Körperberechnungen - vom Quader zur Kugel

als bekannt vorausgesetzt werden:
- Quadervolumen $V_Q = l \cdot b \cdot h$
- Kreisfläche $A_O = \pi\, r^2$

1. Schritt: Drittelung eines Würfels
Vorübungen:

- - wieviele Flächen, Ecken, Kanten hat der Würfel?
  in der Vorstellung:
  - Würfel liegt auf einer Fläche, wo sind die Ecken?
  - Würfel steht auf einer Kante: wo sind die Ecken?
  - an einer Würfelecke wird ein Faden befestigt, der Würfel wird aufgehängt (steht auf einer Ecke), alles noch in der Vorstellung:
  wo sind die Ecken?
  (Eine oben, eine unten, fehlen also noch 6!
  An der oberen Ecke laufen drei Kanten zusammen, am unteren Ende dieser drei kanten findet man je eine weitere Ecke, die übrigen drei Ecken sind über eine Kante von der zuunterst liegenden Ecke zu erreichen.
  Manchmal benötigt man hier schon einen realen Würfel, um die Vorstellung zu unterstützen)

- Wie kann man einen Apfel gerecht an zwei Kinder verteilen?
  - an vier Kinder?
  - an drei Kinder? (=> Mercedesstern-Messer, drei gleich große Schnitze)

Jetzt kann man versuchen, den Würfel in drei identische Teile zu zerlegen, indem man den an einer Ecke aufgehängten Würfel durch drei senkrechte Schnitte bis zur (senkrechten) Mittelachse teilt. Die Schnitte gehen durch die drei kanten, die oben zusammenlaufen und schneiden die drei Flächen, die an der unteren Ecke zusammentreffen, jeweils diagonal durch.

Gutes Hilfsmittel Marke Eigenbau: Würfel mit Seiten in den drei Grundfarben Gelb, Blau und Rot, die unteren Flächen dann in Orange, Violett und Grün, so dass die Miaschfarben an die passenden grundfarben anstoßen. Dann hat jedes der drei Würfelteile eine quadratische Fläche in einer Grundfarbe und zwei rechtwinklig-gleichschenlklige Flächen in zwei Mischfarben. - Ich habe mir auch den geteilten Würfel gebaut.

Wir erhalten drei Pyramiden (Grundfläche in der Grundfarbe), mit der gleichen Grundfläche wie der Würfel und mit der gleichen Höhe wie der Würfel.
Da alle drei Pyramiden das gleiche Volumen haben müssen, ist es bis zu $V_{Pyramide} = \frac{1}{3}\, G \cdot h$ nicht mehr weit.
Da die Form der Grundfläche für das Volumen offensichtlich nicht von Belang ist (zwei zusammengeschobene Würfel-Drittel-Pyramiden haben ein Rechteck als Grundfläche, also doppelte Grundfl. und doppeltes Volumen..), kann man die Formel sofort auf alle Spitzkörper, also auxch auf Kegekl ausweiten.
Man hat also zwei nur Volumenformeln:

Spitzkörper (Kegel und Pyramiden): $V = \frac{1}{3}\, G \cdot h$
Prismen und Zylinder: $V = G \cdot h$

die Grundfläche ist jeweils passend zu berechnen.

Übungsaufgabe zu zusammengesetzten Körpern (s. Zeichnung):
„Vorbereitung zum Satz des Cavalieri“

Körper A :
Würfel, aus dem eine auf der Spitze stehende Pyramide herausgearbeitet wurde,
also $V_A = V_{Wuerfel} - V_{Pyramide}$

Körper B:
Satteldach oder Zelt, dessen einer Giebelseite im 45°-Winkel abgeschnitten wurde,
bzw. mathematisch ausgedrückt: Im rechten Gitterwürfel ein liegendes Prisma mit einem gleichschenkligen Dreieck als Grundfläche
im linken Gitterwürfel an das Prisma direkt angesetzt eine Pyramide mit der gleichen Grundfläche wie das Prisma.
also $V_B = V_{Prisma} + V_{Pyramide}$

Vor der Rechnung eventuell schätzen lassen, welcher Körper wohl das größere Volumen hat.

Man erhält $V_A = a^3 - \frac{1}{3}a^3 = \frac{2}{3}a^3$

und $V_B = \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{6}a^3 = \frac{2}{3}a^3$

Also zwei Körper gleichen Volumens (und gleicher Höhe!)

Körper A und B - 2. Teil: Berechnung der Querschnittsflächen parallel zu und im unterschiedlichem Abstand zur Grundfläche.

Da die Querschnittsfläche Q von Körper A im Abstand d zur Grundfläche mit $Q = a^2 - d^2$ zu berechnen ist und die Querschnittsfläche von B mit $Q_B = (a+d)(a-d)$ sind Querschnittsflächen auf gleicher Höhe immer auch von gleichem Flächeninhalt.

Ist das immer so? Wie oft muss man schneiden und rechnen, bis es bewiesen ist? Was bedeutet „überall schneiden“..?
=> „Allen gemeinsam“ also allgemein rechnen, eben mit Buchstaben.

Man erhält die dritte binomische Formel $(a + d)(a - d) = a^2 - d^2$

Wir haben also zwei Körper gleichen Volumens, gleicher Höhe mit gleich großen Querschnittsflächen auf jeder Ebene parallel zur Grundfläche.

Erste Grenzwertbetrachtung in der 10. Klasse: Beide Körper in hauchdünne Scheiben schneiden (Papierstapel), Papiere auf gleicher Höhe haben den gleichen Flächeninhalt, besser: das gleiche Volumen, da auch Papier eine Stärke, bzw. Höhe hat, also muss das Gesamtvolumen gleich sein.

Satz des Cavalieri für alle verständlich formulieren lassen:
Wenn zwei Körper A und B die gleiche Höhe haben, und ihre Querschnittsflächen in jeder Ebene parallel zur Grundfläche den gleichen Flächeninhalt haben, dann haben diese beiden Körper auch das gleiche Volumen.

Achtung! Die Umkehrung gilt natürlich nicht.

Diesen Satz braucht man (meistens) nur einmal im Leben, nämlich jetzt:

Um das Kugelvolumen herzuleiten, berechnen wir Volumen und Querschnittsflächen von Zylinder, Kegel und „ausgebohrtem Zylinder“, alle drei mit gleichem Radius und der Höhe h=r. (s. Zeichnung)

Die Querschnittsfläche der Halbkugel in Abhängigkeit von Kugelradius und Schnittflächenhöhe d erhält man, indem man aus Kugelradius, Abstand d der Querschnittsfläche zur Grundfläche und Schnittkreisradius r_S ein rechtwinkliges Dreieck bildet: $r^2 = d^2 + r_S^2$

Da die Halbkugel auf jeder Höhe den gleichen Schnittflächeninhalt hat wie der ausgebohrte Zylinder, muss ihr Volumen das des ausgebohrten Zylinders sein.
Durch Verdoppelung erhält man das Kugelvolumen.

An der Tagung vergessen, aber noch gut anzufügen:
Vom Kugelvolumen zur Kugeloberfläche (mit wassermelonen)
Wie schneiden eine kugelrunde Wassermelone in der Vorstellung in Schnitze und immer kleinere Teile, die alle so ähnlich wie Pyramiden aussehen: Spitze ist der Melonenmittelpunkt, die Grundseite (Schale) ist aber gewölbt. Alle Melonen-“Pyramiden“ werden so zusammengeschoben, dass sie aneinanderstoßen.
je kleiner die Teile werden, umso weniger weit entfernt sich die Schale von der Tischebene, die Schale wird immer flacher.
Im Grenzfall (Vokabular aber der 10. Klasse anpassen) ist die Wölbung vernachlässigbar, und wir schieben die Melonenpyramidchen durch Scherung (hauchdünne Scheiben) zu einer einzigen Pyramide zusammen: Dies Pyramide hat eine Grundfläche G, die so groß ist wie die Kugeloberfläche O_K, Pyramidenhöhe h ist der Kugelradius r, Pyramidenvolumen ist das Kugelvolumen $V_K = \frac{4}{3}\pi r^3$

also gilt mit $V_{Pyr} = \frac{1}{3}G \cdot h$ in diesem Fall $V_{Pyr} = \frac{1}{3}\,O_K \cdot r$ und Kugelvolumen $V_K = \frac{4}{3}\pi r^3$

durch Gleichsetzen: $= \frac{1}{3}\,O_K \cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad | \cdot 3; \quad : \Gamma$
$O_K = 4\pi\, r^2$

Zum Merken: Ein Viertel-Melonen-Schnitz hat genauso viel rote Schnittfläche wie grüne Schalenoberfläche, eine Kugeloberfläche ist der vierfache Kreisinhalt, um eine halbkugelförmige Schale aus Blech zu treiben, muss das kreisrunde Blech zu Beginn doppelt so dick sein wie die gewünschte Wandstärke der späteren Schale.

An dieser Gedanken- und Erkenntnisfolge vom Quader zur Kugel können auch schwächere Schüler die Kraft des Denkens miterleben. Wir haben kein einziges Mal etwas gemessen und dennoch, bzw. gerade deshalb ein absolut exaktes Ergebnis erhalten.

Stuttgart, Februar 2017,
Gesine Geiselmann