links).

Um die eingangs gestellte Frage vollständig zu beantworten, muss die Gebundenheit der Drehachse durch den Ursprung wegfallen. Sei \mathbf{a} ein Vektor, der vom Ursprung zur freien Drehachse a zeige. Eine Drehung um diese Achse kann nun zerlegt werden in eine Verschiebung der Drehachse in den Ursprung, anschliessend wird um die verschobene Achse gedreht und zum Schluss die Achse wieder in die ungebundene Lage zurückverschoben:

Erklärung (Drehung). Eine Drehung $D(\mathbf{r}, \theta, a)$ des Vektors \mathbf{r} bezüglich der beliebig festzulegenden Achse

$$a : \mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{n}, \quad t \in \mathbb{R},$$

um den positiven Winkel θ wird durch den Ausdruck

$$\begin{aligned}D(\mathbf{r}, \theta, a) &:= \exp\left(-\frac{\theta}{2}\mathbf{B}\right) (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \exp\left(\frac{\theta}{2}\mathbf{B}\right) + \mathbf{a} \\ &= \mathbf{r} - \mathbf{B}[(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{B}] + \sin(\theta) [(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{B}] + \cos(\theta) \mathbf{B}[(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{B}]\end{aligned}\tag{14}$$

mit $\mathbf{B} = \mathbf{n} \mathbf{I}$ und $\mathbf{B}^2 = -\mathbf{1}$ dargestellt (Abbildung 5).

Jetzt bleibt uns noch, die Drehung in Koordinatenform umzurechnen. Dazu wählen wir für den Stützvektor der Geraden a die Komponenten

$$\mathbf{a} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3$$

und erhalten

$$\mathbf{r} - \mathbf{a} = (x - u)\mathbf{e}_1 + (y - v)\mathbf{e}_2 + (z - w)\mathbf{e}_3,$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{B} &= [Y(z - w) - Z(y - v)]\mathbf{e}_1 + [Z(x - u) - X(z - w)]\mathbf{e}_2 + \\ &+ [X(y - v) - Y(x - u)]\mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}[(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{B}] &= [Z^2(x - u) - ZX(z - w) - XY(y - v) + Y^2(x - u)]\mathbf{e}_1 + \\ &+ [X^2(y - v) - XY(x - u) - YZ(z - w) + Z^2(y - v)]\mathbf{e}_2 + \\ &+ [Y^2(z - w) - YZ(y - v) - ZX(x - u) + X^2(z - w)]\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Wenn der Richtungsvektor \mathbf{n} zu Beginn der Drehung nicht auf Einheitslänge gebracht worden ist, müssen die Koordinaten von \mathbf{n} in den obigen Gleichungen durch die normierten Koordinaten ersetzt werden,

$$X \rightarrow \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad Y \rightarrow \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad Z \rightarrow \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

Literatur

- [1] CONRADT, O.: *Die geometrische Algebra der ebenen Vektorgeometrie*. Mathematisch-Physikalische Korrespondenz, 204:3–19, 2001.
- [2] CONRADT, O.: *Die geometrische Algebra der räumlichen Vektorgeometrie*. Mathematisch-Physikalische Korrespondenz, 206:18–38, 2001.
- [3] ERNHOFER, K. und W. MAAS: *Umstülpbare Modelle der Platonischen Körper*. Arbeitshefte der Mathematisch-Astronomischen Sektion am Goetheanum, Dornach (Schweiz), 2000. Große Reihe, Heft 2.
- [4] SCHATZ, P.: *Rythmusforschung und Technik*. Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 2., erweiterte Auflage, 1998.