

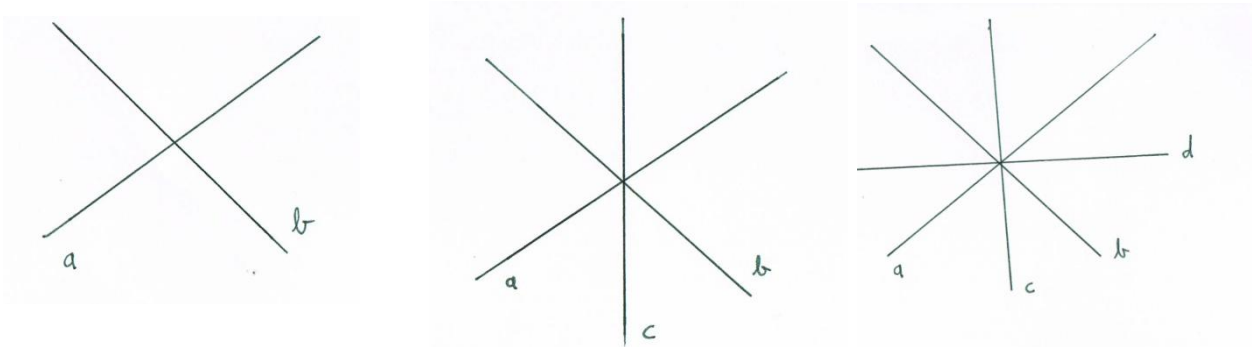
Christina Moratschke

Wachen und Schlafen. Die Aktivität an der Bewusstseinsgrenze

Beitrag zur Mathematiklehrrtagung 2014 in Filderstadt

Louis Locher macht in einem grundlegenden geometrischen Werk darauf aufmerksam, dass es nötig sei im Lichte der projektiven Geometrie scheinbare Selbstverständlichkeiten, wie zum Beispiel das Sprechen vom „Zwischen“ neu anzuschauen und so überhaupt zu einer begrifflichen Verdeutlichung zu gelangen.¹ Seine Betrachtung des Zwischen möchte ich teils nachvollziehend beschreiben, teils über den geometrischen Bereich hinaus verfolgen in einer Art, die durch die Betrachtung Lochers angeregt ist. Greift man in einem Strahlenbüschel 2 Strahlen a und b heraus, so ergibt sich überhaupt kein

1



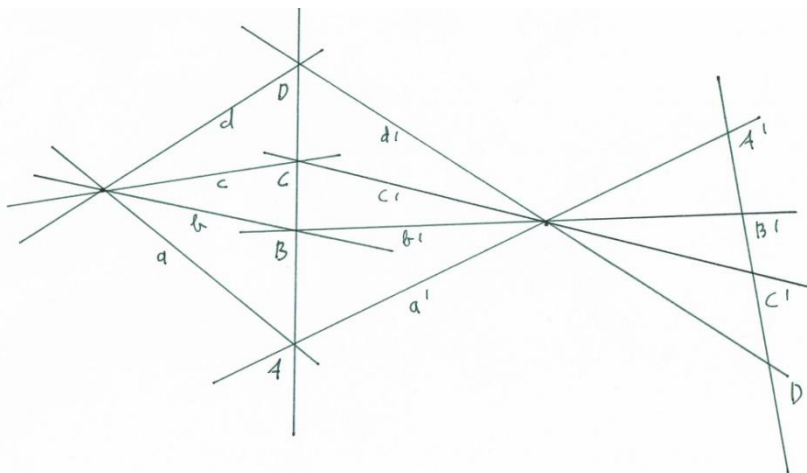
Kriterium für ein Zwischen. Der Begriff lässt sich einfach nicht anwenden. Keiner der beiden Strahlen ist in irgendeiner Hinsicht zwischen anderen. Fügt man einen dritten Strahl c hinzu, so sieht die Sache auf den ersten Blick anders aus. Man könnte doch jetzt sagen, c ist zwischen a und b. Aber dieser Blick erweist sich als eingeschränkt. In Bezug auf den Strahl c kann ich sagen, dass dieser insofern zwischen a und b liegt, als dass er sich in einem der beiden durch a und b festgelegten Winkelfelder bewegen kann, ohne a oder b zu überschreiten. Dasselbe gilt aber nicht für die Strahlen a und b; a kann sich in b hinein bewegen und umgekehrt, ohne c zu überstreichen, oder ich kann die Bewegung so ausführen, dass c eben überschritten werden muss. Dies hängt davon ab, welche Drehrichtung ich wähle. c liegt also nicht einfach zwischen a und b, es gibt ein Winkelfeld, für das diese Aussage nicht zutrifft. Das Strahlenbüschel nicht als Ganzes zu betrachten, sondern willkürlich auf einen Ausschnitt zu begrenzen, innerhalb dessen die Aussage gelten soll, entspricht

¹ Louis Locher Ernst: Projektive Geometrie, Dornach 1980
Die Zeichnungen im Text entsprechen den dort verwendeten.

Wachen und Schlafen

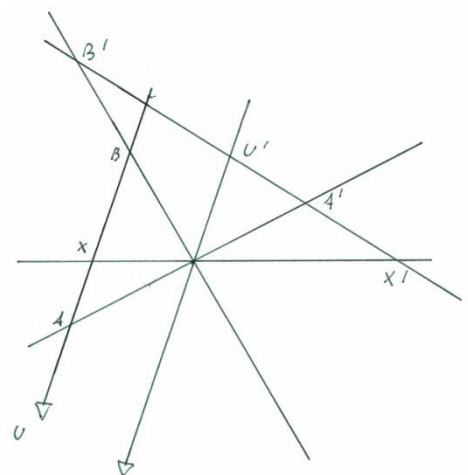
einer gewissen Verengung des Vorstellungsbewusstseins und ist geometrisch nicht befriedigend. Erst indem man einen vierten Strahl d hinzunimmt, lässt sich Zwischen eindeutig beschreiben. c liegt zwischen a und b in Bezug auf d . Dasselbe gilt für d : d liegt nämlich zwischen a und b in Bezug auf c . Das heisst: um von c nach d oder von d nach c zu gelangen, muss auf jeden Fall einer der Strahlen a oder b überstrichen werden, unabhängig von der Drehrichtung. Entsprechendes gilt für die Strahlen a und b . Jeder der Strahlen liegt zwischen zwei anderen in Bezug auf einen vierten. Die Gültigkeit meiner Betrachtung hängt nicht mehr davon ab, welchen Strahl ich auswähle. Dass die begriffliche Klärung des Zwischen auf die Angabe eines – in diesem Fall räumlichen – Elementes angewiesen ist, welches die Beziehung in die Gültigkeit erhebt, scheint mir von grundlegender Bedeutung zu sein und über das Räumliche hinaus gehend fruchtbar gemacht werden zu können.

2



Locher deutet eine Ausweitung dieser Betrachtung in den zeitlichen Bereich durch einen Vergleich an. Die natürliche Folge einer Anzahl von Büschelgraden überträgt sich durch

Schnitt auf eine Punktreihe und durch Scheinbildung auf ein weiteres Büschel. Dies erscheint zunächst unmittelbar einleuchtend. Ein interessanter Fall ergibt sich dann, wenn man von einer Punktreihe ausgeht, auf der 4 Punkte ausgezeichnet sind. Einer davon ist der unendlich ferne Punkt der Geraden. Durch Schein und Schnitt überträgt man die Folge der 4 Punkte auf eine weitere Gerade. Der Fernpunkt U , der im gewöhnlichen Sinn zunächst nicht zwischen A und B liegt, wird durch die beiden Operationen in den Punkt U' verwandelt, der nun „zwischen“ A' und B' zu liegen kommt. Im gewöhnlichen Sinne betrachtet, wäre hier die Reihenfolge der Punkte durch Schnitt und Schein nicht beibehalten worden. Oder anders gesagt: nur



Wachen und Schlafen

indem man den unendlich fernen Punkt U als existent und wirksam in die Betrachtung mit einbezieht, bleibt die Lage von X zwischen A und B durch Schein und Schnitt gültig. Zumindest für die Punktreihe liesse sich nun feststellen, dass, wenn man bei drei aufeinander folgenden Punkten von einem „Zwischen“ spricht, der Vierte, als der unendlich ferne, nicht bemerkt wird. Das Vorstellungsbewusstsein fasst eben das ganz im Endlichen verlaufende Segment einer Punktreihe anders ins Auge, als dasjenige, das die Unendlichkeit durchläuft. Locher deutet an, dass es in Bezug auf die Zeit eine ähnlich gelagerte Schwierigkeit bei der Bestimmung des „Zwischen“ gibt.

3 Normalerweise hat man keine Probleme mit der Aussage, dass ein Zeitmoment des wachen Bewusstseins zwischen Aufwachen und Einschlafen liegt. Allerdings fasst man hier nur die Zeitspanne des Tages ins Auge, in der man sich als wach erlebt. Derjenige Teil, den man schlafend verbringt, entgeht der Aufmerksamkeit; in ähnlicher Art, wie das Vorstellungsbewusstsein die Tendenz hat, dasjenige Segment der Punktreihe ausser Acht zu lassen, das durch die Unendlichkeit läuft. Will man die Betrachtung sachgemäss erweitern, so müsste man, laut Locher, unterscheiden zwischen einem Zeitmoment „zwischen Aufwachen und Einschlafen bezüglich eines Zeitpunktes des schlafenden Zustandes *oder* bezüglich eines Zeitpunktes des wachenden Zustandes.“² Mit Zustand ist hier wohl nicht ein punktueller Moment, sondern die über den Tag, bzw. über die Nacht überwiegend ausgebreitete Bewusstseinsverfassung gemeint. Damit die Analogie nicht schematisch erscheint, bedarf es noch einiger Erläuterung. Der erste genannte Zeitmoment charakterisiert mein gewöhnliches tageswaches Bewusstsein, in dem ich die Zeit so erlebe, dass ich in und mit ihr älter werde. Der, meist vergessene, Bezugspunkt ist der Schlaf, von dem sich dieser Zustand in vorstellungsförmiger Wachheit abhebt. Es ist aber wichtig, diesen Bezugspunkt ins Bewusstsein zu heben, denn die Annahme, durch die Angabe der Reihenfolge von Aufwachen und Einschlafen sei der gemeinte Zeitmoment bereits genügend charakterisiert, trifft nicht zu. Dass man zuerst aufwachen muss, um wieder einschlafen zu können, ist klar, aber das Umgekehrte gilt ebenso. Es gibt eben nicht nur, das in der Regel bekanntere, vorwärts schreitende Zeiterleben, ist gibt ebenso gut ein rückwärts schreitendes, in dessen Verlauf man (seelisch-geistig) nicht älter, sondern jünger wird. Ein solches Erleben entspricht dem zweiten der

² A. a. O., Seite 12

Wachen und Schlafen

4

genannten Zeitmomente. Man erlebt nicht die Abfolge seiner Tätigkeiten, sondern man erlebt in einer Art schlafender Überwachtheit, dass das Situationsgefüge, in das man hinein gestalten kann, aus der Zukunft entgegen kommt. Hier ist der Bezugspunkt, von dem sich das Erleben abhebt, das, im gewöhnlichen Sinne, wache Bewusstsein. Durch das Rückwärtslaufen des Zeitstromes bedingt, kann man auch hier, ohne weiteres, von einem Zeitpunkt zwischen Aufwachen und Einschlafen sprechen. Dies scheint paradox, aber man kann das schlafende Bewusstsein ja nur charakterisieren, indem man ein Stück weit darin aufwacht. Andernfalls erscheint es lediglich als Bewusstseinslücke oder vielleicht, nicht einmal als diese. Von grundlegender Fruchtbarkeit an diesen Betrachtungen scheint mir zu sein, dass sie zeigen, dass begriffliche Bestimmungen nicht einfach zu absolut gültigen Aussagen führen, sondern dass Begriffe je nach eingenommener Perspektive des sie verwendenden Denkers dies oder jenes beleuchten können. Das Glück des Erkennens besteht darin, eine gültige Beleuchtung auffinden zu können, aber nicht einfach, indem man eine absolute Aussage hinpfählt, sondern indem sich ein bestimmter Sachverhalt, durch einen eindeutigen Gesichtspunkt erhellt, in dieser besonderen Form darstellt. Der Sachverhalt und die Art und Weise, wie er erblickt wird, stehen in einem beweglichen, spielerischen Verhältnis zueinander. In diesem Verhältnis gibt es Vielschichtigkeit, aber keine Willkür. Die Willkür beendet die spielerisch schöpferische Bewegung durch einen Machtspruch, eine Schwierigkeit, die jeder schöpferisch tätige Mensch als Herausfallen aus dem Schaffensprozess kennt.

Mit dem Hinweis auf Schlafen und Wachen führt Locher seine Betrachtung aus dem räumlichen Bereich in den zeitlichen über. Insofern Schlafen und Wachen aber auch Bewusstseinszustände und damit Erlebnisarten sind, ist in diesem andeutenden Hinausgehen aus dem Räumlichen noch mehr enthalten. Im Wachen und im Schlafen erlebt sich die Seele unterschiedlich. Der Mittebereich des eigentlich Seelischen ist das Fühlen. Es webt ständig zwischen Trennung und Verbindung oder zwischen mehr vom Leib beeinflussten und mehr leibfreiem, geistig geprägtem Erleben hin und her. Seelischer Ausdruck dieser beiden unterschiedlichen Existenzformen sind die Vorstellung und der Wille.³ Im Vorstellen überwiegt die Tendenz zur Trennung. Man ist wach in Bezug auf die sinnlich wahrnehmbaren Einzelheiten und deren verstandesmäßige

³ S. Rudolf Steiner: Allgemeine Menschenkunde als Grundlage der Pädagogik, GA 293, 2. Vortrag

Wachen und Schlafen

Verknüpfung. Schlafend ist man in Bezug auf die Einbettung des vorgestellten Gegenstands in das sinnerfüllte Ganze der Welt. Die hier vorherrschende Bewusstseinsform mit ihrer Tendenz zur Vereinzelnung könnte man als ein Punktbewusstsein bezeichnen. Die Vereinzelnung ist aber nicht absolut, denn durch das Vorstellen erfährt auch das Gefühlsleben eine Anregung, die sich zum Beispiel in Form einer Gestimmtheit zeigen kann. Das Hell oder Dunkel der Stimmung begleitet die Vorstellungsbildung. Der Fühlende ahnt die Sinnhaftigkeit der Welt, ohne das Wie und Was im Einzelnen beschreiben zu können. Wird diese Verknüpfung von Vorstellen und Fühlen nicht bemerkt, so kann das zu der Ansicht führen, dass die vorgestellten Gegenstände, Geschehensabläufe und Situationen unmittelbar so, wie man sie erlebt, ihren Sinn in sich tragen würden. Tatsächlich erlebt man einen Rückgriff, im Fühlen dämmert etwas auf von der lebendigen Beweglichkeit, aus der das Vorstellen ursprünglich schöpft.

5

Im Willen überwiegt die sympathische Tendenz zur Verbindung. Man lebt in einem überwiegenden Umkreisbewusstsein, schlafend in Bezug auf die sinnlich wahrnehmbaren Einzelheiten und deren verstandesmäßiger Verknüpfung. Eigentlich lässt sich die Bewusstseinsform des Willens nur in einem Ausnahmement erfassen als eine Art wachendes Schlafen. Das Herausgreifen eines Einzelnen aus dem Ganzen wird nicht erlebt, in Bezug darauf schläft man eben. Das wachende Schlafen hebt sich von dem gewöhnlichen Schlafen vielleicht dadurch ab, dass man sich als ausgebreitet in einer Ganzheit erlebt, sozusagen als All-Eins. Man ist ja nicht nur Derjenige, der etwas fokussiert, sondern auch Derjenige, der in den Verhältnissen und Bezügen des Fokussierten anwesend ist, nur ist einem dieses vor dem gezielten Herausgreifen eben nicht bewusst. In der Ausnahmesituation des wachenden Schlafens bemerkt man dies. Ebenso wie die Wahrnehmung durch das Erkennen in grössere Zusammenhänge hinein gestellt werden kann und damit sprechend wird, ebenso lässt sich vom Erleben des ausgebreiteten Verbundenseins mit der Sinnhaftigkeit überhaupt ein Übergang finden zum Entschluss. Der wirkliche Entschluss ist ein umfassender geistiger Vorgang, der in seiner Bedeutung über dasjenige hinaus reicht, das man bewusst zu verwirklichen beabsichtigt. Gleichzeitig kommt er nur durch die konkrete Abfolge einzelner Schritte – vorstellend oder handelnd – zum Ausdruck. Im Fühlen ahnt man die Tragweite eines Entschlusses, aber man erlebt noch nicht

Wachen und Schlafen

die tatsächliche Bedeutung eines solchen für das Gefüge von Welt und Mensch in deutlicher Form. Im Erlebnis des Getragenseins dämmert die Sinnstiftung auf, die mit dem Entschluss verbunden ist. Der Entschluss findet in einem Bereich der Überwachheit statt, dem gegenüber das wache Tagesbewusstsein als schlafendes erscheint, das vorstellende Herausgreifen von Einzelheiten wird im wachen Tagesbewusstsein erlebt. Diesem gegenüber erscheint der Bereich des Entschlusses in Schlaf getaucht.

6 Gibt es eine vergleichbare Polarität auch im rein geistigen Bereich? Die Tätigkeit der Seele besteht in der Verbindung von Leib und Geist, die Tätigkeit des Geistes ist der im eigentlichen Sinne schöpferische Akt. Gibt es auch in diesem Bereich eine entsprechende Dopplung? Eine Perspektive ergibt sich, wenn man auf die beiden Teile der „Philosophie der Freiheit“ blickt:⁴ Der erste Teil ist dem Erkennen, der zweite Teil dem Handeln aus Erkenntnis gewidmet. Im Erkennen zeigen die erkannten Gegenstände eine neuartige Erscheinungsform ihrer selbst. Der Begriff, der im menschlichen Bewusstsein durch Eigentätigkeit erzeugt wird, gehört dem erkannten Gegenstand an, tritt aber ausserhalb des Erkenntnisaktes so nicht auf. Man könnte sagen, dass die Welterscheinungen, die erkannt werden, (wenn auch nur partiell, da das Erkennen ein unendlicher Vorgang ist, der sich im vollständigen Sinn nicht ausschöpfen lässt), im menschlichen Bewusstsein eine höhere Erscheinungsform ihrer selbst annehmen. Was erkannt wird, muss man abwarten. Echte Erkenntnis ist für den Erkennenden und damit indirekt auch für die Welt immer überraschend. Das menschliche Bewusstsein ist der Schauplatz, auf dem die Welt neu wird. Umgekehrtes geschieht im Handeln, insbesondere im Handeln aus Erkenntnis. Im Handeln bildet der Mensch eine bisher noch nicht vorhandene Gestalt seiner selbst aus. Irgendwie trifft das für jede Handlung zu, aber ein Neuwerden im verjüngenden Sinn der Originalität tritt wohl vor allem beim Handeln aus Erkenntnis auf, also dann, wenn man seine Beweggründe versteht und vor sich selber rechtfertigen kann. Da die Welt geistiger Natur ist, hat offenbar jede Handlung als in die Welt hinein gerichteter Gestaltungsimpuls in ihr seine Wirkungen und Folgen. Aber nur in der freien Tat, der Handlung aus Erkenntnis, tritt die Welt als der Schauplatz auf, auf dem der Mensch – tätig und empfangend – ein verjüngendes Neuwerden vollzieht und erfährt. Die Welt ist der Schauplatz, auf dem der

⁴ Rudolf Steiner: Die Philosophie der Freiheit, GA 4

Wachen und Schlafen

Mensch neu wird. Welche Gestalt der Mensch sich so gibt, muss abgewartet werden, sie ist jeweils überraschend für die Welt und damit in der Rückwirkung auch für den Menschen. In diesem kreisläufigen Geschehen können Welt und Mensch sich wechselseitig Schauplatz des Neuwerdens und der Höherentwicklung sein. Von Wachen und Schlafen im eigentlichen Sinne kann man hier nicht mehr sprechen, denn: Geist nimmt Geist auf und Geist gestaltet sich in Geist.

Es ergibt sich die Frage, ob sich diese doppelte Bezüglichkeit von Wachen und Schlafen, beziehungsweise von Tätigkeit und Empfänglichkeit im Leben bewährt. Ich werde versuchen, es an der Betrachtung einer alltäglichen Situation auszuprobieren. Ich möchte ein Bild aufhängen und befestige zu diesem Zweck einen Haken mit zwei Nägeln an der Wand. Neben dem Vorgang selbst, der mit einem passenden Hammer leicht auszuführen ist, interessiert mich jetzt eben die Frage, wo ich wach und wo ich schlafend in der Sache drin stehe. Wach bin ich auf jeden Fall in Bezug auf meine Absicht. Ich weiss, was ich will und auch, wie diese, relativ einfache Sache auszuführen ist. Es bedarf auch nur geringer Lebenserfahrung, um die Festigkeit des montierten Hakens vor dem Aufhängen des Bildes daraufhin zu prüfen, ob sie ausreichend ist. So gesehen ist mir meine Handlung durchsichtig. Dass dabei auch Unvorhergesehenes eintreten kann, zum Beispiel was die Beschaffenheit der Wand oder die Geschicklichkeit und Kraft meiner Hände angeht, ist klar, stellt das Gesagte aber nicht wesentlich in Frage. Denn ich kann ja reagieren und meine Handlung an die neue Gegebenheit anpassen. Die Durchsichtigkeit hat jedoch enge Grenzen und blendet alles aus, was man an tieferen Fragen an das Leben auch noch haben könnte. Ich trete also, indem ich den Nagel platziere, in ein naives Weltverhältnis ein. Dieses Weltverhältnis ist kein naiver Realismus im philosophischen Sinne. Es tritt zunächst als Tatsache auf und nicht als Weltanschauung, die sich auf gedankliche Überlegung gründet. Der naive Weltbezug ist Bestandteil eines normal organisierten Seelenlebens. Man vergisst für einen Moment, welch ungeheures Problem zum Beispiel allein die Frage der Existenz darstellt und führt eben die ins Auge gefasste Absicht aus. Ein Aufwachen für die in der sinnlichen Welt ausführbare Handlung und deren Ergebnis geschieht um den Preis des Einschlafens für das Mysterium, wie ich überhaupt in eine verleiblichte Existenzform, noch dazu in diese spezifische, gelangt bin. Das Umgekehrte ist absurd: Könnte man eine Handlung erst

Wachen und Schlafen

8

ausführen, nachdem man ihre Bedeutung im Weltzusammenhang vollständig überschaut hätte, so wäre man zu kleinem Schritt mehr in der Lage. Die Unbefangenheit der naiven Handlung lebt gerade von der Möglichkeit und der Gewissheit, in den Bereich des Gewahr Werdens von sich aussprechender Sinnhaftigkeit wiederum aufwachen zu können. Die Angst, ein phasenweises, unbefangenes Einlassen auf die physische Welt könne zu einem dauerhaften Verlust der Beziehung zur geistigen Welt führen, beruht auf einem Missverständnis in Bezug auf deren gegenseitiges Verhältnis. Wer seine Kompetenz in Umgang mit der physischen Welt sachgemäss vertiefen kann, braucht dazu neben einer gewissen Übung unbedingt das Schöpfen aus einer geistigen Welt. Die Wachheit in Bezug auf die Bewältigung einfacher oder auch komplexerer Anforderungen des Alltags bedingt einen momentan schlafenden Zustand in Bezug auf Fragen des Seins und Werdens, das Aufwachen in einem Bereich, in dem man auf Phänomene des Seins und Werdens trifft, bedingt ein Einschlafen für eigene subjektive Absichten, jedenfalls, solange man sich im Zustand dieser Anschauung befindet. Es gibt eine einfache, allgemein bekannte Entsprechung: Man kann deshalb am Abend einschlafen, weil man keinen Zweifel daran hat, dass man am nächsten Morgen wieder aufwacht. Gleichzeitig kann man vorbehaltlos aufwachen, weil man genau weiss, dass man nicht in den Wachzustand hinein gekannt ist, sondern, spätestens am Abend, auch wieder einschlafen kann. Ein gesundes Seelenleben pendelt rhythmisch zwischen den beiden polaren Wach-Schlaf-Kombinationen hin und her.

Es wäre eine lohnende Aufgabe, Lernstörungen daraufhin zu untersuchen, inwieweit hier der gesunde Rhythmus von Wachen und Schlafen, bzw. das unbewusste Vertrauen in die sinnvolle Abfolge der beiden Zustände gestört ist. Ein Kind, das sich eine neue Fähigkeit aneignet, muss diese jedenfalls so erwerben, dass es beim Begreifen, worum es geht, einmal ganz aufwacht, soweit, wie es eben kann. Das heisst also, dass auch das Kind, wenn es lernt, immer wieder seine Bewusstseinsgrenzen auslotet und zu erweitern trachtet, selbst, wenn ihm dieser Vorgang noch nicht verständlich ist. Bis zu einem bestimmten Alter wird man die Bedeutung dieses Vorgangs ja auch nicht thematisieren. Natürlich muss dann die Phase des Einschlafens folgen. Diese besteht häufig, zum Beispiel beim Rechnen Lernen, im Üben. Beides zusammen ergibt erst die Fähigkeit. Die häufig zu beobachtende Mechanisierung des

Übens bewirkt beim Schüler eine Abneigung, wirklich im Bemühen um Verständnis bis an die Grenze des ihm Möglichen zu gehen. Andererseits findet man gerade bei älteren, grundsätzlich begabten Schülern, in der Mathematik die Neigung, zu glauben, mit dem prinzipiellen Verständnis für einen Aufgabentypus würde dieser, ohne die zusätzliche Bemühung des Übens, zugleich beherrscht. Nach meiner Erfahrung führt diese Ansicht praktisch immer zu Misserfolgen. Das Aufwachen, das zum Verständnis führt, bewährt sich im anschließenden Üben, gibt diesem erst einen Sinn, denn mechanisches Üben ist langweilig. Die Kunst liegt gerade darin, zwischen dem einen und dem anderen die Mitte zu halten.

9

Im Folgenden möchte ich anhand einer einfachen Übung zeigen, inwiefern die projektive Geometrie besonders dazu geeignet ist, eine Aktivität zu entfalten, die sich im Bereich der Bewusstseinsgrenze entfaltet. Ich gehe davon aus, dass eine solche Aktivität bei älteren Schülern und auch bei Erwachsenen von harmonisierender Wirkung auf das seelische Gleichgewicht ist. Ein weiterer Gesichtspunkt ist, dass die Bezüglichkeit, von der oben die Rede war, erhalten bleibt: Etwas gestaltet sich aus in Bezug auf ein weiteres Element. Eine Gerade bewegt sich in Bezug auf Punkte, ein Punkt in Bezug auf Geraden. Ich möchte dazu zwei verschiedene Möglichkeiten betrachten, wie man Dreiecke in Bewegung bringen kann. Die beiden Punkte A und B auf der unteren Dreiecksseite bleiben fix, der dritte Punkt C wandert auf einer Geraden nach oben. (siehe linkes Bild S. 12)⁵ Das Dreieck wird spitzer, die Innenfläche vergrößert sich, in dem Moment, wo die beiden in C zusammenlaufenden Seiten des Dreiecks parallel werden, berührt die Innenfläche die Unendlichkeit. Lässt man den Punkt C weiter laufen, so kommt er von unten her aus der Unendlichkeit „zurück“ und tritt wieder in die Endlichkeit ein. Die ursprüngliche Innenfläche des Dreiecks erstreckt sich über die Unendlichkeit und zugleich entsteht eine neue, ganz im Endlichen liegende Dreiecksfläche. Der Punkt C läuft weiter, bis er auf der Seite c zu liegen kommt. In dem Moment füllt die ursprüngliche Innenfläche des Dreiecks die ganze Ebene aus. Läuft der Punkt C nochmals weiter, etwa bis zu der Stelle, von der er ursprünglich ausgegangen ist, so ist der ursprüngliche Innenraum zum Aussenraum geworden. Lässt man den Punkt C die Gerade nochmals durchlaufen, so kehrt die Verwandlung zu ihrem

⁵ Die Konstruktion geht auf die Anregung einer Teilnehmerin der Mathematiklehrrtagung 2011 in Weimar zurück.

Ausgangspunkt zurück, aus dem Aussen wird wiederum ein Innen. Besonders auffallend an dieser Metamorphose ist, dass sie zu einem grossen Formenreichtum führt, obwohl nur ein Punkt bewegt wird und die Bewegung auf das Durchlaufen einer Geraden eingeschränkt ist. An diesem Beispiel kann man sich den Durchgang durch die Unendlichkeit besonders eindrücklich verdeutlichen. Es gibt eine andere Möglichkeit. Diese bezieht nicht nur die Unendlichkeit mit ein sondern auch die Dualität oder Polarität von Punkt und Gerade in der Ebene.⁶ Das Bewegungsprinzip wird dadurch etwas komplizierter. (siehe rechtes Bild S. 12) Die Ecken des Dreiecks laufen auf je einer Geraden. Die drei Geraden, die sich so ergeben, gehen durch einen Punkt Z. Die Seiten des Dreiecks drehen je in einem Punkt. Die drei Punkte, die sich so ergeben, liegen auf einer Geraden z. Im abgebildeten Fall dreht sich die Seite c um den Fernpunkt der Geraden, aber das ist nicht zwingend. Drei Punkte in einer Geraden, drei Geraden durch einen Punkt, das entspricht sich polar. Wenn man vom ersten Dreieck ausgehend einen Punkt verschiebt, so ist damit das nächste Dreiecksstadium festgelegt. Hier können alle drei Punkte A, B und C durch die Unendlichkeit laufen, dasselbe gilt für die Seiten. Auch der Innenbereich des Dreiecks kann eine Form annehmen, die sich durch die Unendlichkeit erstreckt. Im Grenzfall kann das Dreieck in eine Gerade, beziehungsweise in einen Punkt fallen. Was hier nicht vorkommen kann ist, dass der Innenbereich sich zum Aussenbereich umstülpt oder umgekehrt. Dadurch, dass die Polarität von Punkt und Gerade berücksichtigt wird, ergibt sich der Anlass, über Innen und Aussen neu zu denken. Der Innenbereich kann im Endlichen geschlossen sein, oder er kann sich über das Unendliche ausdehnen. Der Aussenbereich kann die gesamte unendlich ferne Gerade der Ebene enthalten oder Teile von ihr. Die Innenbereiche, die ein Dreieck bildet, kann man als Kerne bezeichnen, die Aussenbereiche als Hüllen.⁷ Denkt man die Seiten des Dreiecks über die ganze Ebene verlängert, und setzt man einen Punkt an eine beliebige Stelle, so bildet die gesamte Fläche, die der Punkt, wenn er sich bewegt, erreichen kann, ohne dabei eine der Seiten zu überqueren, einen Kern. Beachtet man vom Dreieck nur die Punkte und legt eine Gerade in die Ebene, so bildet die gesamte Fläche, die die Gerade überstreichen kann, ohne einen der Punkte zu überqueren, eine Hülle. Alle

⁶ Entsprechende Konstruktionen finden sich ausführlich in:

Arnold Bernard: Projektive Geometrie aus der Raumschauung zeichnend entwickelt, Stuttgart 1984

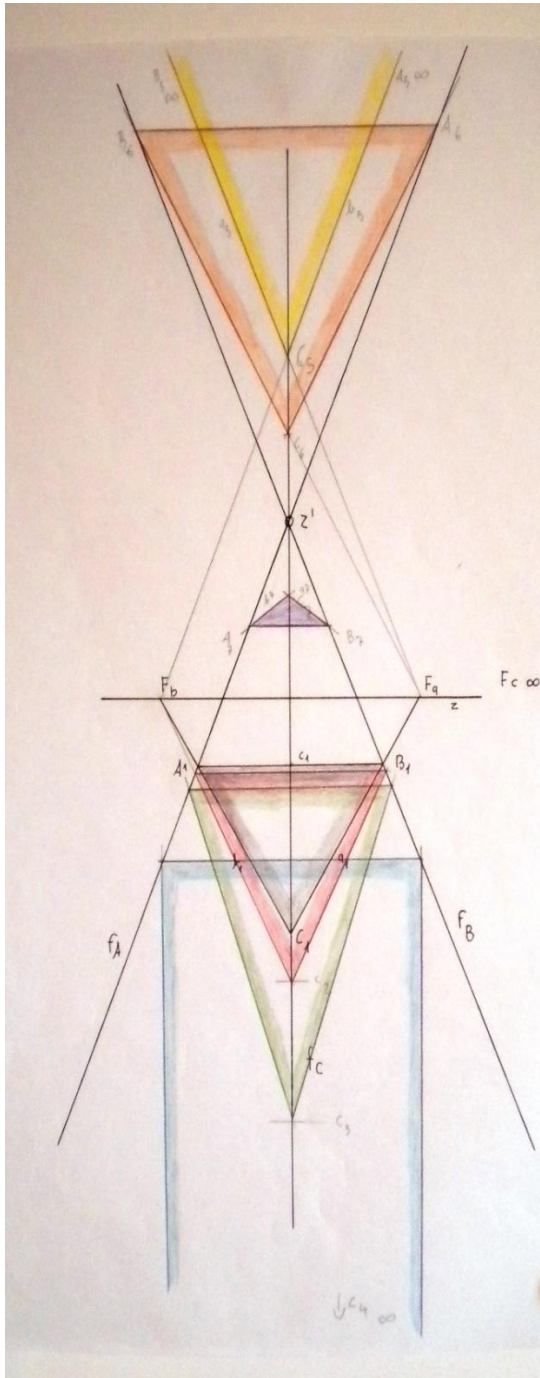
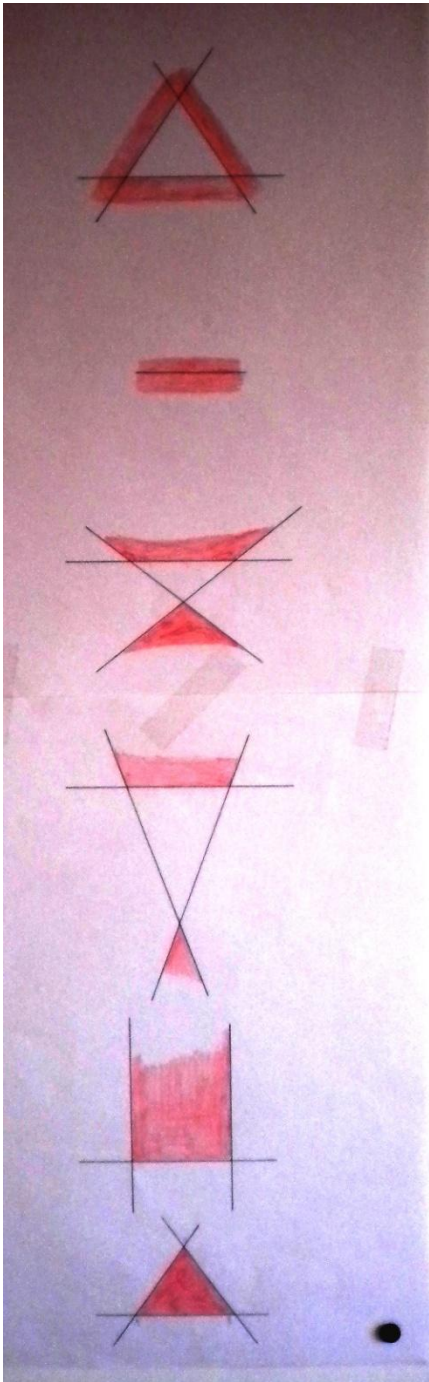
⁷ Vgl. Louis Locher Ernst: Raum und Gegenraum, Dornach 1970

Dreieckskerne zusammen, bedecken die Ebene einmal vollständig. Die Hüllen überlagern einander, allerdings nur dann, wenn man die Flächen in üblicher Weise, sozusagen aus dem Punktbewusstsein betrachtet.

Eine interessante Übung besteht nun darin, zu schauen, wie sich die Kerne und Hüllen verändern, wenn man zu den drei Geraden eine vierte hinzufügt oder umgekehrt, wenn man zu den drei Punkten einen vierten hinzufügt. Die hinzugefügte vierte Gerade teilt drei der vier Punktfelder des Dreiecks in zwei Punktfelder. (siehe untere Zeichnung S. 13) Es ergeben sich also insgesamt sieben Punktbereiche, drei viereckige und vier dreieckige. Die Punktbereiche bedecken die Ebene einmal ganz. In der Zeichnung sieht man, wie die zusätzliche Gerade die ursprünglich vorhandenen Punktbereiche zerlegt. Fügt man zu drei Punkten einen vierten hinzu, so ergibt sich dieselbe Differenzierung in Bezug auf die Strahlenbereiche. (siehe obere Zeichnung S. 13)⁸ Drei der vorher vorhandenen vier dreieckigen Strahlenbereiche werden zerlegt in je einen dreieckigen und einen viereckigen Bereich. Legt man zeichnerisch die beiden neu entstehenden zusammengehörigen Bereiche übereinander, so ergeben sich interessante Formaspekte. Beide Bereiche zusammen haben dieselbe Begrenzung, die dem ursprünglichen Bereich zu eigen ist. In der Zeichnung ist der neu entstandene dreieckige Strahlenbereich gelb, der viereckige blau schraffiert. Blickt man auf den Überlappungsbereich, der grün erscheint, so ist dieser jeweils ein Winkelfeld, dessen Scheitelpunkt der neu hinzugekommene vierte Punkt ist. Die nicht überlappenden Bereiche sind jeweils wieder dreieckig (gelb), bzw. viereckig (blau). Von Überlappungsbereich zu sprechen, macht allerdings nur Sinn, wenn man mit gewöhnlichem Bewusstsein von aussen auf die entstandenen Flächen schaut. Nimmt man den Gesichtspunkt einer sich in der Fläche bewegendes Gerade ein, so bewegt sich diese immer nur entweder im gelben oder im blauen Bereich, wenn man von dem Sonderfall der sich im hinzugekommenen Punkt drehenden Gerade absieht. Schaut man die Zerlegung derjenigen Bereiche an, bei denen sich sowohl der Kern als auch die Hülle durch die Unendlichkeit zieht, so fällt auf, dass die entstandenen Flächen in relativ harmonischer Art das Blatt aufteilen. Hier lohnt sich weiteres Experimentieren.

⁸ Die Übung und insbesondere diese Art der Darstellung hat sich ergeben im Laufe einer längeren gemeinsamen Arbeit mit Roland Neff an Texten von Arnold Bernard und vor allem von Louis Locher.

12



13

