Bad Nauheim

24. Januar 2015

Die Einführung der negativen Zahlen als Denkform des Ätherischen

Motto:

- Waldorfpädagogik ist nicht das dogmatische Befolgen starrer Regeln.
- Sie ist nicht Beliebigkeit.
- Sie ist ein authentisches Handeln aus Erkenntnis der menschenkundlichen Bedeutung des Stoffes und der Methode - unter Berücksichtigung der immer einmaligen Schicksalssituation.

Zur Problematik der negativen Zahlen

Heinz Steinbring (JMD 15 (94) 3/4, S.277-309) 277

Symbole, Referenzkontexte und die Konstruktion mathematischer Bedeutung - am Beispiel der negativen Zahlen im Unterricht

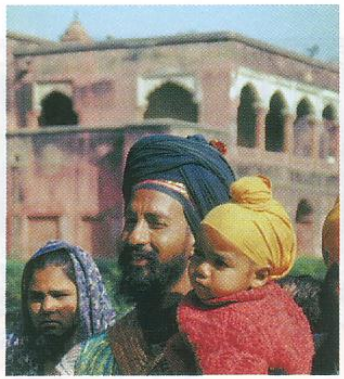
Einleitung: Eine problematische Spannung zwischen epistemologischer Analyse und didaktischer Konstruktion mathematischen Wissens

Der Übergang von den natürlichen zu den negativen Zahlen stellt im Rahmen der Zahlbegriffsentwicklung gemäß der Linie der Zahlbereichserweiterungen eine immer wieder diskutierte besondere Problematik dar. In vielen Untersuchungen und Arbeiten wird betont, dass es hier nach didaktischen und epistemologischen Überlegungen keine "natürliche" Entwicklungsbrücke zu geben scheint [vgl. beispielsweise zu der Vielzahl der hierzu geschriebenen Arbeiten … Der Begriff der negativen Zahlen ist kein logisches, deduktives Ergebnis·, das man aus der Kenntnis der natürlichen Zahlen in Form einer mathematischen Schlussfolgerung ableiten könnte. Auch die vielfältigen, methodischen Überlegungen zur Einführung der negativen Zahlen weisen immer wieder Brüche, Künstlichkeiten, sowie Ungereimtheiten für die Schüler und Schülerinnen auf.

Mit dem Begriff der negativen Zahlen steht man vor folgender Problematik: Einerseits sind die Schüler und Schülerinnen es gewohnt, in relativ natürlicher Weise, d.h. mit konkreten und unmittelbar inhaltlichen Vorstellungen und Anwendungsmöglichkeiten die natürlichen Zahlen im Sinne von Zählen, Vermehren, Hinzuzählen, Wegnehmen usw. zu benutzen. Mit den negativen Zahlen wird nun ein für die Intuition sperriger Begriff betrachtet: Negative Zahlen sind nur in Grenzen entsprechend den gewohnten Ansichten auf konkrete Sachsituationen und reale Umweltbezüge anwendbar; hierzu dienen Modelle wie "Kontenführung-, "Höhendifferenzen", "Temperaturen" usw. …

Zur Problematik der negativen Zahlen

Bereits in den mathematischen Schriften der Griechen und vor allem der Inder im ersten Jahrtausend n. Chr. traten Zeichen für negative Zahlen auf. Damit wurden aber stets konkrete Vorstellungen verbunden. So heißt positiv auf indisch „dhana“ (Vermögen) und negativ „ṛ ṇa“ (Schulden).



Zahlen und Größen wurden lange nicht unterschieden. Die negativen Zahlen fanden nur zögernd Anerkennung.

So schreibt der Mathematiker D'ALEMBERT (1717–1783) in einer Enzyklopädie:

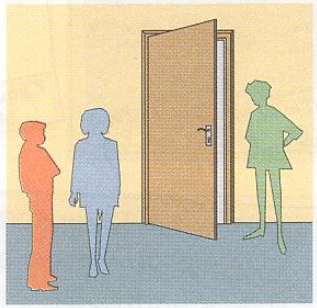
> *„Die negativen Größen sind das Gegenteil der positiven. … Zu sagen, dass eine negative Größe unterhalb von nichts ist, heißt, eine unvorstellbare Sache vorzubringen.“*

2. Versuche die begonnenen Angaben so fortzusetzen, dass sie zur Gleichung $3 - 7 = -4$ passen!

a) Die Temperatur beträgt 3 °C …

b) In einem Raum befinden sich 3 Personen …

c) Silke hat 3 Tafeln Schokolade …



3. Was meinte der französische Mathematiker BLAISE PASCAL (1623–1662), als er feststellte:

> *„Ich kenne Leute, die nicht begreifen können, dass 0 übrig bleibt, wenn man von 0 vier wegnimmt.“*

Begründungen der negativen Zahlen / des Negativen

- Formale Definition: Lösungen von $a + x = b$
- Ist eine inhaltliche Begriffsbildung möglich?
  - Carl Friedrich Gauß
  - Rudolf Steiner und andere

Carl Friedrich Gauß zum Begriff der negativen Zahlen

- „Auf diese Weise stellte sich das Negative als mathematischer Ausdruck des umfassenden Begriffs des Gegensatzes heraus. Ein Ergebnis, das C. F. Gauß 1831 in seiner Arbeit *Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio secunda* so formulierte ([53], S.175 f.): Die negativen Zahlen «können nur da eine Anwendung finden, wo das Gezählte ein Entgegengesetztes hat, was mit ihm vereinigt gedacht der Vernichtung gleich zu stellen ist. Genau besehen findet diese Voraussetzung nur statt, wo nicht Substanzen (für sich denkbare Gegenstände), sondern Relationen zwischen je zwei Gegenständen das Gezählte sind. Postuliert wird dabei, daß diese Gegenstände auf eine bestimmte Art in eine Reihe geordnet sind *(A, B,* C, *D,* ...) und daß die Relation des *A* zu *B* als der Relation des *B* zu C usw. gleich betrachtet werden kann. Hier gehört nun zu dem Begriff der Entgegensetzung nichts weiter als der Umtausch der Glieder der Relation, so daß, wenn die Relation (oder der Übergang) von *A* zu *B* als + 1 gilt, die Relation von *B* zu *A* durch -1 dargestellt werden muß. Insofern also eine solche Reihe auf beiden Seiten unbegrenzt ist, repräsentiert jede reelle ganze Zahl die Relation eines beliebig als Anfang gewählten Gliedes zu einem bestimmten Glied der Reihe.» Zwar fand diese Erklärung von Gauß nicht ungeteilte Zustimmung, doch betrafen die Einwände im wesentlichen nur die Abgrenzung des Begriffes «Gegensatz».“

- (Zitiert nach Gerhard Kowol, Gleichungen. Eine historisch-phänomenologische Darstellung, S. 90)

Rudolf Steiner zum Begriff des Negativen

- Operatoren
- Raum und Gegenraum
- Ponderable und imponderable Kräfte
- Schulden im orientalischen und europäischen Denken
- Die Spiegelung von Wirklichkeitsbereichen in die Zahlenwelt

	Physisches +1	
Ich $\sqrt{+1}$		**Ätherisches** -1
	Astralisches $\sqrt{-1}$	

Rudolf Steiner: Negative Zahlen als Operatoren

(Nach den Ausführungen zum Differenzial-Quotienten: "… Dann bekommen Sie die Möglichkeit, nicht davon auszugehen, dass die Rechnung eine Fixierung ist der Geometrie, sondern dass die Geometrie eine Illustration ist für die Rechnung. Das sollte man allgemein mehr beachten. Man sollte zum Beispiel die positiven und negativen Zahlen nicht als etwas an sich betrachten, sondern man sollte die Zahlenreihen nehmen so: 5 - 1, 5 - 2, 5 - 3, 5 - 4, 5 - 5, 5 – 6; jetzt habe ich nicht genug, weil mir eins fehlt, das schreibe ich als -1. Das Fehlende betonen *ohne* Zahlenlinie. Dann bleiben sie im Zahlenmäßigen. Die negative Zahl ist die nicht vorhandene Menge, der Mangel des Minuenden. Dahin ist viel mehr innere Aktivität! Dadurch hat man die Möglichkeit, beim Schüler Fähigkeiten anzuregen, die viel realer sind, als wenn man alles nur von der Geometrie her macht."

Rudolf Steiner: Raum und Gegenraum

- Rudolf Steiner regt an, den Begriff des Gegenraumes zu bilden von dem in der projektiven Geometrie eine Art Abbild gefunden werden kann (s.u. George Adams, Louis Locher-Ernst u.a.)
- Da Raum kein Ding, sondern Beziehung und Erfassensweise der Welt ist, verlangt das Verständnis des Gegenraums nicht nur eine formale Beschreibung, sondern neue Bewusstseinsformen. Dadurch erscheinen Aspekte der Wirklichkeit, die ohne diese Bewusstseinsformen nicht erfasst werden können.

Rudolf Steiner: Ponderable und imponderable Kräfte

- Vor allem in den Kursen *Das Verhältnis der verschiedenen naturwissenschaftlichen Gebiete zur Astronomie (*GA 323) und *Proben über die Beziehungen der Geisteswissenschaft zu den einzelnen Fachwissenschaft* (GA 73a) spricht Rudolf Steiner über die Polarität von ponderablen und imponderablen Kräften und – wie auch sonst häufig – über die imponderable Natur der Sonnenstofflichkeit.

Rudolf Steiner:Schulden im orientalischen und europäischen Denken

"… Diese 50 Fr. Schulden sind ebenso wirksame Kräfte für die Lebenssituation, wie auf der anderen Seite im entgegengesetzten Sinne 50 Fr. Vermögen wirksame Kräfte sind. Auf diesem Gebiete lässt sich wahrscheinlich der Europäer auf die Realität der Schulden ein, denn es muss in der realen Welt immer etwas vorhanden sein, wenn man Schulden hat. Die Schulden, die man selber hat, genügen für einen eine noch so sehr negative Größe sein, für den anderen dem man sie schuldet, sind sie aber eine recht positive Größe.

Also, wenn es nicht bloß auf das Individuum ankommt, sondern auf die Welt, dann ist dasjenige, was ja nach der einen Seite der Null liegt, die entgegengesetzt ist der Vermögensseite, doch etwas sehr Reales. Der orientalische empfangen, aber nicht, weil er irgendwie spekulierte, sondern weil in seiner Anschauung nötigste, so zu empfinden, er empfand:

Da erlebe ich auf der einen Seite den Raum und die Zeit, und auf der anderen Seite erlebe ich dasjenige, was nicht im Raum und in der Zeit beobachtet werden kann, was für die Raum-und Zeitdinge und für das Raum-und Zeitgeschehen ein Nichts ist, aber eine Realität ist, eben nur eine andere Realität."

Die mathematische Darstellung der Idee von Raum und Gegenraum durch die projektive Geometrie

- George Adams
- Frühe Schrift: Von dem ätherischen Raume
- Die Pflanze in Raum und Gegenraum (zusammen mit Olive Whicher) u.a.m.
- Anwendungen auf die Physik

- Louis Locher-Ernst
- Zahlreiche Lehrbücher zur elementaren projektiven Geometrie

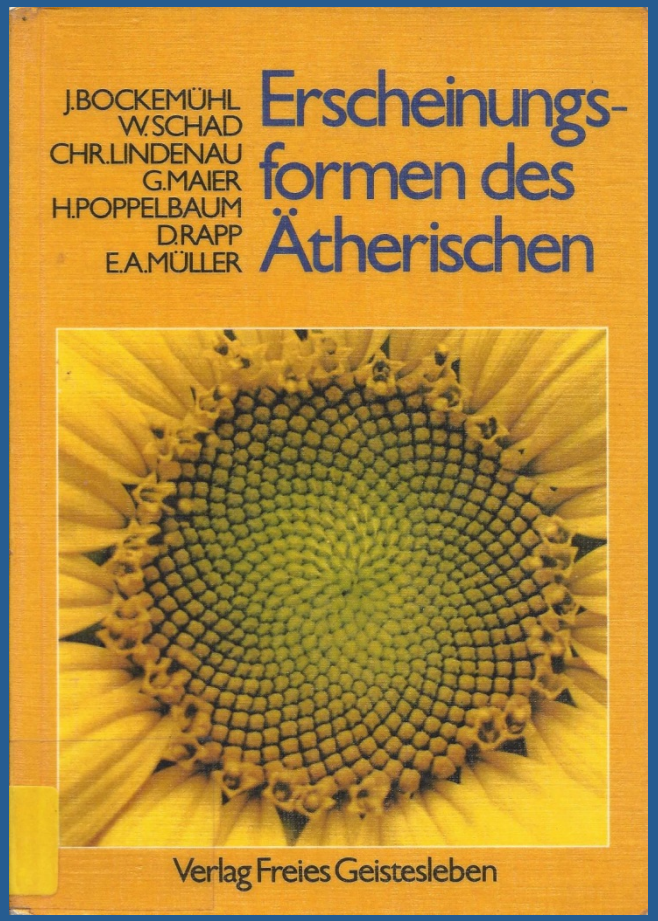
- Lawrence Edwards
- Anwendung der Wegkurven auf organische Gestaltungen

- Peter Gschwind
- Entwicklung der „Ich-Zahlen“ und Anwendungen auf die Physik

- Oliver Conradt
- Geometrische Algebra
- Anwendungen auf Physik und Technik u.a.m.
- ……

Denkformen des Ätherischen

- Hier möchte ich vor allem auf die Schrift von Jochen Bockemühl und Kollegen hinweisen:



Übliche didaktische Ansätze zum Verständnis der negativen Zahlen

- **Einige inhaltliche Aspekte**
  1. Negative Zahlen geben die Lage unterhalb des Nullpunktes einer Skala an.
  2. Negative Zahlen geben Abweichungen von einem Bezugswert an.
  3. Negative Zahlen geben einen Unterschied an.
  4. Negative Zahlen bezeichnen etwas Fehlendes.
  5. Negative Größen gibt es nicht.
- **Einige formale Aspekte**
  1. Negative Zahlen entstehen durch Spiegelung der gebrochenen Zahlen an Null.
  2. Sie haben den gleichen Abstand von der Null wie die entgegengesetzte Zahl.

Didaktische Einführungen an Waldorfschulen:

- Schulden
- Drehungen und geografische Koordinaten
- Temperaturskalen
- Erwärmen und Abkühlen
- Höhe über dem Meeresspiegel
- Auftrieb und Abtrieb
- Zahlenstrahl: Vorwärts- und Rückwärtsschreiten

Arnold Bernhard: Leichte und Schwere

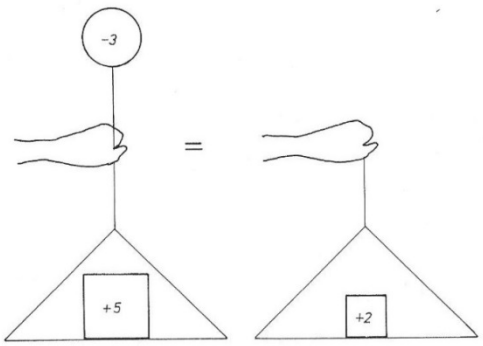


Fig. 4.1: 5 Schwere plus 3 Leichte wirken gleich wie 2 Schwere: (+5) + (–3) = (+2)

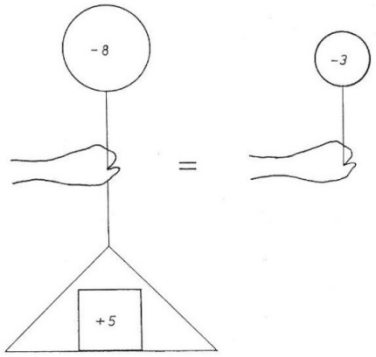


Fig. 4.2: 5 Schwere plus 8 Leichte wirken gleich wie 3 Leichte: (+5) + (–8) = (–3)

Ernst Schuberth: Zentrale Anliegen

- Inhaltliche Einbindung des Negativen als positives oder negatives Eigenkapital
- Lebenskundliche und insbesondere wirtschaftskundliche Bezüge
- Welche Wirklichkeitsgebiete werden durch eine Denkform erschlossen?
- Die erzieherische Bedeutung von Denkformen

Ernst Schuberth: Die Struktur einer Bilanz

Bilanz zum ...	
Aktiva	**Passiva**
I. Anlagevermögen (Werkzeuge, Geräte etc., die wir für die Produktion benötigen). Physische Grundlagen der wirtschaftlichen Tätigkeit	III. Verbindlichkeiten (Darlehen, von uns unbezahlte Rechnungen etc.) Ermöglichung der wirtschaftlichen Tätigkeit aus einem sozialen Umfeld
II. Umlaufvermögen (Materialien für die Produktion, Geld, offene Forderungen etc.) Beschreibt die wirtschaftlichen Prozesse	IV. = I + II - III Eigenkapital Beschreibt den Freiraum für neue Initiativen
Summe: I+II	Summe: I+II

Durch die Art, wie das Eigenkapital berechnet wird, ist sichergestellt, dass die Summen auf der Aktiv- und der Passivseite immer gleich sind.

Jede produktive wirtschaftliche Tätigkeit beruht ihrer Natur nach auf der Verwendung von Leihgeld.

Ernst Schuberth: Zum bilanziellen Denken

- Im Gegensatz zur Einnahmen- und Ausgabenrechnung bezieht die Bilanz die Beziehungen zu anderen Menschen ein.
- Sie macht verständlich, woher die Möglichkeit zu Schulden kommt und verweist auf ein vorausgesetztes soziales Gefüge
- Unterscheide, über welche Barmittel Ioanna verfügen kann und wie ihre Bilanz aussieht, wenn sie ihre Forderungen und Verpflichtungen berücksichtigt.
- Die Möglichkeit, über Barmittel zu verfügen, bedeutet *nicht* schuldenfrei zu sein

Bilanz von Ioana zum 17.11.XX			
Aktiva			Passiva
Barvermögen	5 Euro	Geliehen von Großmutter	5 Euro
Forderung an älteren Bruder	7 Euro	Geliehen von jüngerer Schwester	5 Euro
———————	———	Eigenkapital	2 Euro
Summe	12 Euro	Summe	12 Euro

Bilanz von Ioana zum 18.11.XX			
Aktiva			Passiva
~~**Barvermögen**~~	~~5 Euro~~	Geliehen von Großmutter	5 Euro
Forderung an älteren Bruder	7 Euro	Geliehen von jüngerer Schwester	5 Euro
———————	———	Schulden als Eigenkapital	3 Euro
Summe	7 Euro	Summe	7 Euro

Anwendungen der negativen Zahlen

Vor allem auf *Prozesse* hinweisen:

- Schwimmen – Auftrieb und Abtrieb
- Auf- und Absteigen eines Heißluftballons
- Drehungen und geografische Koordinaten
- Erwärmen und Abkühlen
- Vorwärts und rückwärts gehen
- Historische und astronomische Jahreszählung

- Die Frage der Übungen werde ich hier ausklammern, da dazu eine Arbeitsgruppe besteht.

Stephan Sigler

- Ich möchte nur auf seine schöne Ausarbeitung zu den negativen Zahlen hinweisen, da wir ihn gleich selber hören werden