Die Schildkröte des Zenon von Elea
Gedanken eines Mathematikers über das Unendliche

Ulrich Eckhardt
Universität Hamburg
Department Mathematik
— Optimierung und Approximation —
Bundesstraße 55
20 146 Hamburg
E–Mail: Eckhardt@math.uni-hamburg.de
http://www.math.uni-hamburg.de/home/eckhardt/

Inhaltsverzeichnis

Vortrag am 13. November 2007 auf Einladung der Universitätsgesellschaft Hamburg im Warburg-Haus, Hamburg.

1 Einleitung

Wir Menschen sind endliche Wesen, alles, was wir tun, erleben, wahrnehmen, denken ist endlich. Die Antithese des Endlichen ist das Unendliche. Irgendwann in der Geschichte der Menschheit begann man, über Unendliches nachzudenken. An diesem Thema sind vor allem Theologen (gewisser, aber nicht aller Religionen) interessiert, Philosophen und eben auch ganz besonders Mathematiker. Einer unserer bedeutenden Hamburger Mathematiker, Erich Hecke (1887 – 1947) hat sogar die Mathematik als „die Wissenschaft vom Unendlichen" charakterisiert [55, S. 3]. Ich selbst bin kein Theologe oder Philosoph, ich bin Mathematiker. Ich werde also vorwiegend über Mathematik reden und Theologie und Philosophie höchstens am Rande einbeziehen.

Ich möchte Sie nun zu einer Zeitreise einladen in das antike Griechenland vor etwa 2 500 Jahren. Vorher sollten Sie sich jedoch noch einer Sicherheitskontrolle unterziehen, indem Sie alles das zivilisatorische Gepäck, welches wir nun einmal mit uns herumtragen, ablegen, also Ihr Wissen um Autos, Flugzeuge oder Handys, alles das, was Sie über Quantentheorie oder Stringtheorie gehört haben. Vergessen Sie auch für einen Moment, daß Sie „wissen", daß die Erde kugelförmig ist und um die Sonne kreist – Hand aufs Herz, wie und woher „wissen" wir dies eigentlich?

Wenn wir uns mit der Geschichte beschäftigen, geraden wir allzuleicht in die Position des Famulus Wagner

> Verzeiht! es ist ein groß Ergetzen,
> Sich in den Geist der Zeiten zu versetzen,
> Zu schauen, wie vor uns ein weiser Mann gedacht
> Und wie wirs dann zuletzt so herrlich weit gebracht!

Ich gebe Ihnen ein Beispiel für solche „Zivilisationsschäden", die unser Vorhaben beeinträchtigen könnten. Es gibt einen Autor, den ich sehr schätze, Amir D. Aczel. Er ist Wissenschaftsjournalist und schreibt populärwissenschaftliche Bücher. Seine Stärke liegt im Recherchieren, und daher sind seine Bücher sehr informativ. Man sollte ihm aber nicht alles glauben. So schreibt er in einem Buch [1, S. 60].

> Am Cape Perpetua hebt sich die schroffe Küste Oregons dreihundert Meter über den Meeresspiegel, während unten die hohe Brandung des Pazifiks mit der Regelmäßigkeit eines Uhrwerks in die zerklüfteten Einbuchtungen klatscht. Dieses über einem tiefblauen Ozean hoch in den Himmel ragende Cape Perpetua ist einzigartig. Für jemanden, der ganz oben auf der Spitze des Vorgebirges steht, kann kein Zweifel daran bestehen, dass die Erde rund ist. Der weite Ozean, der sich vor dem Beobachter

> ausbreitet, ist in jeder Richtung, in die das Auge schauen kann, sanft nach unten gekrümmt. Wenn ein Schiff dem Horizont entgegenfährt, scheint es für den Beobachter den größten Teil der Zeit auf der gekrümmten Oberfläche nach unten zu gleiten, bis es allmählich hinter dem riesigen blauen Ball verschwindet.
>
> Hätten die alten Babylonier, Ägypter oder Griechen an der Küste von Oregon gelebt, vielleicht wäre die Geschichte der Physik oder der exakten Wissenschaften ganz anders verlaufen.

Hier geht einiges durcheinander. Da liest man, daß eben in Amerika alles größer und besser ist. Als ob es in Griechenland nicht auch Steilküsten gegeben habe, und als ob das Mittelmeer für den Effekt nicht auch genügt hätte. Sehen wir von den Babyloniern und Ägyptern ab – sie waren nicht wirklich an der Form der Erde interessiert, so wußten die Griechen schon sehr früh, daß die Erde rund sei. Daß sie in einem Jahr um die Sonne kreist, war bereits Aristarch von Samos (310 v. Chr. – um 230 v. Chr.) bekannt, er hatte sogar die Entfernung der Sonne von der Erde abgeschätzt. Allerdings hätten die Griechen als Seefahrer als Beleg für die Kugelform der Erde einen Blick auf den Horizont nicht akzeptiert, denn sie wußten sehr genau, daß gerade in Horizontnähe der optische Eindruck zu manifesten Trugschlüssen führt.

2 Die Vorsokratiker – Parmenides

Vor etwa 2 500 Jahren (es kommt mir auf einige Jahrhunderte mehr oder weniger nicht an) kam es in verschiedenen Teilen der Erde zu einem Phänomen, welches man als Entdeckung des Denkens bezeichnen kann. Karl Jaspers [40] bezeichnet diese Zeit als *Achsenzeit* (siehe Tabelle 1).

Zarathustra	ca. 800 v. Chr. oder 700 v. Chr.
Buddha	560 v. Chr. – 480 v. Chr.
Konfuzius	551 v. Chr. – 479 v. Chr.
Lao-Tse	604 v. Chr., wahrscheinlich 4. bis 3. Jhdt. v. Chr.
Elias	um 870 v. Chr.
Jesaias	um 735 v. Chr. oder 746 v. Chr. (Berufung) bis kurz nach 701 v. Chr.
Deutero-Jesaja	um 550 v. Chr.
Trito-Jesaja	um 530 v. Chr.
Jeremias	um 645 v. Chr., wirkte in Jerusalem von rund 627 bis 585 v. Chr.
Homer	8. Jahrhundert v. Chr.
Hesiod	um 700 v. Chr.
Thales von Milet	um 635 v. Chr. – 547 v. Chr.
Parmenides von Elea	um 540 v. Chr. – nach 480 v. Chr.
Zenon von Elea	um 490 v. Chr. – 430 v. Chr.
Sokrates	469/470 v. Chr. – 399 v. Chr.

Tabelle 1: Die Achsenzeit.

Die Philosophen, die im antiken Griechenland – genauer in dessen Kolonien – in der Zeit zwischen Thales und Sokrates wirkten, faßt man unter dem Namen *Vorsokratiker* zusammen. Es gibt deren eine große Zahl, und die Zeit der Vorsokratiker zeichnete sich durch eine Fülle von Ideen über die Beschaffenheit unserer Welt aus. Es gibt zahlreiche Publikationen über die Vorsokratiker, insbesondere die Texteditionen von Hermann Diels und Walter Kranz [44, 45, 46], die kommentierte Sammlung von Übersetzungen von Wilhelm Capelle [14] und eine große Anzahl von sehr unterschiedlichen Büchern über die Inhalte der verschidenen philosophischen Ansätze [67, 28, 61, 18]. Von den Schriften der Vorsokratiker ist uns nur wenig bekannt, das Meiste fragmentarisch aus Zitaten späterer Autoren.

Ich möchte mich hier auf zwei dieser Philosophen konzentrieren, nämlich auf Parmenides von Elea (um 540 v. Chr. – nach 480 v. Chr.) und auf seinen Schüler Zenon von Elea (um 490 v. Chr. – 430 v. Chr.). Parmenides hat ein Lehrgedicht geschrieben, welches höchst bemerkenswerrt ist. Von diesem Gedicht kennen wir einen großen Teil, etwa ein Drittel bis eine Hälfte, nämlich etwa 140 Zeilen. Das Gedicht besteht aus drei Teilen, einem Proömium, einem Teil der die Welt der Wahrheit beschreibt und einem (nur als „Trümmerhaufen“ [62, S. 124, 375] vorhandenen) Teil über die trügerische Welt der Wahrnehmungen. Es gibt ein höchst interessantes Buch von Karl Popper über Parmenides [62], auch zwei sehr lesenswerte Artikel von Carl Friedrich von Weizsäcker, die sich allerdings nicht direkt auf Parmenides beziehen, sondern auf den Dialog *Parmenides* von Platon [79, 80].

Für Parmenides gibt es einen *Weg der Wahrheit*, auf den wir durch das Denken geführt werden. Der andere Weg, der *Weg der Meinungen*, wird als irrig bezeichnet. Parmenides' Argumentation in dem erhaltenen *Weg der Wahrheit* läßt sich wie folgt darstellen [62, S. 366]:

- Nur was ist, ist.
- Das Nichts kann nicht sein.
- Es gibt keinen leeren Raum.
- Die Welt ist voll.
- Da die Welt voll ist, gibt es keinen Raum für Bewegung.
- Bewegung und Wandel sind unmöglich.

Diese Sicht war für Parmenides' Zeitgenossen genauso ungewöhnlich und aller Erfahrung widersprechend, wie für uns heute. Dem verdanken wir wohl die Tatsache, daß uns Parmenides' Lehrgedicht in solcher außergewöhnlichen Vollständigkeit überliefert worden ist.

Ehe wir jetzt – im oben angedeuteten Sinne – Parmenides' Schlußkette schlicht für unsinnig erklären, sollten wir uns ein wenig mit der Wirkungsgeschichte der parmenideischen Idee beschäftigen.

Sein ist Denken Ausgangspunkt für Parmenides war die Aussage, daß nur das Denken über die Welt zur Wahrheit führen kann. Die Wahrnehmung unserer Sinne ist trügerisch, oder, wie es bei Parmenides heißt (nach [19, Bd. 1, S. 150]):

> Doch von diesem Wege der Forschung halte Du Deinen Gedanken fern und laß Dich nicht durch die vielerfahrene Gewohnheit auf diesen Weg zwingen, [nur] Deinen Blick den ziellosen, Dein Gehör das brausende, Deine Zunge walten zu lassen: nein, mit dem Verstande bringe die vielumstrittene Prüfung, die ich Dir riet, zur Entscheidung. Es bleibt Dir dann nur noch Mut zu Einem Wege . . .

Diese Vorstellung, daß es eine wahre Welt gibt, die dem Denken zugänglich ist, und die nicht mit der wahrnehmbaren Welt identisch ist, kann man als Vorwegnahme der Platonischen Ideenlehre ansehen. Jedenfalls läßt sich der Platonische Dialog *Parmenides* so interpretieren. Diese Vorstellung, daß unsere Sinne trügerisch seien und daß die „wahre“ Welt nicht die wahrgenommene Welt sei, taucht in der Philosophiegeschichte immer wieder auf, am konsequentesten und am wohlbegründesten bei dem englischen Philosophen George Berkeley (1685 – 1753), der den Materialismus verwarf und Sein als „wahrgenommen werden“ definierte – *esse est percipi.* Wir werden auf diesen interessanten Philosophen noch zurückkommen. Bertrand Russell beginnt sein Buch *Probleme der Philosophie* [71] mit einer kritischen Analyse der Erkenntnis, anhand eines Tisches zeigt er, wie vielschichtig die Wahrnehmung ist. Bei Parmenides heißt es „Denn [das Seiende] denken und sein ist dasselbe“, bei ihm ist also Sein gleich Denken.

Es gibt kein Nichts Die Lehre des Parmenides, daß dem Nichts kein Sein zukommen könne, hat einen erheblichen Einfluß auf die Wissenschaftsgeschichte gehabt. So hat Aristoteles (384 v. Chr. – 322 v. Chr.) die Vorstellung von der Nichtexistenz der Leere übernommen, weil er diese für seine Bewegungslehre benötigte, allerdings hat er nicht die radikalen Konsequenzen Parmenides' gezogen. Bis in die Neuzeit hat der *horror vacui* in der Naturwissenschaft eine bedeutende Rolle gespielt, wie dies Henning Genz in zwei Büchern über das Nichts dargelegt hat [26, 27]. Bemerkenswert ist, daß René Descartes (1596 – 1650) in einem Brief an Marin Mersenne (1588 – 1648) im Jahre 1647 die Existenz des Vakuums ganz entschieden ablehnte. Descartes hatte eine Revolution in der Mathematik hervorgerufen durch seine analytische Geometrie, also durch die Beschreibung geometrischer Sachverhalte durch Zahlenangaben („kartesische Koordinaten“). Für ihn war das Nichts deshalb vernunftwidrig, weil es keine zahlenmäßig faßbare Ausdehnung habe [57, S. 181]:

> §15. Leere ohne Substanz ist vernunftwidrig
>
> Ein *Leeres (vacuum)* im philosophischen Sinne, d. h. ein solches, in dem sich keine Substanz befindet, kann es offenbar nicht geben, weil die Ausdehnung des Raumes oder inneren Ortes von der Ausdehnung des Körpers nicht verschieden ist. Denn da man schon aus der Ausdehnung des Körpers nach Länge, Breite und Tiefe richtig folgert, daß er eine Substanz ist, weil es widersprechend ist, daß das Nichts eine Ausdehnung habe, so muß dasselbe auch von dem Raume gelten, der als leer angenommen wird, nämlich daß, da eine Ausdehnung in ihm ist, notwendig auch eine Substanz in ihm sein muß.

Erst durch die Untersuchungen von Otto von Guericke (1602 – 1686) (der übrigens seine letzten Lebensjahre in Hamburg verlebte), Evangelista Torricelli (1608–1647) und Blaise Pascal (1623–1662) hat man sich mit dem Gedanken der möglichen Existenz des Vakuums vertraut gemacht. Die genannten Wissenschaftler glaubten allerdings nicht, wie Genz schreibt, daß sie wirklich ein Vakuum hergestellt hätten – dazu besaßen sie zu viele Kenntnisse über die Rahmenbedingungen ihrer Experimente und zu viel Selbstkritik), sie bereiteten aber den Boden für das Nachdenken über die Leere [43].

Noch in seinem 1694 erschienenen *Physicalischen Zeit-Vertreiber* äußert sich W. Gottfried Voigt skeptisch über Guerickens Versuche im Abschnitt *So ist denn kein* vacuum *oder leerer Raum in der Natur?* [78, S. 128–135]:

> ...

> Sonderlich Otto Gericken / Bürgermeister zu Magdeburg / welcher ein neues Instrument erfunden / damit er das darthun will. Aber sie werden alle von der subtilen Lufft betrogen. Denn wenn sie dencken / sie haben die Lufft heraus gezogen / so ist sie wieder drinne: ...
>
> Zu dem beweiset dieses / wie auch das Magdeburgische Instrument / vielmehr das Gegentheil. Denn das sollen zwey halbe ausgehölte Kugeln seyn / welche so feste ohn einiges Materialisches Verbündniß aneinander hingen / daß sie auch vier Pferde nicht wieder könten von einander reissen / und dieses zwar darüm / weil die Lufft durch sonderliche Instrument daraus gezogen wäre. Aber dieses bekräfftiget mich eben in meiner Meinung / daß kein *Vacuum* in der Natur sey. [135] Denn es kann keine Wirckung seyn / wo nicht auch eine wirkende Ursache ist. Ein Ding zusammen halten / ist eine Wirckung; darum muß auch dabey eine wirckende Ursache seyn. Ist nun nichts in den fest-zusammen-gezogenen Kugeln / was hält sie denn aneinander? hängen sie aber aneinander / so muß ja etwas seyn / daß sie zusammen hält. Sprichstu / es ist das *Vacuum*. So antworte ich: *Vacuum* ist so viel / als nichts. Denn wo nichts ist / da soll ein *Vacuum* seyn. Kann aber nichts etwas wircken oder thun? Keines weges. *Non entis nullæ sunt operationes.* Darüm bleib ich dabey / daß kein *Vacuum* oder leerer Raum in der Natur sey.

Die moderne Physik lehrt uns, daß das Vakuum nicht wirklich „leer“ ist, sondern ein brodelndes Quantenchaos, angefüllt mit Vakuumfluktuationen und virtuellen Teilchen, und darüber berichtet Genz sehr kompetent [27].

Das Nichts hat auch Geistesgeschichte gemacht. Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770 – 1831) baut in seiner *Wissenschaft der Logik* [33] die Logik aus Sein und Nichts auf. Diese Konstruktion, die an Parmenides erinnert, hat auch heute noch überraschende Aspekte [38]. Das Nichts wurde ebenfalls in der Literatur thematisiert. Ich erwähne nur Stanisław Lems Buch *Die vollkommene Leere*, in dem Rezensionen *nicht* geschriebener Bücher zu finden sind [50]. Eine satirische Auseinandersetzung mit dem Nichts, welche auf gewisse moderne Strömungen de Philosophie anspielt, findet man in der Geschichte *De Alptraum des Metaphysikers* von Bertrand Russell [51, S. 13–19].

Es ist übrigens sehr reizvoll, diese „abendländische“ Sichtweise des Nichts mit der Laotses zu vergleichen. Er schreibt im Tao Te King [47, Nr. 11]

> Dreißig Speichen umgeben eine Nabe:
> In ihrem Nichts besteht des Wagens Werk.
> Man höhlet Ton und bildet ihn zu Töpfen:
> In ihrem Nichts besteht der Töpfe Werk.
> Man gräbt Türen und Fenster, damit die Kammer werde:
> In ihrem Nichts besteht der Kammer Werk.
>
> Darum: Was ist, dient zum Besitz.
> Was nicht ist, dient zum Werk.

Das parmenideische „Blockuniversum“ Der Ausdruck stammt vom Popper [62], gemeint ist, daß das parmenideische Sein unbeweglich, ewig und unveränderlich ist (nach [19, Bd. 1, S. 155]):

> So bleibt nur noch Kunde von Einem Wege, daß [das Seiende] existiert. Darauf stehn gar viele Merkzeichen; weil ungeboren, ist es auch unvergänglich, ganz, eingeboren,

> unerschütterlich und ohne Ende. Es war nie und wird nicht sein, weil es zusammen nur im Jetzt vorhanden ist als Ganzes, Einheitliches, Zusammenhängendes [Kontinuierliches]. Denn was für einen Ursprung willst Du für das Seiende ausfindig machen? Wie und woher sein Wachstum? [Weder aus dem Seienden kann es hervorgegangen sein; sonst gäbe es ja ein anderes Sein vorher], noch kann ich Dir gestatten [seinen Ursprung] aus dem Nichtseienden auszusprechen oder zu denken. Denn unaussprechbar und unausdenkbar ist es, wie es nicht vorhanden sein könnte. Welche Verpflichtung hätte es denn auch antreiben sollen, früher oder später mit dem Nichts zu beginnen und zu wachsen? So muß es also entweder auf alle Fälle oder überhaupt nicht vorhanden sein.

Diese Vorstellung eines unveränderlichen Seins hinter allen unseren veränderlichen und trügerischen Wahrnehmungen ist von zahlreichen Autoren verschieden interpretiert worden. So sieht der (in Elmshorn geborene) Mathematiker und Wissenschaftsphilosoph Hermann Weyl (1885 – 1955) die Minkowski-Einsteinsche vierdimensionale Raum-Zeit-Welt als ein parmenideisches unveränderliches Sein [83, S. 150]:

> Die objektive Welt *ist* schlechthin, sie *geschieht* nicht. Nur vor dem Blick des in der Weltlinie meines Lebens emporkriechenden Bewußtseins „lebt“ ein Ausschnitt der Welt „auf“ und zieht an mir vorüber als räumliches, in zeitlicher Wandlung begriffenes Bild.

Ähnlich äußert sich Popper [62, S. 256]:

> Aber ich glaube, daß die Idee des Parmenides ihre höchste Erfüllung in der Kontinuitätstheorie von Einstein erreichte. (Ich darf vielleicht erwähnen, daß ich diesen Punkt mit Einstein diskutiert habe und er zustimmte, als ich seine Theorie als parmenideisch charakterisierte.) Einsteins deterministische Kosmologie ist die eines vierdimensionalen parmenideischen Blockuniversums.

Der Physiker Julian B. Barbour bezeichnet die quantenmechanische Wellenfunktion des gesamten Universums als „parmenideischen Stillstand“ [4, S. 1052]:

> There is, for a start, the notorious measurement problem in quantum mechanics and the related problem of why, despite quantum superpostion, we observe what appears to be a definite and more or less classical world. In addition, one cannot but wonder why it is that quantum mechanics can make only statistical predictions about the outcome of definite experiments. Are events truly random at a fundamental level? Then there is the problem of reconciling quantum mechanics with Einstein's theory of gravitation. Quantization of that theory in the case of a spatially closed universe by the standard methods leads to a “wave function of the universe” that appears to be completely static. Nothing happens at all—there is a complete Parmenidean stasis, in flagrant contradiction of the evidence of our senses.

(vgl. dazu auch [80, S. 49 f. *Allheit der Objekte*]).

Am interessantesten scheint mir eine Interpretation von Popper, auf die er immer wieder zurückkommt [62, S. 197, 224, 249, 254]: Wenn wir verschiedene Vorgänge wahrnehmen, etwa ein Kind, das mit einem Ball spielt, einen Apfel oder ein Blatt, welche von einem Baume fallen oder auch ein abstürzendes Flugzeug, dann haben alle diese Vorgänge für die jeweils Beteiligten oder Betroffenen eine völlig unterschiedliche Bedeutung und Dramatik. Hinter allem steckt aber das Fallgesetz beziehungsweise das Newtonsche Gravitationsgesetz oder die Einsteinschen Gravitationsgleichungen, und wir gehen davon aus, daß diese Gesetze (mindestens) seit der Zeit des Urknalls unverändert gültig waren und daß sie ebenso gelten werden, wenn die letzte Sonne des Universums erkaltet ist und kein denkendes Wesen mehr vorhanden ist, welches sie wahrnehmen kann. Dieses wahrhaft parmenideische Sein unserer Naturgesetze, nach Popper die Möglichkeit, diese in Gleichungen zu fassen, scheint auch mir ein sehr beeindruckendes Bild des hinter der Vielfalt der Erscheinungen wirkenden parmenideischen unveränderlichen Einen zu sein.

Mit noch mehr Recht kann man die Resultate der Mathematik als ewig und unveränderlich ansehen. In jedem denkbaren Universum muß $2 \times 2 = 4$ sein, und es muß gelten, daß der Umfang eines Kreises das π-fache des Durchmessers ist (was in einem „realen“ Universum – nach Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie – im allgemeinen nicht gelten muß).

Die „unendliche Kugel“ Parmenides beschreibt das unveränderliche Sein vermittels eines beeindruckenden Bildes, welches durch die Jahrtausende immer wieder aufgegriffen wurde (nach [19, Bd. 1, S. 158]):

> Aber da eine letzte Grenze vorhanden, so ist [das Seiende] abgeschlossen nach allen Seiten hin, vergleichbar der Masse einer wohlgerundeten Kugel, von der Mitte nach allen Seiten hin gleich stark. Es darf ja nicht da und dort etwa größer oder schwächer sein. Denn da gibt es weder ein Nichts, das eine Vereinigung aufhöbe, noch kann ein Seiendes irgendwie hier mehr, dort weniger vorhanden sein als das Seiende, da es ganz unverletzlich ist. Denn [der Mittelpunkt,] wohin es von allen Seiten gleichweit ist, zielt gleichmäßig auf die Grenzen.

Dieses Kugeluniversum hat immer wieder Philosophen, Theologen und Dichter begeistert. Im zwölften Jahrhundert erschien ein *Buch der 24 Philosophen*, in dem verschiedene Definitionen Gottes gesammelt waren. Eine dieser Definitionen lautete: *Deus est sphaera cujus centrum ubique, circumferentia nusquam.* Diese Definition stellt ein besonders beeindruckendes Gleichnis dar, das immer wieder aufgegriffen wurde, etwa von Meister Eckhart (um 1260 – 1327 oder 1328), Nikolaus von Kues (1401 – 1464) oder von Blaise Pascal (1623 1662). Jorge Luis Borges schreibt in seinem Essay *Die Sphäre Pascals* [10].

> Vielleicht ist die Universalgeschichte die Geschichte von ein paar wenigen Metaphern. Ein Kapitel dieser Geschichte zu skizzieren ist die Absicht der folgenden Anmerkung.

Das Bild ist eindrucksvoll: Gott als „sehr große“ oder nach einigen Autoren sogar unendlich große Kugel umfaßt das gesamte Universum. Der Mittelpunkt dieser Kugel ist überall, in jedem einzelnen Menschen, in einem Schmetterling oder einer Blume. Giordano Bruno (1548 – 1600) dessen Buch *Von der Ursache, dem Prizip und dem Einen* [11] das parmenideische Sein als das *Eine* darstellt (vgl. etwa den Beginn des fünften Dialogs), benutzt die Metapher der unendlichen Kugel [11, S. 139]:

> ... so können wir mit Bestimmtheit behaupten, daß das Universum ganz Zentrum und das Zentrum des Universums überall ist, und daß die Peripherie, soweit sie vom Zentrum verschieden ist, nicht in irgendeinem Teile, sondern vielmehr überall ist.

François Rabelais (um 1494 – 1511) [66] läßt im siebenundvierzigsten Kapitel des fünften Buches von *Gagantua und Pantagruel* Bacbuc sagen

> Ziehet hin, Freunde, beschützt und beschirmt von dieser intellektualen Sphäre, deren Mittelpunkt überall und deren Umfang nirgendwo ist, die wir Gott nennen.

Dietrich Mahnke [52] geht der Geschichte dieses Bildes nach und Georges Poulet [63] hat dessen Spur in der Dichtung verfolgt.

3 Die Zenonischen Aporien

Zenon von Elea (490 v. Chr. – 430 v. Chr.) war Schüler von Parmenides und etwa 25 Jahre jünger als dieser. Er tritt bei Platon gemeinsam mit seinem Lehrer im Dialog *Parmenides* auf und argumentiert mit dem damals noch jungen Sokrates. Man kann durchaus den Eindruck gewinnen, daß Sokrates die „Sokratische Methode“ von Zenon gelernt habe. Zenon wird von den antiken Autoren mit höchstem Respekt zitiert, Platon läßt im *Phaidros* Sokrates über ihn sagen [60, Bd. 2, S. 456]

> Wissen wir nun nicht vom Eleatischen Palamedes, daß er kunstmäßig spricht, so daß den Hörenden dasselbe als gleich und ungleich, als eins und vieles, als bleibend ferner und als bewegt erscheint?

Nach Diogenes Laertios bezeichnete Aristoteles Zenon als den Erfinder der Dialektik (siehe etwa [61, S. 109] oder [21, S. 851 f.]).

Von Zenons Werken ist fast nichts erhalten, lediglich Zitate einzelner Textstellen bei späteren Autoren, bei Platon – etwa in dem erwähnten Dialog *Parmenides* – und ganz besonders in Aristoteles' (384 v. Chr. – 322 v. Chr.) *Physik*. Wir werden drei seiner Argumente, der sogenannten Aporien („Verlegenheiten“) oder auch Paradoxa, näher untersuchen. Es soll insgesamt etwa 40 solcher Aporien gegeben haben, von denen sich allerdings die meisten mit der Widerlegung der Existenz der Vielheit befassen. Wir sind hier an den sogenannten Bewegungspradoxa interessiert, von denen es vier gibt. Wir untersuchen davon drei – das vierte ist ein wenig komplizierter – und fügen eine moderne Variante hinzu.

3.1 Die Dichotomie

Das Wort Dichotomie bedeutet Zweiteilung. Der entsprechende Text in Aristotels' Physik ist äußerst knapp gehalten (Aristoteles, Physik VI 9.239 b 9), zitiert nach [14, S. 177]):

> Es gibt vier Beweisgänge des Zenon betreffs der Bewegung, die denen, die sie umstoßen wollen, die bekannten Schwierigkeiten bereiten: der erste dafür, daß eine Bewegung nicht stattfindet, ist das Argument, daß das Bewegte früher zu Hälfte des Weges gelangen muß als bis zu dessen Ende, worüber ich früher des näheren gesprochen habe <nämlich in der Physik II. 231 a 21 ff.>: Daher ist auch Zenons Beweis trügerisch, ...

Es handelt sich also darum, daß Zenon behauptet, ein Läufer könne eine gegebene Strecke nicht durchlaufen. Interessant ist, daß Aristoteles das Argument Zenons als „trügerisch“ abtut. Als Begründung verweist er auf seine eigene Bewegungslehre, auf die wir hier nicht eingehen wollen.

Wir betrachten drei unterschiedliche Interpretationen dieses Textes:

Dichotomie I Bevor der Läufer sein Ziel erreichen kann, muß er erst einmal die Hälfte der Strecke durchlaufen. Dies ist jedoch nur möglich, wenn er erst einmal ein Viertel der Strecke geschafft hat. Vorher allerdings müßte er das erste Achtel überwinden ... Durch diese drei Punkte kennzeichnen wir Mathematiker gern die Sprachfigur einer Ellipse, das heißt bei uns, wir deuten an, daß die Konstruktion unbegrenzt weitergeführt werden kann. Zenons Argument ist nun, daß kein Mensch eine unendliche Anzahl von Tätigkeiten ausführen kann, daß aber das Durchlaufen der Strecke gerade eben dieses fordert.

Dichotomie II Gesetzt der Fall, der Läufer hätte bereits die Hälfte der Strecke durchlaufen. Dann liegt vor ihm eine weitere Strecke, nämlich die zweite Hälfte. Um diese zu durchlaufen, müßte er wiederum die Hälfte der verbleibenden Strecke überwinden. Darauf verbleibt wieder eine zu durcheilende Strecke, nämlich das letzte Viertel der Gesamtstrecke .... Auch hier ergibt sich die gleiche Situation, der Läufer kommt erst an das Ende der Strecke, wenn er eine unendliche Anzahl von Reststrecken durchlaufen hat. Diese werden zwar immer kürzer, aber das ändert nichts daran, daß ihre Anzahl unendlich ist, und eine unendliche Anzahl von Strecken kann – so Zenon – niemand durchlaufen.

Dichotomie III Man kann die Situation auch so sehen: Eine Strecke kann in zwei Hälften zerlegt gedacht werden. Jede der Teilstrecken kann ebenso wieder halbiert werden, so daß man auf vier Viertel der Strecke kommt. Auch die Viertel kann man halbieren und erhält so acht Achtelstrecken ... Hier ist die Situation diffiziler. Wenn wir uns diesen Vorgang zu Ende ausgeführt denken, dann haben wir die Strecke in unendlich viele Teilstrecken zerlegt. Jede dieser Teilstrecken muß die Länge Null haben, sonst könnte man sie weiter zerlegen, entgegen der Annahme, daß man den Teilungsvorgang bis zum Ende ausgeführt habe. Übrigens: (zusammenhängende) Teilstrecken der Länge Null bezeichnet man auch als Punkte. Wir haben also auf aufwendige Art gezeigt, daß die Gesamtstrecke aus unendlich vielen ausdehnungslosen Punkten besteht. Hiergegen wenden sich die hier nicht genannten Vielheitsparadoxa Zenons: Eine Größe, die keine Ausdehnung hat und die mithin die Eigenschaft hat, daß man sie zu einer Strecke hinzufügen kann, ohne daß sich dadurch die Strecke (genauer: ihre Länge) ändert, ist Nichts im Sinne von Parmenides.

Wirklich interessant wird es, wenn wir nach der gelungenen Analyse, der Zerlegung der Strecke in Punkte, die Synthese versuchen. Wenn wir einen, zwei, drei ... ausdehnungslose Punkte zusammenfügen, dann erhalten wir immer nur ein Gebilde der Länge Null, denn bekanntlich ändert sich eine Größe – hier die Länge – nicht, wenn man eine Null hinzufügt. Es muß also noch „irgendwie“ ein „Qualitätssprung“ erfolgen, ehe man aus den erhaltenen Punkten wieder eine „ordentliche“ Strecke mit positiver Länge erhält.

3.2 Achilles und die Schildkröte

Dieses Paradoxon ist das bekannteste unter den Zenonischen Argumenten. Lassen wir zuerst wieder Aristoteles zu Wort kommen ([14, S. 178] Aristoteles, Physik VI 9.239 b 14):

> Der zweite Beweis ist der sogenannte ≫*Achilles*≪. Er gipfelt darin, daß das langsamste Wesen in seinem Lauf niemals von dem schnellsten <Achilles> eingeholt wird. Denn der Verfolger muß immer erst zu dem Punkt gelangen, von dem das fliehende Wesen <die Schildkröte> schon aufgebrochen ist, so daß das langsamere immer einen gewissen Vorsprung haben muß.

Das heißt also, daß Achilles, in der *Ilias* als der „der stürmische Läufer Achilles“ bezeichnet, eine langsame Schildkröte niemals einholen könne, wenn man dieser einen gewissen Vorsprung zubillige. Das Argument ist hier wie oben: Zuerst muß Achilles den Punkt erreichen, von dem aus die Schildkröte gestartet ist. In dieser Zeit hat sich aber die Schildkröte um eine gewisse – zugegebenermaßen kleine – Wegstrecke weiterbewegt. Achilles muß nun auch diese zusätzliche Wegstrecke überwinden, aber die Schildkröte bewegt sich in der dazu erforderlichen Zeit ebenfalls weiter .... Wir sehen also auch hier, daß Achilles eine unendliche Anzahl von Aufholvorgängen absolvieren müßte, wenn er die Schildkröte auch nur einholen wollte.

3.3 Der Pfeil

Diese ist wohl die hartnäckigste der Aporien von Zenon. Nach Aristoteles handelt es sich um die folgende Situation ([14, S. 178] Aristoteles, Physik VI 9.239 b 30):

> Der dritte <Beweis> ist der jetzt genannte, daß *der fliegende Pfeil ruht*. Er beruht aber auf der Annahme, daß die Zeit aus lauter einzelnen <getrennten> Momenten besteht. Denn wenn man diese Annahme nicht zugibt, verliert der Schluß des Zenon seine Bündigkeit.

Gegenstand dieses Gedankenexperiments ist also ein abgeschossener Pfeil. Betrachtet man einen beliebigen Zeitpunkt zwischen dem Moment des Abschusses und dem Moment des Auftreffens am Ziel, und bezeichnet man als *Zeitpunkt* eine Zeitspanne der Dauer Null, dann hat in diesem Moment der Pfeil keine Bewegung, das heißt, er *ruht*. Da dies in jedem Moment so ist, kann man mit vollem Recht sagen, daß sich der Pfeil in keinem Zeitpunkt zwischen Abschuß und Ziel bewege, daß er sich also niemals bewege! Das Argument von Aristoteles scheint nicht so recht einleuchtend. Warum soll die Zeit nicht aus einzelnen Momenten bestehen? Wir werden uns damit noch auseinanderzusetzen haben. Man assoziiert bei dieser Situation die moderne Filmkunst. Auf jedem einzelnen Bild einer Bildfolge, die einen abgeschossenen Pfeil zeigt, ruht der Pfeil. Man kann ihn vermessen, man könnte ihn untersuchen, aber das ändert nichts daran, daß er eben ruht. Diese Analogie wird durchaus seriös diskutiert [48].

3.4 Thomsons Lampe

Dieses Paradoxon ist eine moderne Variante der Zenonischen Idee. Es wurde 1954 von James Thomson publiziert [77]. Dieser Autor betrachtet eine Lampe, die folgendermaßen funktionieren soll: Nach Inbetriebnahme leuchtet sie zunächst für eine Minute. Danach schaltet sie sich für eine halbe Minute aus, dann für eine viertel Minute wieder ein, für eine achtel Minute aus, ... Man kann leicht sehen – wir werden uns davon noch überzeugen – daß die Lampe für jeden beliebigen Zeitpunkt, der weniger als zwei Minuten nach der Inbetriebnahme liegt, einen wohldefinierten Zustand hat, sie ist entweder an oder aus. Die Frage ist nun: Welchen Zustand hat sie genau zwei Minuten nach Inbetriebnahme (und danach)? Hiermit werden wir uns noch beschäftigen müssen.

Interessant bei den Zenonischen Paradoxa ist die Dialektik Zenons. Er ist völlig davon überzeugt, daß es Bewegung nicht geben kann. Das heißt, daß er etwa bei dem Paradoxon *Achilles* von einer in seinen Augen unmöglichen Tatsache ausgeht, nämlich daß sich Achilles und die Schildkröte eben doch bewegen. Man kann sich das so vorstellen, daß Zenon zunächst hypothetisch auf das Argument eines Gegners eingeht und dann zeigt, daß die hypothetische Voraussetzung zu unannehmbaren Konsequenzen führt, also verworfen werden muß. Diese Art von Argumentation bezeichnet man als *reductio ad absurdum.* Sie ist auch heute für uns die einzige Möglichkeit, Aussagen über das Unendliche zu finden, da naturgemäß auf diesem Gebiet konstruktive Methoden nicht anwendbar sind. In der Physik hat sich dieses Prinzip erhalten, nach Popper muß eine physikalische Theorie falsifizierbar sein, sie muß ein *experimentum crucis* zulassen. Es ist zur Zeit „modern", Popper für „widerlegt" zu halten. So schreibt ein Wissenschaftshistoriker in einem jüngst erschienenen Buch zu Popper über die „... Schwächen des Positivismus, ... welche die jüngere Wissenschaftsgeschichte schonungslos offenlegte" [68, S. 21]. Ich meine, daß jeder (moderne) Philosoph und Wissenschaftshistoriker nichts von Poppers Falifizierungskriterium hält, daß hingegen Physiker und „Naturwissenschaftler" sehr gut damit zurechtkommen!

Man kann ohne Übertreibung sagen, daß Zenon uns das Denken lehrte, den richtigen Gebrauch des Gehirns. Von daher ist die Hochachtung Platons und Aristoteles' zu verstehen, mit der sie von Zenon reden.

3.5 Wirkung der Zenonischen Paradoxa

Seit Zenon haben sich außerordentlich viele Philosophen, Physiker, Mathematiker und andere Interessierte mit seinen Paradoxa beschäftigt. Schon Aristoteles hatte, wie wir gesehen haben, die Zenonischen Argumente *widerlegt.* Es gibt wohl kein fataleres Wort in der Geistesgeschichte als eben dieses: *Widerlegung.*

Es gibt zahllose Publikationen zu diesem Thema, und immer wieder werden die Paradoxa „widerlegt" oder „erklärt", so hat in jüngster Zeit etwa William I. McLaughlin im Jahre 1995 eine neue „Lösung" angeboten [54]. Es gibt auch interessante Bücher zu diesem Themenkreis, ich nenne nur das Buch von Sainsbury [72], das etwas ältere und amüsant geschriebene Buch von Wolff [84] und das recht lesenswerte Buch von William Poundstone [64]. Auch die beiden erstgenannten Autoren geben der Versuchung nach, die Paradoxa „erklären" oder „widerlegen" zu wollen. Wolff schreibt im Jahre 1929 [84, S. 15]: „Tatsächlich sind wir heute in der Lage, den Fehler der Zenonschen Rechnung aufzudecken und jenen fatalen Widerspruch restlos auszumerzen." Man darf sagen, daß an Problemen, die über einen Zeitraum von zweieinhalbtausend Jahren so häufig „widerlegt" worden sind, doch etwas dran sein muß!

Ich möchte eine Blütenlese von Meinungen verschiedener Autoren über diese Paradoxa zusammenstellen. Dabei beginne ich mit den Autoren, die die Zenonische Argumentation ganz schlicht für falsch halten.

Der griechische Mathematiker Simplicius (ca. 490 – ca. 560), der besonders durch seine Aristoteles-Kommentare bekannt geworden ist, schreibt über das vierte Zenonische Paradoxon (welches ich hier nicht behandelt habe) [14, S. 180]:

> Diese Beweisführung ist unglaublich töricht, wie *Eudemos* sagt, weil sie den in ihr enthaltenen Trugschluß offenkundig zur Schau trägt.

Der Philosoph Carl von Prantl (1820 – 1888) schrieb in seiner vielzitierten *Geschichte der Logik im Abendlande*, welche zwischen 1855 und 1870 erschien [65, S. 95]:

> Dass Aristoteles auf jene Kehrseite der $\delta\iota\alpha\lambda\grave{\varepsilon}\gamma\varepsilon\sigma\vartheta\alpha\iota$, welche dem Apodeiktischen gegenüberliegt, so vielfach eingieng, haben wir sicher nur dem zuzuschreiben, dass er Schüler Plato's ist, wenn auch gleichzeitige Bestrebungen der Antistheneer und Megariker den alten Particularismus der Sophisten erneuten. Und in dieser Beziehung daher zeigt sich Aristoteles als Kind seiner Zeit und seiner Nation, denn dass wesentlich und an sich nothwendig die Theorie der Logik nur aus ihrem Widerspiele sich hervorarbeiten könne, wird wohl Niemand behaupten; auch fällt ja z. B. das $\pi\varepsilon\iota\rho\alpha\sigma\tau\iota\kappa\grave{o}\nu$ des $\delta\iota\alpha\lambda\grave{\varepsilon}\gamma\varepsilon\sigma\vartheta\alpha\iota$ an sich dem Gebiete der Pädagogik zu, oder z. B. die blosse Wahrscheinlichkeit ist, so lange sie nicht dem Calcul unterworfen ist, logisch werthlos, ist sie aber jenes, so tritt sie wieder als Thatsache des Wissens auf, oder hinwiederum Lappalien, wie die Mehrzahl der Fangschlüsse sind, wird die wahre Logik gar nicht berücksichtigen.

Es ist eine Ironie der Geschichte, daß gerade diese „Lappalien“ nur wenige Jahrzehnte später die Mathematik und auch die Logik in ihren Grundfesten erschüttern sollten. Auch hierauf werden wir noch zurückkommen.

Der englische Philosoph Thomas Hobbes (1588 – 1679) schrieb [36, S. 54–55]:

> Aber die Trugschlüsse der Sophisten und Skeptiker, durch die sie in alten Zeiten Wahrheiten lächerlich zu machen und zu bekämpfen pflegten, waren größtenteils nicht der Form, sondern der Materie des Syllogismus nach fehlerhaft; und jene Sophisten selbst wurden dadurch noch öfter getäuscht, als daß sie andre damit täuschten. So stützte sich etwa jener berühmte Beweis des Zenon gegen die Bewegung auf folgende Behauptung: Alles, was in unendlich viele Teile geteilt werden kann, das ist unendlich. Wenn Zeno ohne Zweifel dies selbst für richtig hielt, ist es doch falsch. Denn etwas in unendlich viele Teile teilen, heißt nur es in so viele Teile teilen, als man will. Es ist aber nicht notwendig, daß von einer Linie, wenn ich sie auch beliebig teile und wieder teile, gesagt wird, sie besitze eine unendliche Zahl von Teilen oder sei unendlich; denn so viele Teile ich auch bilde, ihre Zahl wird stets begrenzt sein. Aber weil der, welcher einfach »Teile« sagt, ohne hinzuzufügen, wie viele, und ihre Zahl nicht begrenzt, sondern deren Bestimmung dem Hörer überläßt, pflegt man gewöhnlich zu sagen, eine Linie kann bis ins Unendliche geteilt werden, was aber in keinem anderen Sinn richtig sein kann.

Der amerikanische Mathematiker und Philosoph Charles Sanders Peirce (1839–1914) schrieb über die Achilles-Paradoxie (zitiert nach [72, S. 13]):

> Diese alberne kleine Täuschung macht einem in Mathematik und Logik angemessen gebildeten Kopf keinerlei Schwierigkeiten, aber sie ist eine von denen, die sehr geeignet sind, Leute einer bestimmten Sorte zu halsstarriger Entschlossenheit anzustacheln, an eine bestimmte Aussage zu glauben.

Der bedeutende Mathematiker Ernst Eduard Kummer (1810 – 1893) sagt in seiner ansonsten sehr lesenswerten Gedenkrede aus dem Jahre 1867 über Leibniz [56, S. 10]:

> Wenn Zeno aber alsdann stillschweigend als ausgemacht voraussetzt, daß eine solche unendliche Anzahl einzelner Raumstrecken sich nicht in endlicher Zeit durchlaufen lasse, so macht er eine falsche Prämisse.

Der bedeutende sowjetische Logiker Alexander Alexandrowitsch Sinowjew (1922 – 2006), dessen Bücher auch bei uns weite Verbreitung fanden, schreibt in *Logik und Sprache der Physik* [74, Viertes Kapitel, §24]

> Es besteht die Auffassung, daß die Zenonschen Paradoxien bisher nicht gelöst worden sind. Und das ist tatsächlich so. Wenn verschiedene Autoren die „Zenonschen Paradoxien" auflösen, so lösen sie unter dieser Bezeichnung irgendwelche damit zusammenhängenden Probleme auf, aber nicht die wirklichen Paradoxien, die entweder trivial sind oder überhaupt nicht existieren.

Um Schluß noch ein weniger ernstgemeintes Zitat: Der Mathematiker Hubert Cremer [16, S. 33–35] schreibt in seinem Scherzgedicht *Achilles und die Schildkröte*:

> Die Mathematische Wissenschaft
> war ihm noch ziemlich schleierhaft;
> ...
> (Oh Zenon, Zenon, alter Wicht,
> kennst du den Kowalewski nicht?)

(Der Mathematiker Gerhard Kowalewski hatte eine Anzahl von sehr beliebten Lehrbüchern der Analysis publiziert).

Zu der herablassenden Kritik an Zeno gehört auch, daß in zahlreichen philosophischen und philologischen Publikationen die Beweise Zenos herabgesetzt werden, wie wir dies auch bei Aristoteles gesehen haben. So versäumt es Capelle in seinem ansonsten sehr sorgfältig editierten Werk über die Vorsokratiker selten, Das Wort „Beweis" im Zusammenhang mit Zenon in Anführungszeichen zu setzen beziehungsweise, den Argumenten Zenons in Klammern das Wort „Trugschluß!" folgen zu lassen [14, etwa S. 175].

Nun zu den positiven Stimmen: Ich beginne mit Jorge Luis Borges (1899 – 1986), der sich immer wieder mit Achilles und der Schildkröte auseinandergesetzt hat. In dem Essay *Der ewige Wettlauf zwischen Achilles und der Schildkröte* [9] schreibt er:

> Die Bedeutungen, die wir in das Wort »Kleinod« hineinlegen – kleine Kostbarkeit, Feinheit, die keinen Schaden nimmt, leichteste Übermittlung, Klarheit bei gleichzeitiger Undurchdringlichkeit, immerwährende Blume – geben uns ein Recht, es hier zu verwenden. Ich wüßte nicht, wie ich dem Paradox von Achilles besser gerecht werden sollte, das von den einschneidenden Widerlegungen, die es seit mehr als dreiundzwanzig Jahrhunderten in Abrede stellen, so unberührt geblieben ist, daß wir es getrost als unsterblich begrüßen dürfen. Daß man das Mysterium immer wieder aufgesucht hat, was sich in seiner Fortdauer bekundet, daß es die Menschen immer wieder veranlaßt hat, bei ihrer subtilen Unwissenheit Einkehr zu halten, können wir ihm nur mit Dank vergelten. Erleben wir es denn ein weiteres Mal, sei es auch nur, um von Denkrätseln und Denkgeheimnis einen Hauch zu verspüren. Ich will ein paar wenige Seiten – ein paar abgezählte Minuten – seiner Darstellung und der seiner berühmtesten Richtigstellungen widmen. Bekanntlich war sein Erfinder Zenon von Elea, Schüler des Parmenides; und zwar leugnete er, daß in der Welt irgend etwas vor sich gehen könne.

Borges verdanke ich auch den Hinweis auf die Verwandtschaft der Zenonischen Aporien zu Situationen in Kafkas Werken. In dem Essay *Kafka und seine Vorläufer* [10] weist er darauf hin, daß etwa in dem Roman *Das Schloß* der Landvermesser K. eine durchaus Zenonische Situation durchlebt. Trotz vielfältiger Bemühungen, zu dem Schloß zu gelangen, bleibt er buchstäblich auf der Stelle stehen. Borges schreibt in dem Essay: „Der Formcharakter des berühmten Problems ist derselbe wie in dem Roman *Das Schloß*, und der Bewegungsgegenstand, der Pfeil, und Achilles sind die ersten Kafkafiguren der Literatur.“ Ich darf vielleicht hinzufügen, daß die gleiche Situtation von Kafka in seinen beiden Geschichten *Eine kaiserliche Botschaft* und *Vor dem Gesetz* behandelt wird, nämlich daß trotz aller Anstrengungen eine Bewegung nicht stattfindet. Auch andere Dichter haben sich dieses Bildes bedient, so etwa E. T. A. Hoffmann in seinem Märchen *Die Königsbraut*, wo im fünften Kapitel vom Höhepunkt der komisch-magischen Verwicklung berichtet wird:

> Schnell mußte Fräuein Ännchen mit dem Küchenbesen die gehackten Eier, die Muskatblüten, die geriebene Semmel abkehren, dann ergriff er einen kupfernen Kochtopf, stülpte ihn wie einen Helm auf den Kopf, nahm eine Schmorpfanne in die linke, in die rechte Hand aber einen großen eisernen Küchenlöffel und sprang, so gewaffnet und gewappnet, hinaus ins Freie. Fräulein Ännchen gewahrte, wie Herr Dapsul von Zabelthau im gestrecktesten Lauf nach Corduanspitzens Gezelt rannte und doch nicht von der Stelle kam. Darüber vergingen ihr die Sinne.

Aber zurück von der Literatur zu Philosophie und Mathematik! Der prominenteste und einer der kompetentesten Gelehrten auf dem Gebiete der Philosophie und Mathematik dürfte wohl Bertrand Arthur William Russell (1872 – 1970) sein. Dieser schrieb in seinem Buch *The Principles of Mathematics* [70, p. 347]:

> In this capricious world, nothing is more capricious than posthumous fame. One of the most notable victims of posteriority's lack of judgement is the Eleatic Zeno. Having invented four arguments, all immesurably subtle and profound, the grossness of subsequent philosophers pronounced him to be a mere ingenious juggler, and his arguments to be one and all sophisms. After two thousand years of contiual refutation, these sophisms were reinstated, and made the foundation of a mathematical renaissance, by a German professor, who probably never dreamed of any connection between himself and Zeno. Weierstrass, by strictly banishing all infinitesimals, has at last shown that we live in an unchanging world, and that the arrow, at every moment of flight, is truly at rest. The only point where Zeno probably erred was in inferring (if he did infer) that, because there is no change, therefore the world must be in the same state at one time as at another.

In dem 1968 erschienenen zweibändigen Werk *Grundlagen der Mathematik* (erste Auflage 1934) äußerten sich David Hilbert (1862 – 1943) und Isaak Paul Bernays (1888 – 1977) [35, S. 16]:

> Ein typisches Beispiel hierfür bildet diejenige Unendlichkeit, welche zu der bekannten Paradoxie des ZENO Anlaß gegeben hat. Wird eine Strecke in endlicher Zeit durchlaufen, so sind in dieser Durchlaufung nacheinander unendlich viele Teilvorgänge enthalten: die Durchlaufung der ersten Hälfte, dann die des folgenden Viertels, des folgenden Achtels usw. Haben wir es mit einer wirklichen Bewegung zu tun, so müssen diese Teildurchlaufungen lauter reale Prozesse sein, welche nach einander erfolgen.
>
> Man pflegt diese Paradoxie mit dem Argument abzuweisen, daß die Summe von unendlich vielen Zeitintervallen doch konvergieren, also eine endliche Zeitdauer ergeben kann. Dadurch wird aber ein wesentlicher Punkt der Paradoxie nicht begriffen,

> nämlich das Paradoxe, was darin liegt, daß eine unendliche Aufeinanderfolge, deren Vollendung wir in der Vorstellung nicht nur faktisch, sondern auch grundsätzlich nicht vollziehen können, in der Wirklichkeit abgeschlossen vorliegen soll.
>
> Tatsächlich gibt es auch eine viel radikalere Lösung der Paradoxie. Diese besteht in der Erwägung, daß wir keineswegs genötigt sind, zu glauben, daß die mathematische raum-zeitliche Darstellung der Bewegung für beliebig kleine Raum- und Zeitgrößen noch physikalisch sinnvoll ist, vielmehr allen Grund haben zu der Annahme, daß jenes mathematische Modell die Tatsachen eines gewissen Erfahrungsbereiches, eben die Bewegungen innerhalb der unserer Beobachtung bisher zugänglichen Größenordnungen, im Sinne einer einfachen Begriffsbildung extrapoliert, ähnlich wie die Mechanik der Kontinua eine Extrapolation vollzieht, indem sie die Vorstellung einer kontinuierlichen Erfüllung des Raumes mit Materie zugrunde legt: so wenig wie eine Wassermenge bei unbegrenzter räumlicher Teilung immer wieder Wassermengen ergibt, ebensowenig wird es bei einer Bewegung der Fall sein, daß durch ihre Teilung ins Unbegrenzte immer wieder etwas entsteht, das sich als Bewegung charakterisieren läßt. Geben wir dieses zu, so schwindet die Paradoxie.
>
> Das mathematische Modell der Bewegung hat ungeachtet dessen als *idealisierende Begriffsbildung* zum Zweck der vereinfachten Darstellung seinen bleibenden Wert. Für diesen Zweck muß es außer der approximativen Übereinstimmung mit der Wirklichkeit noch die Bedingung erfüllen, daß die in ihm vollzogene Extrapolation auch in sich widerspruchsfrei ist. Unter diesem Gesichtspunkt wird unsere mathematische Vorstellung von der Bewegung durch die ZENOsche Paradoxie nicht im geringsten erschüttert; das genannte mathematische Gegenargument hat hierfür seine volle Geltung. Eine andere Frage aber ist, ob wir einen wirklichen Nachweis für die Widerspruchsfreiheit der mathematischen Theorie der Bewegung besitzen. Diese Theorie beruht wesentlich auf der mathematischen Theorie des Kontinuums, diese wiederum stützt sich wesentlich auf die Vorstellung der Menge der ganzen Zahlen als einer fertigen Gesamtheit. Wir kommen also auf Umwegen zu dem Problem zurück, das wir durch den Hinweis auf die Tatsachen der Bewegung zu umgehen versuchten.

Zum Schluß noch ein Zitat des bedeutenden Mathematikhistorikers Moritz Benedikt Cantor (1829 – 1920). Er äußerte sich zu Zenons Paradoxon von den bewegten Körpergruppen (die hier nicht mit aufgenommen wurde) wie folgt [13, S. 200]:

> Wir haben dem Zenon weiter oben die Eigenschaft als Mathematiker abgesprochen. Gerade dieser letzte Trugschluß rechtfertigt uns, denn hier sind irrigerweise absolute und relative Bewegungsgrößen einander gleichgesetzt, was einem Mathematiker kaum begegenet wäre.
>
> ...
>
> Zwei Jahrtausende und mehr haben an dieser zähen Speise gekaut, und es wäre unbillig von den Griechen des fünften vorchristlichen Jahrhunderts zu verlangen, daß sie in Klarheit gewesen seien über Dinge, welche, freilich anders ausgesprochen, noch Streitfragen unserer Gegenwart bilden

Die erste Bemerkung zeugt ein wenig von der eingangs kritisierten Überheblichkeit des Modernen, die gerade einem Historiker fremd sein sollte. Da der Begriff der Geschwindigkeit bis zum Beginn der Neuzeit nicht recht klar war, ist es eher erstaunlich, daß Zenon ein sehr klares Bild vom Begriff der Relativgeschwindigkeit haben sollte. Diehls sieht gerade in diesem Paradoxon eine

Vorform der Einsteinschen Relativitätstheorie [61, S. 114]. Diese letztere Ansicht ist allerdings – in anderer Richtung – ebenso übertrieben wie die zitierte Aussage von Cantor.

4 Auseinandersetzung mit den Paradoxa

Ich möchte die Diskussion über die Aporien des Zenon ein wenig strukturieren, indem ich die Einwände in drei Gruppen teile. Vorher eine grundsätzliche Anmerkung: Wir kennen spätestens seit Einstein den Begriff des *Gedankenexperiments*. Die Aporien Zenons sind gerade solche Gedankenexperimente, und man muß bei ihrer Untersuchung streng auf die Voraussetzungen achten, die implizit gemacht werden. Die wichtigste dieser Voraussetzungen ist, daß Zenon die Parmenideische Ontologie zugrundelegt, die streng zwischen der wahren Welt des Denkens und der Welt der trügerischen Sinne, der Wahrnehmung, unterscheidet. Ein Hinweis auf ein wahrgenommenes sich Bewegendes ist also nicht zulässig. Die etwa von Sainsbury angebotenen „Lösungen" der Paradoxa leiden durchweg daran, daß Sainsbury die impliziten Voraussetzungen ignoriert.

Am Rande sei hier angemerkt, daß Friedrich Engels in seinem *Anti-Dühring* das Pfeil-Paradoxon dazu benutzt, die Notwendigkeit einer „dialektischen" Grundlegegung der Physik zu demonstrieren [22, S. 146 f.]:

> Die Bewegung selbst ist ein Widerspruch; sogar schon die einfache mechanische Ortsbewegung kann sich nur dadurch vollziehn, daß ein Körper in einem und demselben Zeitmoment an einem Ort und gleichzeitig an einem andern Ort, an einem und demselben Ort und nicht an ihm ist. Und die fortwährende Setzung und gleichzeitige Lösung dieses Widerspruchs ist eben die Bewegung.

Noch im Jahre 1959 wurde in den *Grundlagen der marxistischen Philosophie* dieses Argument wieder aufgegriffen [31, S. 276]. Vor diesem Hintergrund gewinnt die Darstellung in dem zitierten Buche von Sinowjew eine besondere Brisanz [74, S. 171]:

> Im folgenden betrachten wir das bekannte Paradoxon der Bewegung „Ein sich bewegender Körper befindet sich und befindet sich gleichzeitig nicht an einem gegebenen Ort des Raumes".
>
> ...
>
> Die Ursache hierfür liegt darin, daß wir die Zeichen „und" und „nicht" verwenden, und daß die Aussage „Ein physischer Körper befindet sich zu einer gegebenen Zeit an einem gegebenen Raum" ein Spezialfall einer Aussage ist. Keinerlei andere Weisheit ist hier enthalten.

Meiner Tochter verdanke ich eine hübsche „biologische" Widerlegung des Achilles-Paradoxons. Sie besitzt eine Schildkröte und ist daher mit der Materie aus eigener Anschauung vertraut. Natürlich wird die Schildkröte Achilles überholen. Bekanntlich erreichen nämlich Schildkröten ein sehr hohes Alter, das heißt Achilles würde irgenwann an Entkräftung oder Altersschwäche sterben, während sich die Schildkröte dann noch in der Blüte ihrer Jugend befindet und erst richtig losläuft.

Eine ähnliche „Widerlegung" findet man bei Äsop (um 550 v. Chr.) [3, Nr. 226]. Hier lassen sich Hase und Schildkröte auf einen Wettlauf ein. Als der Hase sieht, wie gemächlich die Schildkröte startet, wird er schläfrig und macht noch schnell ein Nickerchen. Als er die Augen öffnet, läuft die Schildkröte gerade durchs Ziel.

4.1 Der Pragmatiker

Der Pragmatiker – ich denke etwa an einen Ingenieur – würde leugnen, daß hier überhaupt Paradoxa vorliegen. Schließlich nehmen wir immer wieder Dinge wahr, die sich bewegen, und wenn wir Parmenides' Ontologie ablehnen, dann kann es eben doch Bewegung geben. Eine klassische Anekdote schildert diesen Standpunkt sehr schön. Ich zitiere aus den *Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie* von Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770 – 1831) [32, Bd. 18, S. 306]

> Es ist bekannt, wie Diogenes von Sinope, der Kyniker, solche Beweise vom Widerspruch der Bewegung ganz einfach widerlegte; stillschweigend stand er auf und ging hin und her, – er widerlegte sie durch die Tat.

Man könnte ein Buch schreiben über diese Anekdote und ihre Kommentierung von verschiedenen Autoren. Nur einige Zitate dazu:

Pierre Bayle (1647 – 1706) schreibt über diesen Vorgang [5, S. 310]:

> Ich bin gewiß, man wird mir zulassen, daß ich es mache wie Diogenes, der, ohne die Spitzfindigkeiten des Zeno stückweise zu beantworten, in seiner Gegenwart nur auf- und niederging, denn nichts ist geschickter, einen rechtschaffenen Mann zu überführen, daß er im Schließen falsche Sätze annimmt, als wenn man ihm zeigt, daß er gegen die Erfahrung streitet.

Bayle begeht also auch eine Verletzung der „Spielregeln", er verläßt das Parmenideische Universum des Denkens durch Verweis auf die unmittelbare Wahrnehmung.

Ähnlich Jean-Jacques Rousseau (1712 – 1778) [69, Zweiter Band, Viertes Buch, S. 251]:

> Lag in der Handlungsweise des Thrasybulus und Tarquinius, als sie Mohnköpfe abschlugen, des Alexander, als er seinem Liebling sein Siegel auf den Mund drückte, des Diogenes, als er vor dem Zeno herging, nicht mehr ausgesprochen, als wenn sie lange Reden gehalten hätten? Wie wäre man wohl bei aller Weitschweifigkeit imstande gewesen, dieselben Ideen mit Worten ebensogut auszudrücken?

Um eine moderne Kostprobe zu geben zitiere ich aus dme Buch von Luciano De Crescenzo, und ich muß sagen, daß mir dieser Autor nicht so recht gefallen will [18, S. 125 f.]. Er schreibt:

> Ich hoffe, daß ich mich verständlich ausgedrückt habe. Wenn nicht, ist es keine Katastrophe, man kann sehr gut auch ohne Zenons Paradoxa leben.
>
> Der Zyniker Antisthenes zum Beispiel konnte die Eleaten und ihre ewigen Beweisführungen gegen die Bewegung nicht ausstehen. Es heißt, er sei eines Tages, als es ihm nicht gelang, Zenon und sein Pfeil-Paradoxon zu widerlegen, dauernd im Raum auf und ab gegangen, bis Zenon schließlich ausrief:
>
> ≫Kannst du nicht einen Augenblick stillstehn?≪
>
> ≫Also gibst du zu, daß ich mich bewege?≪ erwiderte da Antisthenes.

De Crescenzo läßt also hier Zeno selbst auftreten. Es ist aber kaum zu glauben, daß Zeno, „der eleatische Palamedes", der von Aristoteles als der „Erfinder der Dialektik" bezeichnet wird, in eine solch plump aufgestellte Falle getappt wäre.

Um nun auf Hegel zurückzukommen, er erzählt auch die Fortsetzung der Geschichte:

> Aber die Anekdote wird auch so fortgesetzt, daß, als ein Schüler mit dieser Widerlegung zufrieden war, Diogenes ihn prügelte, aus dem Grunde, daß, da der Lehrer mit Gründen gestritten, er ihm auch nur eine Widerlegung mit Gründen gelten lassen dürfe. Ebenso hat man sich nicht mit der sinnlichen Gewißheit zu begnügen, sondern zu begreifen.

Dem möchte ich nichts hinzufügen!

4.2 Der Physiker

Ein Physiker könnte etwa sagen, daß Achilles sich der Schildkröte nach Durchmessung hinreichend vieler Teilstrecken bis auf Bruchteile von Bruchteilen eines Atomdurchmessers genähert habe, und spätestens dann sei nach der Heisenbergschen Unschärferelation die Frage, ob er sie eingeholt habe, ohnehin keine korrekt gestellte physikalische Frage mehr.

Eine physikalische Widerlegung, die bis in die Antike zurückreicht, und die letztlich auch von Aristoteles angewandt wurde, ist die Leugnung der unbegrenzten Teilbarkeit von Raum und Zeit. Nach neueren Erkenntnissen der Physik, der Stringtheorie, hat es keinen Sinn, über Zeitintervalle zu sprechen, die kleiner sind als die kleinstmögliche Zeiteinheit, die *Planck-Zeit* von 10^{-43} s und ebenso gibt es eine kleinste physikalisch sinnvolle Länge, die *Planck-Länge* von 10^{-33} cm. Man bezeichnet diese Ansicht als die *finite-nature-theory*. Sie besagt, daß unsere Welt im Kleinen endlich ist [24, 75, 86]. Würde man diese Widerlegung akzeptieren, dann müßte man auch zugeben, daß der eigentliche Erfinder der *finite-nature-theory* Zenon war, denn er hat gezeigt, daß die Annahme der unendlichen Teilbarkeit zu Widersprüchen mit der Wahrnehmung führt.

Zenon selbst hätte wohl so argumentiert, daß die Möglichkeit der unendlichen Unterteilung von Strecken in der Mathematik sehr wohl akzeptiert werde und daß sogar in der Physik Konstrukte eingeführt worden wären, die genau darauf hinauslaufen. Ich spreche hier von der Einführung der Infinitesimalrechnung in der Physik. Davon wird noch die Rede sein.

Gegen die Thomson-Lampe hätte ein Physiker eine ganze Liste von Einwänden. Keine normale Glühbirne überlebt nur eine gewisse Anzahl von Ein-Ausschaltvorgängen, der Strom fließt nicht unendlich schnell, das heißt, die Birne brennt nicht unmittelbar nach dem Einschalten und schließlich: Wenn die Ein-Ausschaltvorgänge immer schneller aufeinander folgen, dann muß sich das Schaltelement immer schneller bewegen, diese Geschwindigkeit würde schließlich die Lichtgeschwindigkeit überschreiten müssen, und da sei Einstein vor [72, S. 26].

Poundstone beschreibt eine modifizierte Thomson-Lampe [64, S. 221 f.]. Bei dieser ist der Ein-Aus-Schalter als ein Druckschalter so konstruiert, daß sich der Schaltweg nach jedem Schaltvorgang viertelt. Damit bleibt die Geschwindigkeit, mit der sich der Schalter bewegt, konstant, und wir haben keine Probleme mehr mit der Lichtgeschwindigkeit. Ein Physiker würde einwenden, daß die Beschleunigung bei diesem Schalter über alle Grenzen wachsen müßte, aber wir wollen nicht so kleinlich sein. Interessant ist, daß bei dieser modfizierten Lampe ganz klar ist, in welchem Zustand sie am Ende der zweiten Minute ist. Der Schaltweg wäre auf Null geschrumpft, die Lampe also eingeschaltet. Man hat den Eindruck, daß die Thomson-Lampe ein lebendes Wesen sei, das auf Modfikationen reagiert.

Was die Paradoxa *Dichotomie III* und *Pfeil* anbelangt, so käme hier der Physiker allerdings in Erklärungsnot. Auf beides werden wir noch zurückkommen. Angemerkt sei hier nur, daß die *finite-nature-theory* beim Pfeil alles noch schlimmer macht. Hier hätte man wirklich die Situation eines

Kinofilms, die „Realität“ bestände aus diskreten Bildern, und aus jedem einzelnen Bild könnte man auf keine Weise Bewegung herleiten.

Sainsbury schreibt über den *Pfeil* [72, S. 37]

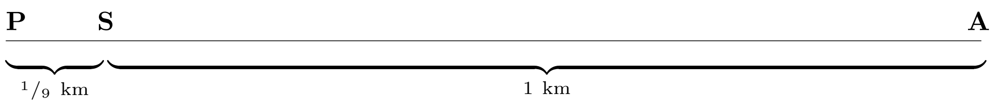
> Die Frage, ob sich etwas in einem Moment bewegt oder ruht, bezieht auch andere Momente mit ein. Ein Gegenstand ruht in einem Augenblick genau unter der Bedingung, daß er sich in allen naheliegenden Augenblicken am selben Ort befindet; er bewegt sich in einem Augenblick genau unter der Bedingung, daß er sich in naheliegenden Augenblicken an verschiedenen Orten befindet. Keine Information über den Pfeil oder den einzelnen Moment kann feststellen, ob der Pfeil sich bewegt oder ruht.

Dies klingt plausibel, und wir werden noch sehen, wie Sainsbury dies gemeint haben könnte. Allerdings: Die moderne Physik stützt sich seit Galilei und Descartes auf das *Objektivitätspostulat* im Sinne von Monod [58, S. 36–37], welches hier aussagt, daß die Bewegung des Pfeils ausschließlich von dem Momentanen Zustand, das heißt, seinem Ort und seiner Geschwindigkeit, in einem gegebenen Zeitpunkt abhängt. Die „Vorgeschichte“ der Bewegung und ebenso zukünftige Zustände – gar „Endursachen“ im Sinne von Aristoteles – dürfen keine Rolle spielen. Auch hierüber wird noch zu sprechen sein.

4.3 Der Mathematiker

Man liest immer wieder „Widerlegungen“ von Zenon, die sich auf die Mathematik stützen. Wir beginnen mit einem „Gegenbeispiel“. In dem Buch von Capelle wird eine Auflösung des *Achilles* von Gomperz zitiert [14, S. 178]:

> . . . vgl. die ausgezeichnete Erläuterung und Auflösung dieses Trugschlusses bei Theodor Gomperz, *Griechische Denker I*, dritte Auflage, Leipzig 1911, S. 159: Gesetzt, Achilles läuft zehnmal so schnell wie die Schildkröte. Denken wir uns nun die Schildkröte im Punkte »S«, dagegen Achilles von ihr 1 km entfernt, im Punkte »A«. Wenn sich nun beide, Achill und die Schildkröte. *gleichzeitig* in Bewegung setzen, so wird, während die Schildkröte $^1/_9$ km zurücklegt, Achilles die 10 fache Strecke, d. h. $^{10}/_9 = 1^1/_9$ km zurücklegen, d. h. er wird die Schildkröte gerade in dem Moment einholen, wo diese $^1/_9$ km zurückgelegt hat (d. h. im Punkte »P«).



Was Gomperz hier getan hat, ist leicht einzusehen, er hat eine einfache Dreisatzaufgabe gelöst. Der Weg, den Achilles in der Zeit t zurücklegt, ist $s_A = v \cdot t$, wobei v die Geschwindigkeit von Achilles ist. Die Schildkröte legt in der gleichen Zeit einen Weg $s_S = 1 + \frac{v}{10} \cdot t$ zurück. Fragt man jetzt nach dem Treffpunkt, muß man $s_A = s_S$ setzen und erhält für das Produkt $v \cdot t$ den Wert $\frac{10}{9}$. Damit erhält man den Treffpunkt an der Stelle $s = \frac{10}{9}$. So oder ähnlich hat wohl Gomperz gerechnet, es sieht so aus, als ob er den Treffpunkt einfach geraten hat und dann dessen Richtigkeit verifiziert hat. Ist diese einfache Rechnung wirklich eine schlüssige Auflösung des Paradoxons?

Wir müssen jetzt einen kleinen Ausflug in die Logik unternehmen. Aristoteles hat Zenon als den „Erfinder der Dialektik“ gelobt. Der Begriff „Dialektik“ ist heutzutage recht vieldeutig und schillernd geworden. Aristoteles meint mit seinem Lob die Schlußweise des Zenon, der in einem Disput mit einem Gegner zunächst einmal hypothetisch annimmt, der Gegner habe recht. Dann zieht er aus der Meinung des Gegners logische Konsequenzen, die auch der Gegner nicht akzeptieren kann. Man nennt dies auch die *reductio ad absurdum*. Diese Beweisfigur ist uns Mathematikern wohlvertraut, sie bildet die einzige Möglichkeit, Aussagen über das Unendliche zu beweisen, da der positive Beweis durch Konstruktion (oder „Geständnis") hier nicht möglich ist. Übrigens hat Sokrates – wenn man dem Dialog *Parmenides* Glauben schenkt, von Zenon diese Argumentationsform übernommen.

Gomperz begeht in seiner Argumentation einen elementaren logischen Schnitzer, der unter der Bezeichnung *petitio principi* bekannt ist. Um zu zeigen, daß Zenon nicht recht habe, nimmt er an, daß Bewegung möglich sei, das heißt, er setzt das zu Beweisende voraus, indem er annimmt, daß Achilles mit der Geschwindigkeit v dahineile. Man könnte mit dem gleichen Argument „beweisen", daß ein unbeweglicher Felsblock **A** einen zweiten unbeweglichen Felsblock **S**, der sich im Abstand von 1 km befindet, nach Zurücklegung von $\frac{10}{9}$ km eingeholt habe. Man benötigt nur das Zugeständnis des Gesprächsgegners, daß **A** sich mit der zehnfachen Geschwindigkeit bewege, wie **S**, und auf dieses Zugeständnis könnte man sich schon einigen, denn beide haben die Geschwindigkeit Null, und zehnmal Null ist eben Null!

Eine sehr viel subtilere Argumentation von Mathematikern wird sehr häufig – auch in nichtmathematischer Literatur – angeführt. Welchen Weg legt Achilles insgesamt zurück? Erst einmal 1 km bis zum Startpunkt der Schildkröte, wenn wir hier die Gomperzschen Zahlen zugrunde legen, danach $\frac{1}{10}$ km bis zu dem Punkt, den die Schildkröte inzwischen erreicht hat. Danach muß Achilles $\frac{1}{100}$ km überwinden, um den Punkt zu erreichen, den die Schildkröte erreicht hat, während Achilles die letztgenannte Strecke durcheilte … Wir haben also insgesamt

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1\,000} + \cdots = 1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots = 1.111\cdots = 1\frac{1}{9},$$

das heißt, wir erhalten den Gompertzschen Wert, allerdings mit einer anderen Begründung. Vor einem Gericht wäre dies ein gutes Argument: Wir haben zwei Indizien für unseren Beweis, daß Achilles die Schildkröte einholen wird.

Zenon hätte hier vielleicht dankbar konstatiert, daß dieser Beweis genau das bestätige, was er selbst immer behauptet habe, daß nämlich sogar die Berechnung des Treffpunktes auf eine Aufgabe führe, die unendlich viele Additionen verlange, die also für ein menschliches Wesen nicht ausführbar sei.

Die geometrische Reihe Wir wollen nun einen kleinen Abstecher in die Mathematik unternehmen. Wenn wir irgendeine Zahl – in der Mathematik nennt man sie üblicherweise x – hernehmen und die folgende Summe bilden (wir bezeichnen mit x^i das i-malige Produkt von x mit sich selbst, also $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x \cdot x \cdot x, \cdots$)

$$S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n,$$

wobei n eine natürliche Zahl ist, die angibt, wie weit wir die Summation treiben wollen. Man lernt im ersten Semester des Mathematikstudiums den folgenden Trick: Wenn wir S_n mit x multiplizieren, dann erhalten wir

$$x \cdot S_n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{n-1},$$

also einen Ausdruck, der fast wie S_n aussieht, jedoch fehlt die führende 1 und der Term x^{n+1} ist zuviel. Wir schließen daraus

$$1 + x \cdot S_n - x^{n+1} = S_n,$$

und daraus folgt, wenn wir S_n „auf eine Seite bringen“

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Wenn wir jetzt annehmen, daß x zwischen -1 und $+1$ liege (mit Ausnahme der Endpunkte), dann wird der Betrag von x^{n+1} mit wachsendem n beliebig klein. Dies gibt uns den Mut, in diesem Falle n „über alle Grenzen“ wachsen zu lassen, und wir setzen

$$\boxed{S = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{für } -1 < x < 1.}$$

Hierbei bedeutet der Ausdruck in der Mitte nur eine zweckmäßige Abkürzung der linken Seite. Die Ellipsenpunkte sollen andeuten, daß die Summation immer weiter geführt wird. Eine solche unendlich gedachte Summation bezeichnet man in der Mathematik eine *unendliche Reihe*. Zur Kontrolle können wir einmal $x = \frac{1}{10}$ einsetzen und erhalten den Wert $S = \frac{10}{9}$, also den Wert, den schon Gomperz erhielt. Für $x = \frac{1}{2}$ erhalten wir als Summe der unendlichen Reihe den Wert 2, welchen wir oben als den kritischen Zeitpunkt nach der Inbetriebnahme der Thomson-Lampe kennengelernt haben und welcher auch bei den *Dichotomien I* und *II* auftritt.

Dieser „Grenzübergang“, bei dem wir ganz kühn von der endlichen Summe auf den Wert der unendlich ausgeführten Summation schließen, ist keineswegs trivial oder selbstverständlich. Wir werden noch sehen, daß der Weg zur Klarheit über diesen Schritt langwierig und mühsam war. Der bekannte Mathematiker Konrad Knopp (1882 – 1957) hat ein Buch über unendliche Reihen geschrieben, darf also als Experte gelten. Er schreibt [41, S 104 f.]:

> Es ist vielleicht nicht ganz überflüssig zu betonen, daß es eigentlich etwas ganz Paradoxes ist, daß eine unendliche Reihe, etwa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, überhaupt so etwas hat, was man eine Summe nennen kann.

Auch hier sollten wir also nicht das Staunen verlernen.

Der Mathematiker und Mathematikphilosoph Hermann Weyl, der schon genannt wurde, schreibt zu diesem Thema [83, S. 61]:

> Die Unmöglichkeit, das Kontinuum als ein starres Sein zu fassen, kann nicht prägnanter formuliert werden als durch das bekannte Paradoxon des *Zenon* von dem Wettlauf zwischen Achilleus und der Schildkröte. Der Hinweis darauf, daß die sukzessiven Partialsummen der Reihe
>
> $$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots,$$
>
> $1 - 1/2^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ nicht über alle Grenzen wachsen, sondern gegen 1 konvergieren, durch den man heute das Paradoxon zu erledigen meint, ist gewiß eine wichtige, zur Sache gehörige und aufklärende Bemerkung. Wenn aber die Strecke von der Länge 1 wirklich aus unendlich vielen Teilstrecken von der Länge $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $\cdots$ als „abgehackten“ Ganzen besteht, so widerstreitet es dem Wesen des Unendlichen,

> des „Unvollendeten“, daß Achilleus sie alle schließlich durchlaufen hat. Gibt man diese Möglichkeit zu, so wäre nicht einzusehen, warum nicht eine Maschine auch eine unendliche Folge distinkter Entscheidungsakte in endlicher Zeit zum Abschluß bringen könnte, indem sie etwa das erste Resultat nach $^1/_2$ Minute lieferte, das zweite $^1/_4$ Minute darauf, das dritte $^1/_8$ Minute später als das zweite usf.; und so könnte man, wenn auch das auffassende Gehirn analog funktionierte, die Durchlaufung aller natürlichen Zahlen und die sichere Entscheidung der an sie gerichteten Existentialfragen mit Ja oder Nein zuwege bringen!

Es sollte hier angemerkt werden, daß das „Grenzwertargument“ des Mathematikers im Falle der Thomson-Lampe nicht weiterhilft. In beliebiger Nähe des kritischen Zeitpunktes von zwei Minuten nach Inbetriebnahme kann man Zeitpunkte finden, in denen die Lampe leuchtet, aber auch Zeitpunkte, in denen sie nicht leuchtet. Das Wesentliche an der Lampe ist aber, daß sie zu jedem beliebigen Zeitpunkt entweder leuchtet oder aber nicht. Der Mathematiker kann hier mit seinen Methoden keine schlüssige Entscheidung geben. Was das Paradoxon *Dichotomie III* anbelangt, so werden wir uns noch etwas gedulden müssen.

Zum Schluß noch ein nicht ganz seriöser Beitrag zum Dichotomie-Paradoxon:

> In einer amerikanischen Tanzschule stellen sich eine gleiche Anzahl von Damen und Herren je an zwei gegenüberliegenden Wänden des Tanzsaals auf. Es soll nun die folgende Übung ausgeführt werden: Beide Gruppen sollen alle zehn Sekunden um ein Viertel des Abstandes, der sie trennt, aufeinander zugehen. Frage: Wann treffen sie sich in der Mitte des Saales?
>
> Ein Mathematiker würde sagen, daß sie sich niemals treffen, denn zu jedem Zeitpunkt ist ihr gegenseitiger Abstand positiv. Ein Physiker würde sagen, daß sie sich nach unendlicher Zeit treffen – Physiker sind etwas nachlässiger als wir Mathematiker mit der Verwendung des Wortes „unendlich“. Ein Ingenieur, also ein Pragmatiker, würde sagen, daß sie nach einer Minute für jeden denkbaren praktischen Zweck dicht genug zusammen sind.

5 Von Aristoteles bis zur Neuzeit

Aristoteles faßte die Wissenschaft seiner Zeit in einem umfangreichen Opus zusammen. Seine Schriften behandeln Logik, Metaphysik, Naturphilosophie, Ethik, Politik, Psychologie, Poetik und Kunsttheorie. Dieses beeindruckende Werk hat bis in die Neuzeit gewirkt. Durch seine Geschlossenheit – ein kleines parmenideisches Universum – hat es auch zu einer Dogmatisierung in den Wissenschaften geführt. Man kann sagen, daß in Platons Dialogen immer wieder Fragen gestellt werden, die letztlich ohne Antworten bleiben. In Aristoteles' System werden Antworten gegeben, das System ist nicht ohne Schwierigkeiten änderbar, man müßte denn wieder zurück zum Chaos gehen. So schreibt etwa Popper [62, S. 30]: „Es war Aristoteles, welcher der kritischen Wissenschaft den Garaus machte, zu der er doch selbst einen bedeutenden Beitrag geleistet hatte.“

In ähnlicher Weise hat in der neuesten Zeit ein philosophisches System den Anspruch einer allgemeinen geschlossenen Theorie von Allem zu vermitteln gesucht. Der größte – und wie ich meine einzige – Dialektiker des Ostblocks Bertold Brecht hat diese Situation in seinen *Geschichten vom Herrn Keuner* wie folgt charakterisiert:

Überzeugende Fragen

> »Ich habe bemerkt«, sagte Herr K., »daß wir viele abschrecken von unserer Lehre dadurch, daß wir auf alles eine Antwort wissen. Könnten wir nicht im Interesse der Propaganda eine Liste der Fragen aufstellen, die uns ganz ungelöst erscheinen?«

Die Paradoxa des Unendlichen paßten nicht so ganz in das System des Aristoteles. Er stellte deshalb „Verbotsschilder“ auf, die das Betreten gefährlicher Wege verhindern sollten. Dabei fällte er eine weitreichende und weise Entscheidung. Er unterschied das *potentiell Unendliche* vom *aktual Unendlichen*. Das potentiell Unendliche kann interpretiert werden als ein nicht endender Prozeß. Aristoteles schreibt im im 3. Buch der Physik [2, 3. Buch, 6. Capitel, S. 68]:

> Ueberhaupt nämlich besteht zwar darin das Unbegrenzte, da immer und immer von ihm etwas anderes genommen wird, und da das Genommene zwar stets ein begrenztes ist, aber stets ein anderes und wieder ein anderes.

Wir wissen, daß die *natürlichen Zahlen* (also die Zahlen 1, 2, 3 $\cdots$) eine unbeschränkte Menge bilden, die Reihe der Zahlen hört nicht auf, man kann zu jeder noch so großen Zahl immer noch 1 addieren und erhält eine noch größere Zahl. Dies war den Griechen der klassischen Antike bekannt, was schon bemerkenswert ist, fast alle antiken Kulturen hatten so etwas wie eine „größte Zahl“, über die hinaus nicht gedacht wurde. Aristoteles konnte die Befassung mit derartigen Unendlichkeiten nicht verbieten, er ließ daher das potentiell Unendliche als Gegenstand des Denkens zu. Das aktual Unendliche hingegen, das gegebene, vollendete Unendliche war nach Aristoteles nur den Göttern zugänglich und konnte daher nicht Gegenstand menschlichen Denkens sein.

Bei der Dichotomie III hatten wir uns den Prozeß der fortgesetzten Zweiteilung als vollzogen vorgestellt. Auch bei der Thomsonschen Lampe wird gefragt, was geschieht, wenn eine unendliche Abfolge von Schaltereignissen als vollendet vorliegt. Aristoteles belegte einfach Überlegungen dieser Art mit einem „Denkverbot“. Ähnliches liegt bei den beiden anderen Dichotomie-Paradoxa und dem Achilles-Paradoxon vor.

Dieses Aristotelische Verdikt, das Aktual Unendliche aus dem Bereich des menschlichen Denkens auszuschließen, bereinigte zunächst einmal die Situation. Als ein bemerkenswertes Beispiel möchte ich die Postulate des Euklid (um 300 v. Chr.) zitieren – heute würden wir diese als Axiome bezeichnen – das sind die fundamentalen „Spielregeln“, auf denen die gesamte (Euklidische) Geometrie beruht. Diese fünf berühmten Axiome lauten (zitiert nach Coxeter [15, S. 17]):

> Gefordert sein soll:
> 1. Daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt eine Strecke ziehen kann,
> 2. Daß man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,
> 3. Daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,
> 4. Daß alle rechten Winkel gleich sind,
> 5. („Parallelenaxiom“) Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

Diese Axiome besitzen eine besondere Schönheit, die sich allerdings nur dann offenbart, wenn man ein wenig von Mathematik versteht. Sie sind „minimalistisch“ formuliert, es wird nur so viel vorausgesetzt, wie unbedingt notwendig ist. Interessant ist daß in den ersten beiden Axiomen nicht von *Geraden* die Rede ist, sondern von *Strecken.* Eine Gerade ist eine nach beiden Seiten „ins Unendliche“ verlängerte Strecke, ist also nach Aristoteles’ Verdikt nicht denkbar. Interessant ist auch das fünfte Axiom, bekannt als das *Parallelenaxiom.* Es tauchen dort zwar die Worte „bei Verlängerung ins unendliche“ auf, aber diese bedeuten hier nur „bei hinreichender, aber endlicher Verlängerung“. Bemerkenswert ist, daß der Begriff „Parallele“ in dem Axiom nicht verwendet wird. Parallele Geraden schneiden sich nämlich nicht, und die Feststellung, daß das der Fall ist, würde eine unendliche Aufgabe bedeuten. In dem fünften Axiom des Euklid wird eine Bedingung dafür angegeben, unter der ein Paar von Geraden *nicht* parallel ist. Genau genommen ist das Axiom in der vorliegenden Form also ein *Nichtparallelenaxiom.*

Sogar zu Beginn der Neuzeit war das Aristotelische Verbot noch stark genug, um selbst Galilei (1564 –1642), der ja letztlich der Aristotelischen Physik die ersten schweren Schläge versetzt hatte, sich nicht von dem Aristotelischen Verdikt freimachen konnte. Er führt in seinem *Dialog* Beweise dafür an, daß die geradlinige Bewegung in der Natur nicht auftreten könne. Er läßt zum Beispiel Salviati sagen [25, S. 144]:

> Da außerdem die geradlinige Bewegung ihrer Natur nach unendlich ist – denn die gerade Linie ist unendlich und von unbestimmter Länge –, so kann kein beweglicher Körper den natürlichen Trieb haben, sich in gerader Linie zu bewegen, wohin er unmöglich gelangen kann, insofern einer solchen Bewegung kein Ziel gesetzt ist. Und die Natur, wie Aristoteles selbst sehr richtig bemerkt, versucht nicht, was unmöglich zu leisten ist, versucht also nicht dahin zu treiben, wohin zu gelangen unmöglich ist.

Der Umgang mit dem Unendlichen war ein wichtiges Thema der mittelalterlichen Theologie. Leider würde eine Behandlung dieser Entwicklung weit über den Rahmen dieses Vortrages hinausführen. Interessant ist vielleicht, daß gerade in der christlichen Religion der Unendlichkeitsbegriff eine sehr große Rolle gespielt hat. Wenn man in der Bibel nach Worten wie „Ewigkeit“ oder „ewig“ sucht, dann kommen diese im Alten Testament nur sehr selten vor, und dann fast ausschließlich entweder bei Verträgen wie etwa in 1 Sam 20,42:

> Und Jonatan sprach zu David: Geh hin mit Frieden! Für das, was wir beide geschworen haben im Namen des HERRN, dafür stehe der HERR zwischen mir und dir, zwischen meinen Nachkommen und deinen Nachkommen in Ewigkeit.

oder aber als ein Attribut Gottes wie beispielsweise in Ps 90,2:

> Ehe denn die Berge wurden und die Erde und die Welt geschaffen wurden, bist du, Gott, von Ewigkeit zu Ewigkeit.

Worte wie „Ewigkeit“ oder „ewig“ werden also als formelmäßige Wendungen benutzt und nicht weiter reflektiert. Im Neuen Testament hingegen wird sowohl von Jesus als auch von Paulus immer wieder auf die Ewigkeit Bezug genommen und sie wird – etwa in den Gleichnissen Jesu – mit Leben erfüllt. Man könnte sagen, daß dieser Umgang mit der Ewigkeit typisch ist für die christliche Theologie. Andere Religionen sind entweder indifferent, oder sie postulieren einen Weltanfang und ein Weltende oder aber sie reden von „sehr großen“ Zeiträumen. Die christliche Religion hat die griechischen Philosophen assimiliert, vor allem Plotin (um 205 – 270) und später Aristoteles und so eine ganz besondere Art der Behandlung der Unendlichkeit gefunden.

5.1 Der Beginn der Beschäftigung mit dem Unendlichen in der Mathematik

Man hat das 18. Jahrhundert im Hinblick auf die Wissenschaftsgeschichte als das Jahrhundert des Unendlichen bezeichnet [6, S. 10]. Tatsächlich begann man in diesem Jahrhundert, das Aristotelische Verbot der Beschäftigung mit dem aktual Unendlichen kritisch zu hinterfragen.

Ich beginne mit einer Geschichte, die mit der geometrischen Reihe zu tun hat [12, 97. Kapitel, S. 360–390]. Der Carmaldulensermönch, Guido Grandi (1671 – 1742), war von 1714 an Professor der Mathematik an der Universität Pisa. Er schrieb ein Buch, in dem er unter anderem diese Reihe untersuchte. Wenn man in der Formel

$$\boxed{S = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{für } -1 < x < 1}$$

für die Zahl x den Wert 1 einsetzt, dann erhält man auf der linken Seite die unendliche Reihe $1 + 1 + 1 + \cdots$, also einen Ausdruck, der über alle Grenzen wächst. Auf der rechten Seite erhält man den Ausdruck $\dfrac{1}{1-1} = \dfrac{1}{0}$. Beide Ausdrücke sind nicht besonders sinnvoll, man könnte – mit etwas Gewalt – sagen, daß beide Ausdrücke eine „unendliche Größe“ darstellten.

Anders wird es, wenn man $x = -1$ setzt. Man erhält

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}.$$

Wenn man den Ausdruck auf der linken Seite etwas anders interpretiert, dann erhält man

$$\underbrace{1-1}_{=0} + \underbrace{1-1}_{=0} + \underbrace{1-1}_{=0} + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0.$$

Man könnte noch weitere Experimente mit dieser Reihe anstellen und würde dann noch andere „Reihenwerte“ erhalten. Grandi jedenfalls hielt dieses Phänomen – in einer Interpretation erhält man 0 als Reihensumme, also Nichts, in einer anderen aber $\frac{1}{2}$, also einen positiven Wert – als einen Beweis für die Möglichkeit der Schöpfung aus dem Nichts.

Zum „Beweis“, daß der Wert $\frac{1}{2}$ der „wahre“ Wert der Reihe sei, führte Grandi eine kleine Geschichte an. [12, S. 366]

> Ein Vater hinterlässt zwei Söhnen einen werthvollen Edelstein, der abwechselnd je ein Jahr in dem Besitze eines jeden von beiden bleiben solle, ohne veräussert werden zu dürfen; dann gehöre er tatsächlich jedem zur Hälfte, während dessen Besitzrecht durch die Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ dargestellt werde.

Diese Geschichte ist recht hübsch, aber kaum schlüssig. Wenn man mit Marx Gebrauchswert und Tauschwert unterscheidet, dann kann man zunächst sagen, daß der Gebrauchswert unter Umständen viel geringer sein kann als $\frac{1}{2}$. Nehmen wir an, der eine Bruder habe eine Ehefrau, die den Stein zerlegen lassen möchte, um daraus ein geschmackvolles Collier fertigen zu lassen. Der andere Bruder hat eine Geliebte mit einem mehr holzgeschnitzten Geschmack, und diese möchte den Stein in einem Stück schleifen und fassen lassen, damit sie ihn sich als auffallenden Schmuck um den Hals hängen kann. Beide Wünsche sind unvereinbar, der Gebrauchswert des Steines ist also für beide Brüder stark eingeschränkt. Was den Tauschwert anbelangt: Um welchen Betrag könnte man einen Stein beleihen, wenn klar ist, daß man ihn am Ende des Jahres nicht mehr besitzt? Unabhängig davon sträubt sich mir als Mathematiker doch das Nackenfell bei dem Gedanken, daß eine mathematische Frage von einem Nachlaßgericht entschieden werden soll!

Um diese Argumentation Grandis enstspann sich eine heftige Diskussion, die im ganzen gelehrten Europa geführt wurde. Insbesondere äußerte sich der bedeutende Gelehrte Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), aber auch Christian Wolff (1679 – 1754), Pierre de Varignon (1654 – 1722) und andere schalteten sich ein. Ein Gegenstand der Diskussion war die Frage, welchen „Wert" die Grandische unendliche Reihe „in Wirklichkeit" habe. Leibniz argumentierte wie folgt [12, S. 366 f.]:

> Die unendliche Anzahl der Reihenglieder könne nur grad oder ungrad sein. Sei sie grad, so entstehe 0 als Reihensumme, 1 dagegen, wenn die Gliederzahl ungrad ist. Da aber kein Vernunftgrund für das vorzugsweise Gradsein oder für das vorzugsweise Ungradsein der Gliederzahl geltend gemacht werden könne, so geschehe es durch wunderbare Eigenart der Natur[10], dass beim Uebergang vom Endlichen zum Unendlichen zugleich ein Uebergang von dem Disjunctiven, welches aufhöre, zu dem Bleibenden, welches in der Mitte zwischen dem Disjunctiven liege, stattfinde. Wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung vorschreibe, man habe das arithmetische Mittel, d. h. die Hälfte der Summe gleich leicht erreichbarer Grössen in Rechnung zu ziehen, so beobachte hier die Natur der Dinge das gleiche Gesetz der Gerechtigkeit. Diese Art zu schliessen sei freilich mehr metaphysisch als mathematisch, aber dennoch sicher, wie denn überhaupt die Anwendung der Vorschriften der wahren Metaphysik in der Mathematik, in der Analysis, in der Geometrie sogar weit häufiger von Nutzen sei, als man gemeinhin glaube. Die Natur, so sagt Leibniz in einem an Grandi gerichteten Briefe, schreibe den Dingen das Gesetz der Continuität vor, und dessen Anwendung führe niemals irre, wenn es auch hier nicht auf strenger Beweisführung, sondern auf Gründen des Uebereinkommens[2] beruhe, dass man sagen dürfe, Gott selbst habe auf das Stetigkeitsgesetz Rücksicht genommen. Hier greift Leibniz auf Dinge, welche er, wie wir uns erinnern (S. 277), am Anfange des Jahrhunderts öffentlich zu vertheidigen gehabt hatte.

Interessant ist, daß Leibniz auf sein Stetigkeitsgesetz – oder besser sein Stetigkeitspostulat – Bezug nimmt. Dieses lautet [12, S. 277]:

> Wenn das zwei Aufgaben von einander Unterscheidende *in datis*, d. h. in dem, was als bekannt angenommen ist, kleiner als jede gegebene Grösse gemacht werden kann, so kann es auch *in quaesitis*, d. h. in dem, was herauskommt, kleiner als jede gegebene Grösse gemacht werden. Oder um einfacher zu reden, wenn die Voraussetzungen (das Gegebene) sich einander beständig nähern und sich schließlich in einander verlieren, so müssen die Folgen, das was herauskommt (oder das Gesuchte) das Gleiche thun.

Nach Leibniz verlaufen also alle Prozesse in der Natur stetig, *die Natur macht keine Sprünge* [23, S. 100]. Leider weiß man heute, daß dies nicht immer so ist, dies ist eine wichtige Erkenntnis der

[10] *admirabili naturae ingenio.*
[2] *convenientiae rationibus.*

sogenannten *Katastrophentheorie* und der *Chaostheorie*. Wir kehren noch einmal zu der Edelsteingeschichte von Grandi zurück. Nehmen wir an, der Vater wäre Mathematiker gewesen und hätte von Thomson gehört. Dann hätte er in seinem Testament verfügen können, daß zunächst jeder Sohn den Stein für je ein Jahr besitzen solle, danach abwechselnd für je ein halbes Jahr, dann für je ein viertel Jahr ... Es stellt sich nun die Frage, wem der Stein nach Ablauf des vierten Jahres gehört. Hier haben wir eigentlich keine „technischen“ Schwierigkeiten wie bei der Lampe. Wir können annehmen, daß der Stein – dessen Wert ja ohnehin recht fragwürdig ist – in einem Tresor ruhe und daß nur der immaterielle Besitztitel, der an keine Lichtgeschwindigkeitsgrenze gebunden ist, jeweils von dem einen zum anderen Bruder wechsle. Zu jeden beliebigen Zeitpunkt vor dem Endtermin von vier Jahren läßt sich genau berechnen, wem der Stein gehört. Hier ist es aber ganz klar, welche Situation nach Ablauf der vier Jahre vorliegt. Ein Jurist würde sagen, daß der Erblasser über die Besitzverhältnisse nach dem vierten Jahr in seinem Testament nicht verfügt habe, und daß daher der Stein nach dieser Zeit keinem der Brüder gehöre und dann etwa dem Fiskus anheimfalle. Auch hier „wehrt“ sich die Thomson-Lampe gegen Modifikationen.

Bei diesem Beispiel greift Leibniz’ Stetigkeitsprinzip nicht. Wie können nämlich ohne Schwierigkeiten Zeitpunkte vor Ablauf der vier Jahre heraussuchen, die sich dem Vierjahrestermin beliebig annähern, und in denen immmer der eine der beiden Brüder im Besitze des Steines ist. Das heißt, daß „die Voraussetzungen (das Gegebene) sich einander beständig nähern und sich schließlich in einander verlieren“. Nach dem Stetigkeitsprinzip „müssen die Folgen, das was herauskommt (oder das Gesuchte) das Gleiche thun“, und das heißt, daß der betreffende Bruder nach Ablauf der vier Jahre den Stein besitzt. Da diese Konstruktion aber für jeden der beiden Brüder ausgeführt werden kann, haben wir hier einen Widerspruch!

5.2 Die Infinitesimalrechnung

Eine bedeutende Erfindung, die auf Leibniz und auf Isaac Newton (1643 – 1727) zurückgeht, ist die Differentialrechnung. Einstein bezeichnete diese als „... vielleicht der größte gedankliche Schritt, den zu tun einem Menschen je vergönnt war.“ [20, S. 160].

Für die Theorie der mechanischen Bewegung benötigten Newton und Leibniz eine Präzisierung der Begriffe „Geschwindigkeit“ (und „Beschleunigung“). Für uns ist dies schwer vorstellbar, da wir – durch den Kraftfahrzeugverkehr – alltäglich mit derlei Begriffen umgehen. Wenn meine Frau und ich mit einem Kraftfahrzeug nach München fahren – es sind dies ziemlich genau 800 km – dann benötigen wir dazu etwa 8 Stunden. Bezeichnen wir die Wegdifferenz (Kilometerstand München $-$ Kilometerstand Hamburg) mit Δs und die Zeitdifferenz (Uhrenstand München $-$ Uhrenstand Hamburg) mit Δt, dann ist unsere Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{800 \text{ Kilometer}}{8 \text{ Stunden}} = 100\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Die so erhaltene Durchschnittsgeschwindigkeit ist nur ein grobes Maß für die tatsächlich gefahrene Geschwindigkeit, zum Beispiel enthält die angegebene Zeit eine Mittagspause, Baustellenverkehr und Strecken, auf denen wir wesentlich schneller fuhren. Will man es genauer haben, dann muß man für geeignete Teilstrecken Δs die erforderlichen Zeiten Δt ermitteln. Man weiß, daß die weißen Begrenzungspfähle an der Autobahn 500 m voneinander entfernt sind. Benötige ich von einem dieser Pfähle zum nächsten gerade 15 Sekunden, dann ist meine Durchschnittsgeschwindigkeit auf dieser Strecke $\Delta s/\Delta t = 500 \text{ m}/15 \text{ s} = 0.5 \text{ km}/(15/3600 \text{ s}) = 120 \text{ km/h}$. Der Begriff der Durchschnittsgeschwindigkeit hat den Nachteil, daß man für eine vollständige Angabe immer noch die Wegstrecke beziehungsweise das Zeitintervall, auf die sich die Angabe bezieht, hinzufügen muß.

Leibniz und Newton hatten daher die Idee, die Geschwindigkeit für „kleine“ Zeitintervalle – im Extremfall für das Zeitintervall Null anzugeben. Ein solches Zeitintervall Null nennen Leibniz und Newton ein *infinitesimales* Zeitinervall. Was dies nun genau sein soll, blieb im Dunklen. Newton schreibt in seiner berühmten *Philosophiae naturalis principia mathematica* von 1686 (*Liber primus, de motu corporum*) sehr wortreich, aber wenig erhellend (zitiert nach [76, S. 9 f.]):

> Man kann den Einwand machen, daß es kein letztes Verhältnis verschwindender Größen gebe, indem dasselbe vor dem Verschwinden nicht das letzte sei, nach dem Verschwinden aber überhaupt kein Verhältnis mehr bestehe. Aus demselben Grunde könnte man aber auch behaupten, daß ein nach einem bestimmten Orte strebender Körper keine letzte Geschwindigkeit habe; diese sei, bevor er den bestimmten Ort erreicht habe, nicht mehr die letzte, nachdem er ihn erreicht hat, existiere sie gar nicht mehr. Die Antwort ist leicht. Unter der letzten Geschwindigkeit versteht man diejenige, mit welcher der Körper sich weder bewegt, ehe er den letzten Ort erreicht und die Bewegung aufhört, noch die nachher stattfindende, sondern in dem Augenblick, wo er den Ort erreicht, ist es die letzte Geschwindigkeit selbst, mit welcher der Körper den Ort berührt und mit welcher die Bewegung endigt. Auf gleiche Weise hat man unter dem letzten Verhältnis verschwindender Größen dasjenige zu verstehen, mit welchem sie verschwinden, nicht aber das vor oder nach dem Verschwinden bestehende. Ebenso ist das erste Verhältnis entstehender Größen dasjenige, mit welchem sie entstehen; die erste und letzte Summe diejenige, mit welcher sie anfangen oder aufhören zu sein (entweder größer oder kleiner zu werden). Es existiert eine Grenze, welche die Geschwindigkeit am Ende der Bewegung erreiche, nicht aber überschreiten kann; dies ist die letzte Geschwindigkeit. Dasselbe gilt von der Grenze aller anfangenden und aufhörenden Größen und Proportionen. Da diese Grenze fest und bestimmt ist, so ist es eine wahrhaft mathematische Aufgabe, sie aufzusuchen.

Man stelle sich vor, daß dieser reichlich nebulöse Text von einem Anwalt vorgetragen werde in einem Verfahren wegen Überschreitung einer Geschwindigkeitsbeschränkung auf der Autobahn! In dem mathematischen Lexikon von Wolff aus dem Jahre 1734 findet man zu dem Stichwort „Infinitesima“ [85]:

> INFINITESIMA, wird in der Mathesi eine Grösse genennet, welche so klein ist, daß man keine kleinere sich einbilden kan; dergleichen das Punctum Mathematicum ist. Denn so man eine Linie in verschiedenen Puncten getheilt zu seyn sich gedencket, also, daß sie nunmehro in etliche Stücke zerschnitten, so wird sie doch dadurch an ihrer Länge nichts verlieren, sondern diese eintzele Theile, wenn sie wieder an einander gesetzet werden, müssen zusammen genommen eben die gantze Linie ohne einigen Abgang oder Verkürtzung ausmachen. Siehe **Differential-Grösse**; ingleichen **Unendlich kleine Grösse**.

Wir wollen uns diese mysteriösen *Infinitesima* an einem Beispiel ansehen. Ein normaler Mittelklassewagen beschleunigt in 10 s auf 100 km/h. Wir nehmen an, wir hätten bei einem Beschleunigungsexperiment für jede Sekunde den zurückgelegten Weg des Wagens gemessen. Dann hätten wir etwa die folgenden Zahlen erhalten:

Zeit (s)	Weg (m)
1	1.39
2	5.56
3	12.50
4	22.22
5	34.72
6	50.00
7	68.06
8	88.89
9	112.50
10	138.89

Wir lernen in der angewandten Mathematik, aus solchen Meßreihen das zugrundeliegende mathematische Gesetz herzuleiten. Dieses ergibt sich wie folgt (wir messen zweckmäßigerweise den zurückgelegten Weg in km und die Zeit in Stunden):

$$s(t) := \text{Weg (km)} = \frac{3\ 600^2}{720} \times t^2 = 18\ 000 \times t^2.$$

Wir wollen nun aus dieser Formel die Geschwindigkeit $v(t)$ im Zeitpunkt t errechnen. Dazu nehmen wir ein infinitesimales Zeitlelement dt her und berechnen die gesuchte Geschwindigkeit ganz wie oben am Beispiel der Fahrt nach München als die Wegdifferenz (nach Formel) die zur Zeitdifferenz $dt = [(t + dt) - t]$ gehört:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{s(t+dt) - s(t)}{dt} = \frac{18\ 000 \cdot (t+dt)^2 - 18\ 000 \cdot t^2}{dt} = \\ &= \frac{18\ 000 \cdot t^2 + 2 \cdot 18\ 000 \cdot t \cdot dt + 18\ 000 \cdot dt^2 - 18\ 000 \cdot t^2}{dt} = \\ &= 2 \cdot 18\ 000 \cdot t + 18\ 000 \cdot dt = 2 \cdot 18\ 000 \cdot t \end{aligned}$$

Es ergibt sich nun in der Tat für $t = 10 \text{ s} = \frac{1}{360}$ h eine Geschwindigkeit von $v\left(\frac{1}{360}\right) = 2 \cdot \frac{18\ 000}{360} =$ 100 km/h. Zu dem Rechengang, der zu der Momentangeschwindigkeit führte, ist anzumerken, daß eine Division der Form gewöhnliche Zahl/Infinitesimalzahl nicht erlaubt sein kann (es sei denn, die gewöhnliche Zahl ist gleich Null), das Resultat einer Division durch eine Zahl, „welche so klein ist, daß man keine kleinere sich einbilden kan“ wäre so groß, daß man keinen größeren Wert sich einbilden kann. Wir hatten aber bei der eben ausgeführten Rechnung „Glück“, die kritische Größe dt hat sich weggekürzt. Beim letzten Schritt haben wir ausgenutzt, daß $18\ 000 \cdot dt$ beliebig klein ist, also weggelassen werden kann.

Die infinitesimale Größe dt spielt bei der Rechnung eine sehr eignartige Rolle. Sie taucht anscheinend aus einem anderen Universum auf, für sie gelten eigene Rechenregeln, die mit unserer Logik nicht vereinbar sind. Zum Schluß verschwindet sie wieder in ihrem Universum, sie spielt eine ähnliche Rolle wie ein Katalysator in der Chemie: Sie bewirkt, daß die Momentangeschwindigkeit „vernünftig“ definiert werden kann und scheidet dann unverändert aus der Argumentation wieder aus.

Wir haben also jetzt, wie gewünscht, einerseits eine Zahlenangabe für die „momentane“ Geschwindigkeit, die auch ohne Angabe eines Meßintervalls sinnvoll ist, allerdings um den Preis der Einführung der reichlich mysteriösen infinitesimalen Größen.

Leibniz wird häufig als der große Universalgelehrte bezeichnet. Diese Charakterisierung ist wahrer, als man gemeinhin denkt. Leibnizens Universalität drückt sich darin aus, daß für ihn die Gebiete

Mathematik, Naturwissenschaft, Philosophie und Theologie ein Ganzes bilden. Er scheut sich nicht, wie wir gesehen haben, einen mathematischen Sachverhalt metaphysisch zu begründen, und auch bei der Infinitesimalrechnung geht er philosophisch oder metaphysisch vor. Es wurde von verschiedenen Autoren darauf hingewiesen, daß ein enger Zusammenhang zwischen der Infinitesimalrechnung und der Monadologie bestehe (vgl. etwa [23, S. 114 f.]). Rein äußerlich haben die Monaden die Eigenschaft, keine Ausdehnung zu besitzen wie die Infinitesmalen [49]:

> §. 3. Wo nun keine Teile vorhanden sind / daselbst kann auch weder eine Ausdehnung in die Länge / Breite und Tiefe / noch eine Figur / noch eine Zerteilung möglich seyn. Und diese Monaden sind die wahrhaften Atomi der Natur und mit einem Worte / die *Elemente derer Dinge*.

Natürlich sollte man die Analogie nicht zu weit treiben, aber es ist durchaus vorstellbar, daß Leibniz bei seinen Monaden von den infinitesmalen Größen inspiriert wurde und umgekehrt.

Wir haben bei der Einführung der infinitesimalen Größen das Problem, daß nicht ganz klar ist, ob mit diesen Größen auch immer sinnvoll gerechnet werden kann. Zu Leibnizens und Newtons Zeit war dies eine außerordentlich kühne Idee. Der Mathematiker, Theologe und Philosoph George Berkeley (1685 – 1753) kritisierte das Konzept des Infinitesimalen in seiner Schrift *The Analyst* von 1734 [6]. Berkeley hat Newton – beziehungsweise die Newtonianer – in verschiedenen Punkten heftig bekämpft. Einmal kritisierte er die Einführung des absoluten Raumes in der Newtonschen Gravitationstheorie, und wir wissen seit Einstein, daß diese Kritk durchaus berechtigt war. In einer seiner ersten Arbeiten hatte er die Theorie der visuellen Wahrnehmung, die sich auf Newtons *Opticks* (1704) gründete, angegriffen [7], und wir wissen heute, daß diese Angriffe ebenfalls nicht unbegründet waren, ebensowenig wie die Wahrnehmungskritik des Parmenides. Schließlich gab Berkeley im *Analyst* zu bedenken, daß die Definition der infinitesimalen Größen widersprüchlich sei. Eine logische Theorie, die auch nur einen Widerspruch enthält, ist aber wertlos. Der Untertitel des *Analyst* lautet ironisch–polemisch [6, S. 81]:

> Eine an einen ungläubigen Mathematiker gerichtete Abhandlung, in der geprüft wird, ob der Gegenstand, die Prinzipien und die Folgerungen der modernen Analysis deutlicher erfaßt und klarer hergeleitet sind als religiöse Geheimnisse und Glaubenssätze.

Aller Kritik hatten die Anhänger der Newtonschen Mechanik ein gewichtiges und unwiderlegliches Argument entgegenzusetzen: Diese „erklärte“ die Vielzahl der Erscheinungen – vom Galileischen freien Fall und der Bewegung einer Kugel auf einer schiefen Ebene über die Stoßgesetze bis hin zu den Planetenbewegungen – vermöge einer einfachen Theorie, die aus wenigen Prinzipien herleitbar war mit einer Genauigkeit, die im Falle astronomischer Phänomene sprichwörtlich geworden ist. Am 15. Oktober 1997 wurde auf Cape Canaveral *Cassini/Huygens*, ein gemeinsames Projekt von NASA, ESA und ASI gestartet. Im Juli 2004 kam die Raumsonde nach knapp 7 Jahren Anflug im Saturnsystem an und liefert seither interessante Bilder und Meßdaten vom Saturn, seinen Ringen und seinen über 30 Monden. Am 14. Januar 2005 trat die von den Europäern gebaute Abstiegssonde *Huygens* in die Atmosphäre des größten Saturnmondes Titan ein und hat vor Ort diese erstaunliche Atmosphäre erforscht, in der bereits organische Moleküle nachgewiesen wurden. Die außerordentlich trickreiche Flugbahn dieses Raumfahrtunternehmens beruht ebenfalls auf Newtons Theorie. Dieses Unternehmen erforderte extreme Präzision bei der Berechnung der Bahn, und diese wurde erreicht auf der Gundlage der vor über dreihundert Jahren formulierten Newtonschen Gesetze!

Nach diesen Gesetzen war der gesamte Ablauf des *Cassini/Huygens* Raumfahrtunternehmens völlig festgelegt durch Angabe der Position und der Geschwindigkeit des Flugkörpers zum Start-zeitpunkt – und natürlich noch durch die Bewegungen der Planeten und auch durch den Treibstoffverbrauch während des Fluges. Wir haben hier eine Situation, die der des Pfeil-Paradoxons von Zeno völlig gleicht. Die Startgeschwindigkeit, die durch Untersuchungen und Messungen zu einem festen Zeitpunkt nicht feststellbar ist, ist das fehlende Datum, welches die Bewegung beschreibt. Wir haben aber gesehen, daß die Grundlegung dieses Begriffes nicht trivial ist.

Das Problem der Begründung der Infinitesimalrechnung blieb bis ins neunzehnte Jahrhundert offen. Es ist interessant, daß sogar Karl Marx um 1850 drei vergebliche Versuche unternahm, die Infinitesimalrechnung „dialektisch“ zu begründen [53]. Eine strenge Grundlegung wurde von Augsutin-Louis Cauchy (1789–1857) im Jahre 1821 in dem (*Cours d'Analyse*) und später von Richard Dedekind (1831 – 1916) in seiner Schrift *Was sind und was sollen die Zahlen* (1888) sowie von Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897) gegeben. Diese Begründung ist allerdings nicht einfach, und unsere Studenten haben erhebliche begriffliche Schwierigkeiten mit den Grundlagen der Analysis.

In den letzten Jahrzehnten hat sich ein Zweig der Mathematik etabliert, in dem die infinitesimalen Größen von Leibniz und Newton widerspruchsfrei begründet werden, die sogenannte *Nicht-Standard-Analysis* [17, 54]. Es ist hier nicht der Ort, auf diese Theorie einzugehen. Jeder „Standard-Zahl“ wird eine „Wolke“ von Nicht-Standard-Zahlen zugeordnet, die wie „Quantenfluktuationen“ unsichtbar die Zahl umschwirren. Aus der Nicht-Standard-Analysis wurde eine „Lösung von Zenons Paradoxien“ hergeleitet [54], diese „Lösung“ vermag allerdings auch nicht recht zu überzeugen.

6 Das neunzehnte Jahrhundert

Bernard Bolzano (1781 – 1848) war ein Professor der Theologie mit Neigung zur Mathematik an der Universität Prag. Nach dem Sieg über Napoleon in der Leipziger Völkerschlacht (16. – 19. 10. 1813) etablierte sich auf dem Wiener Kongreß (18. 9. 1814 – 9. 6. 1815) die Restauration. Im Zuge der Metternichschen „Demagogenverfolgungen“ wurde Bolzano durch Handschreiben des österreichischen Kaisers Franz seines Amtes enthoben. Fortan widmete er sich – notgedrungen – ausschließlich der Mathematik. Sein bekanntestes Werk *Paradoxien des Unendlichen* [8] erschien 1851 nach seinem Tode. In diesem Buch behandelt Bolzano das aktual Unendliche vom mathematischen, philosophischen und theologischen Standpunkt aus.

Bolzano hatte die verbotene Tür zum aktual Unendlichen einen Spalt weit geöffnet. Dabei bereitete er das Fundament für die moderne Analysis vor [39, 42]. Interessant ist, daß er die Grandische Reihe in seinen *Paradoxien des Unendlichen* untersuchte [8, §32]. Er kommt zu dem sehr modernen Schluß, daß der Ausdruck, der durch diese Reihe dargestellt wird, „gegenstandslos“ sei.

Besondere Bedeutung haben Bolzanos Arbeiten, in denen die Begriffe der modernen Mathematik präzise formuliert werden beziehungsweise in denen auf Präzisierungsbedarf hingewiesen wird.

Auf dem von Bolzano gelegten Fundament baute Georg Cantor (1845 – 1918) die moderne Theorie der unendlichen Mengen auf. Die Tür, die von Bolzano einen Spalt weit geöffnet worden war, durchschritt Cantor und eröffnete der Mathematik ein Paradies, wie es David Hilbert einmal ausdrückte [34, S. 170]: „Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.“ Auch Georg Cantor war theologisch interessiert, er führte einen umfangreichen – wenn auch etwas einseitigen – Schriftwechsel mit dem Vatikan (vgl. etwa seinen Brief vom 1. Februar 1896 an P. Thomas Esser in Rom in [55, S. 15 – 20]).

Wir wollen hier zwei der Beiträge Cantors zur Theorie der unendlichen Mengen kurz betrachten.

Schon Galilei war aufgefallen, daß für unendliche Mengen andere Gesetze gelten, als für endliche. Wenn man feststellem möchte, daß zwei verschiedene Mengen die gleiche Anzahl von Elementen haben, dann kann man dies – ohne über einen Zahlbegriff zu verfügen – leicht bewerkstelligen, indem man die Elemente der beiden Mengen paarweise einander gegenüberstellt. Bleiben keine Elemente übrig, dann sind die betreffenden Anzahlen gleich. So hat man in früheren Zeiten Kerbhölzer benutzt um beispielsweise Schafe zu zählen [37]. Wenn man abends die Schafe in die Hürde treibt und wenn man bei jedem Schaf eine Kerbe weiter rückt und wenn schließlich beim letzten Schaf die letzte Kerbe erreicht ist, dann kann man sicher sein, daß kein Schaf verlorengegangen ist (und keines hinzugekommen). Derartige Zählhilfsmittel scheinen deutlich älter zu sein als die ersten Schriftzeugnisse [73]. Sie waren noch bis in die jüngste Vergangenheit in Gebrauch [30].

Schon Galilei fiel auf, daß dies bei unendlichen Mengen anders sein kann. So kann man beispielsweise die Menge der geraden Zahlen durch die Menge der natürlichen Zahlen lückenlos und vollständig durchnumerieren:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \cdots \end{array}$$

Diese Möglichkeit der Zuordnung ist insofern bemerkenswert, als die geraden Zahlen eine echte Teilmenge der Menge aller Zahlen sind. Man möchte rein intuitiv annehmen, daß es sehr viel „mehr“ natürliche Zahlen als gerade Zahlen gebe, nämlich genau doppelt so viele. Andererseits deutet die Möglichkeit einer vollständigen und lückenlosen Durchnumerierung der geraden Zahlen vermittels aller Zahlen darauf hin, daß es von beiden Sorten Zahlen „gleich viele“ gebe. Wir haben hier eine Eigenschaft einer unendlichen Menge gefunden, die „paradox“ ist, das heißt, unserer Intuition zuwiderläuft. Bolzano hat in seinem Buch ähnliche Beispiele angeführt (vgl. etwa [8, §20]).

Cantor konnte aber noch mehr zeigen. Intuitiv meinen wir, daß es wirklich sehr viel mehr Brüche gäbe als natürliche Zahlen. Cantor hat eine Methode gefunden, alle (irreduziblen, das heißt unkürzbaren) Brüche lückenlos und vollständig durchzunumerieren. Dazu ordnete er die Brüche wie folgt an: Der Bruch $\frac{p}{q}$ kommt vor dem Bruch $\frac{r}{s}$, wenn $p+q$ kleiner ist als $r+s$. Ist $p+q = r+s$, dann kommt $\frac{p}{q}$ vor $\frac{r}{s}$, wenn p kleiner ist als r [55, S. 23]. Man erhält also die durchnumerierte Folge aller Brüche gemäß

$$\begin{array}{cccccccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{1}{3} & \frac{3}{1} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{1} & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots \end{array}$$

Man nennt solche Mengen, die sich lückenlos und vollständig vermittels der natürlichen Zahlen durchnumerieren lassen, *abzählbar*. Cantor konnte noch von weitaus umfangreicheren Mengen zeigen, daß sie abzählbar seien. Es entstand nun die Frage, ob es Mengen geben könne, die nicht mehr abzählbar sind. Die wichtigste Entdeckung von Georg Cantor war, daß die Menge aller reellen Zahlen diese Eigenschaft besitzt. Dabei sollen unter reellen Zahlen die nicht abbrechenden unendlichen Dezimalbrüche verstanden werden. Es war ein Schock, eine frühe Krise der Mathematik im antiken Griechenland, als die Pythagoreer entdecken mußten, daß es Zahlen gibt, die sich nicht als einfache Brüche ausdrücken lassen. Die Pythagoreer bildeten eine Sekte, für die die ganzen Zahlen – und die einfachen Brüche – eine besondere Bedeutung hatten. Insbesondere hatten die Pythagoreer erkannt, daß sich harmonische Klänge in der Musik – auf einem Monochord

– dann ergaben, wenn die Saitenlängen in einem Verhältnis kleiner rationaler Zahlen zueinander stehen. Diese Entdeckung bestätigte die pythagoreische Devise *alles ist Zahl* aufs Eindrucksvollste. Als man feststellte, daß eine einfache geometrische Größe, nämlich die Länge der Diagonale eines Quadrats der Seitenlänge 1, sich nicht durch eine rationale Zahl ausdrücken läßt, war dies eine nachhaltige Katastrophe für das pythagoreische Weltbild. Es heißt, daß einer der Pythagoreer, welcher dieses schockierende Ergebnis Uneingeweihten mitgeteilt hatte, zur Strafe bei einem Schiffbruch ertrunken sei [13, S. 183]:

> Man sagt, daß derjenige, welcher zuerst die Betrachtung des Irrationalen aus dem Verborgenen in die Öffentlichkeit brachte, durch einen Schiffbruch umgekommen sei, und zwar weil das Unaussprechliche und Bildlose immer verborgen werden sollte, und daß der, welcher von ungefähr dieses Bild des Lebens berührte und aufdeckte, an den Ort der Entstehung versetzt und dort von ewigen Fluten umspült wurde. Solche Ehrfurcht hatten diese Männer vor der Theorie des Irrationalen.

Heute haben wir uns an unendliche Dezimalbrüche gewöhnt. Auch hier haben wir das Staunen verlernt. Georg Cantor zeigte nun durch einen genialen Trick, daß die Menge aller unendlichen Dezimalbrüche nicht abzählbar sei. Wie kann man eine solche negative Eigenschaft zeigen. Hierzu ist die Zenonische Dialektik hervorragend geeignet. Man nimmt an, das zu Beweisende sei falsch, das heißt, die Dezimalbrüche seien abzählbar und zeigt dann, daß diese Annahme zu einem Widerspruch führt. Wir nehmen also an, daß es eine Liste gebe, die alle Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 durchnumeriert enthalte. Diese Liste hätte die folgende Form

$$\begin{array}{ll} 1 & 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\ 2 & 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\ 3 & 0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots \end{array}$$

Hierbei sollen $a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$ die Ziffern des ersten Dezimalbruchs darstellen usw. Nun konstruieren wir einen Dezimalbruch, der sicher nicht in der Liste enthalten sein kann. Als erste Stelle nach dem Dezimalpunkt wählen wir eine Ziffer b_1, die von a_{11} (und auch von 0) verschieden ist, als zweite Ziffer b_2 eine Ziffer, die von a_{22} (und von 0) verschieden ist, als dritte Ziffer b_3 eine Ziffer, die von a_{33} (und von 0) verschieden ist .... Die Dezimalzahl $0.b_1b_2b_3\cdots$ ist dann sicher von der ersten Zahl unserer Liste verschieden, da sie in der ersten Stelle nach dem Dezimalpunkt von dieser abweicht. Sie ist auch von der zweiten Zahl der Liste verschieden, da sie in der zweiten Stelle nach dem Dezimalpunkt abweicht .... Sie ist also von *jeder* Zahl der Liste verschieden, also haben wir in der Tat eine Zahl gefunden, die in der Liste nicht vorkommt. Damit ist gezeigt, daß die Menge aller unendlichen Dezimalbrüche nicht abzählbar ist.

Diese Erkenntnis Cantors hat in der Tat die Mathematik revolutioniert. Jetzt wird auch klar, weshalb bei dem Paradoxon *Dichotomie III* die Synthese nicht funktionieren konnte. Die zerlegte Strecke enthält mehr als abzählbar viele Punkte, und ein Prozeß, der darin besteht, daß einzelne Punkte zur Strecke hinzugefügt werden, kann immer nur abzählbare Mengen erzeugen. Es findet also in der Tat ein gewaltiger „Qualitätssprung“ bei der Synthese der Strecke aus den einzelnen Punkten statt. Die Cantorsche Entdeckung ist jedoch nicht eine Lösung des Zenonischen Paradoxons *Dichotomie III*, sondern eher eine Klarstellung und Illustration der begrifflichen Schwierigkeiten, die bei diesem Paradoxon auftreten.

7 Die „Krise“ der modernen Mathematik

Im neunzehnten und zwanzigsten Jahrhundert wurde versucht, das Gebäude der Mathematik „erdbebensicher“ auszubauen. Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 – 1925) versuchte, die Mathematik auf der Logik aufzubauen. Dieses Unterfangen erwies sich als nicht durchführbar. Bertrand Arthur William Russell (1872 – 1970) und Alfred North Whitehead (1861 – 1947) starteten in ihrem Werk *Principia Mathematica* (1910 – 1913) den großangelegten Versuch, das Fregesche Programm weiterzuführen. Der große und universelle Mathematiker David Hilbert (1862 – 1943) setzte sich ebenfalls das Ziel, die Grundlagen der Mathematik zweifelsfrei und exakt zu legen. Alle diese Bemühungen wurden 1931 durch eine Arbeit von Kurt Gödel (1906 – 1978) zunichte gemacht [29]. Gödel konnte zwei erstaunliche Aussagen herleiten. Die erste besagt, daß es für jede mathematische Theorie, die hinreichend kompliziert ist, so daß sie die Arithmetik der ganzen Zahlen enthält, Aussagen formulierbar sind, die zwar wahr sind, aber nicht mit den Mitteln der Theorie beweisbar. Das heißt aber, daß keine mathematische Theorie abgeschlossen ist, vielmehr enthält sie Wahrheiten, die innerhalb der Theorie nicht bewiesen werden können. Man kann natürlich solche Wahrheiten als Axiome in die Theorie einbauen, man erhält dann eine umfangreichere Theorie, aber der Gödelsche Satz sagt aus, daß auch diese Theorie wieder wahre, aber nicht beweisbare Aussagen enthält. Wir befinden uns hier in einer ähnlichen Situation wie bei dem Cantorschen Beweis der Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen. Wie umfangreich wir auch unsere Theorien ausstatten, sie werden niemals vollständig sein. Diese Situation wirkte wie ein Schock, und ich möchte behaupten, daß die Konsequenzen für die Erkenntnistheorie auch heute noch nicht überblickt werden können. Für uns Mathematiker ist allerdings beglückend, daß unsere Wissenschaft niemals zu Ende sein wird. Man kann dies vermittels des folgenden Bildes ausdrücken: Die Menge der erkannten beweisbaren Aussagen bildet einen winzigen Archipel in dem unendlichen unbekannten Ozean dessen, was wir nicht beweisen können und jede neu entdeckte Insel bereichert zwar unser Wissen, ändert aber grundsätzlich nichts an der Situation – hinter dem Horizont liegen noch uendliche viele Inseln. Etwas profaner ausgedrückt: Zumindest können wir Mathematiker niemals arbeitslos werden. Übrigens: Das Besondere an dem Beweis von Gödel ist, daß seine Grundidee überraschend einfach ist (die Details allerdings sind recht technisch und nicht ganz einfach [59]).

Gödel bewies aber auch noch eine weitere Aussage, die noch bestürzender ist. Eine lebenswichtige Forderung, die wir an unsere mathematischen Theorien stellen müssen, ist die der Widerspruchsfreiheit. Ein einziger unauflösbarer logischer Widerspruch in einer mathematischen Theorie entwertet diese vollständig. Man kann nämlich zeigen, daß in einer solchen Theorie **jede** Aussage bewiesen werden kann. Dies ist eine Erklärung dafür, daß zum Beispiel von Dänickens „Beweise“ so überzeugend wirken und daß bei Aussagen von Politikern verschiedener Richtungen die Argumente recht plausibel und einsichtig klingen mögen, auch wenn man sich sagen muß, daß sie nicht alle Recht haben können. Irgendwo in den „Datenbasen“ dieser Menschen befindet sich ein tief versteckter Widerspruch, und damit wird dann alles beweisbar. Dies muß recht verstanden werden: Alle Ansammlungen menschlichen Wissens sind mit Widersprüchen behaftet!

Das erschreckende Resultat Gödels besagt, daß, wenn unsere Mathematik widerspruchsfrei ist, es keinen Beweis dafür geben kann. Oder, mit andern Worten, wenn jemand einen korrekten Beweis der Widerspruchsfreiheit der Mathematik erbringt, dann ist die Mathematik nicht widerspruchsfrei. Diese verwirrende Situation hat Hermann Weyl zu dem Ausspruch veranlaßt

> Gott existiert, weil die Mathematik widerspruchsfrei ist. Der Teufel existiert, weil wir dies nicht beweisen können!

Bertrand Russell charakterisierte die Situation einmal wie folgt:

> Mathematik ist eine Wissenschaft, in der wir nicht wissen, worüber wir reden, oder ob das, was wir sagen, wahr ist.

Was bleibt zum Schluß? Wir haben uns der Fiktion der unendlichen Teilbarkeit in der Physik bedient, wohl wissend, daß diese Fiktion nichts mit der Realität zu tun hat. Man muß aber zugeben, daß dieses Konstrukt überraschenderweise hervorragend funktioniert. Die Kontinuitätsvoraussetzung bildet eine theoretische Basis für nahezu die gesamte Physik und auch für die Ingenieurwissenschaften. Fast durchweg sind die Gesetze der Physik und der Technik in der Form von Differentialgleichungen geschrieben, das heißt, sie basieren wesentlich auf Begriffen der unendlichen Teilbarkeit.

Mehr noch: Diese Fiktion hat auch immense praktische Vorteile. Ich selbst habe in den letzten Jahrzehnten auf dem Gebiete der mathematischen Grundlagen der visuellen Wahrnehmung gearbeitet. Diese Forschungen haben letztendlich das Ziel, Computermodelle für Wahrnehmungsleistungen zu erstellen. Eines der großen Probleme auf diesem Gebiet ist, daß wir von der Kontinuitätsfiktion nicht ausgehen dürfen. Eine digitale Kamera – wie auch die Netzhaut des Auges – liefert ein diskretes Bild, und es treten immense Schwierigkeiten auf, wenn wir dieses Bild mit dem uns „eingebauten“ Vorurteil der Kontinuität der Welt verstehen wollen. Es mußte in den letzten Jahrzehnten unter sehr großen begrifflichen Schwierigkeiten eine eigene *diskrete Geometrie* geschaffen werden, und diese ist ungleich komplizierter als die Geometrie Euklids.

Die Situation lößt sich recht gut illustrieren, wenn man sich einmal ein technisches Projekt wie etwa die Konstruktion des Airbus vor Augen führt. Das Flugzeug soll schließlich in der uns bekannten realen Welt, der Scheinwelt des Parmenides, zuverlässig funktionieren. Die Entwurfsingenieure modellieren Teilsysteme des Flugzeugs in der Welt des Plato und Parmenides, also in einer kontinuierlichen Welt, die die Welt ist, welche man durch Differentialgleichungen beschreiben kann. In dieser schattenhaften Scheinwelt gelten beispielsweise die Zenonschen Paradoxa. Wenn die Ingenieure mit ihren Modellen durch Rechnung auf einem Computer das Verhalten der Systemteile numerisch nachvollziehen wollen, dann müssen sie erneut die Darstellungswelt wechseln. Der Computer als Produkt der „realen Welt“ kann nämlich mit den Begriffen der kontinuierlichen Welt nichts anfangen, er muß sie wieder in eine diskrete Sprache übersetzen. Diese diskrete Darstellung ist aber nicht die der „realen Welt“, vielmehr ist die Darstellung des Computers auf die Fähigkeiten des Computers und auf das zu lösende Problem zugeschnitten. Schließlich müssen die Resultate der Rechnung in Begriffe sowohl der realen Welt als auch der Platonischen Modellwelt übersetzt werden, um sie zu verstehen. Man darf sich wundern, daß das Flugzeug dennoch fliegt!

Wir Mathematiker haben uns im Unendlichen häuslich eingerichtet. Wir wissen, daß wir uns auf schwierigem Gelände befinden, daß man Vorsicht, Erfahrung und Trittsicherheit benötigt. Das aber macht gerade den Reiz der Beschäftigung mit dem Unendlichen aus – wie ja auch für einen Bergwanderer ausgesetzte Stellen allenfalls Herausforderungen sind, deren Überwindung den Reiz des Bergwanderns erst vollkommen machen.

Der Wettlauf des Achilles mit der Schildkröte ist noch nicht zu Ende. Das Unendliche ist für uns immer noch *terra incognita*. Es gelten im Unendlichen bestürzende Gesetze, die aller unserer endlichen Erfahrung widersprechen, und genau dies ist es, was uns Zenon mit seinen Paradoxa auch heute noch lehren kann.

Literatur

[1] Amir D. Aczel. *göttliche Formel. Von der Ausdehnung des Universums*. Aus dem Amerikanischen von Hainer Kober. rororo Sachbuch 60935. Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbek bei Hamburg, 2002.

[2] Aristoteles. *Physik*. Übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von C. H. Weiße. Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1829.

[3] Äsop. *Äsop. Fabeln – griechisch-deutsch*. Herausgegeben und übersetzt von Rainer Nickel. Sammlung Tusculum. Artemis & Winkler, Düsseldorf [u.a.], 2005.

[4] Julian B. Barbour. Maximal variety as a new fundamental principle of dynamics. *Foundations of Physics*, 19(9):1051–1073, September 1989.

[5] Pierre Bayle. *Verschiedene einem Doktor der Sorbonne mitgeteilte Gedanken über den Kometen, der im Monat Dezember 1680 erschienen ist*. Directmedia Publishing GmbH, Berlin, 2004.

[6] George Berkeley. *Schriften über die Grundlagen der Mathematik und Physik*. Eingeleitet und übersetzt von Wolfgang Breidert. suhrkamp taschenbuch wissenschaft 496. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1985.

[7] George Berkeley. *Versuch über eine neue Theorie des Sehens und Die Theorie des Sehens oder der visuellen Sprache ... verteidigt und erklärt*. Übersetzt und herausgegeben von Wolfgang Breidert unter Mitwirkung von Horst Zehe. Philosophische Bibliothek, Band 399. Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1987.

[8] Bernard Bolzano. *Paradoxien des Unendlichen*. Herausgegeben aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers von Dr. Fr. Přihonsky. Der philosophischen Bibliothek Band 99. Verlag von Felix Meiner (Bei C. H. Reclam sen., Leipzig, 1851), Leipzig, 1920.

[9] Jorge Luis Borges. *Geschichte der Ewigkeit. Essays*. Aus dem Spanischen übertragen von von Karl August Horst. Carl Hanser Verlag, München, 1965.

[10] Jorge Luis Borges. *Ausgewählte Essays*. Aus dem Spanischen von Karl August Horst, Gisbert Haefs und Curt Meyer-Clason. Band 790 der Bibliothek Suhrkamp. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1982.

[11] Giordano Bruno. *Von der Ursache, dem Prinzip und dem Einen*. Mit einer Einleitung von Prof. Dr. Georg Mende, Aus dem Italienischen übertragen von Paul Seliger, Durchgesehen von Günther Schmidt. Reclams Universal-Bibliothek Nr. 5113/14. Verlag Philipp Reclam jun., Leipzig, 1955.

[12] Moritz Cantor. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band: Von 1668 – 1758*. Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig · Berlin, zweite Auflage, 1901.

[13] Moritz Cantor. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band: Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr.* Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig · Berlin, vierte Auflage, 1922.

[14] Wilhelm Capelle, Hrsg. *Die Vorsokratiker*. Die Fragmente und Quellenberichte übersetzt und eingeleitet von Wilhelm Capelle. Kröners Taschenausgabe, Band 119. Alfred Kröner Verlag, Stuttgart, 1968.

[15] H. S. M. Coxeter. *Unvergängliche Geometrie.* Ins Deutsche übersetzt von J. J. Burckhardt. Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1963.

[16] Hubert Cremer. *Carmina Mathematica und andere poetische Jugendsünden.* Verlag J. A. Mayer, Aachen, Vierte, um Δ vermehrte, um δ verkürzte Auflage, 1972.

[17] Martin Davis and Reuben Hersh. Nonstandard analysis. *Scientific American*, 226(6):78–86, June 1972.

[18] Luciano De Crescenzo. *Geschichte der griechischen Philosophie. Die Vorsokratiker.* Aus dem Italienischen von Linde Birk. Diogenes-Taschenbuch, 21912. Diogenes Verlag A G, Zürich, 1985.

[19] Hermann Diels. *Die Fragmente der Vorsokratiker. Griechisch und Deutsch, 2 Bde.* Weidmannsche Buchhandlung, Berlin, 4. Auflage, 1922.

[20] Albert Einstein. *Mein Weltbild.* Herausgegeben von Carl Seelig, Neue, vom Verfasser durchgesehene und wesentlich erweiterte Auflage. Ullstein Buch Nr. 65. Ullstein GmbH, Frankfurt/M – Berlin – Wien, 1970.

[21] Rudolf Eisler. *Philosophen-Lexikon. Leben, Werke und Lehren der Denker.* Mittler, Berlin, 1912.

[22] Friedrich Engels. *Herrn Eugen Dührings Umwälzung der Wissenschaft (≪Anti–Dühring≫).* Dietz Verlag, Berlin, 1960.

[23] Reinhard Finster und Gerd van den Heuvel. *Gottfried Wilhelm Leibniz in Selbstzeugnissen und Bilddokumenten.* rowohlts monographien 50481. Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbek bei Hamburg, 5. Auflage Januar 2005.

[24] E. Fredkin. Five big questions with pretty simple answers. *IBM Journal on Research & Development*, 48(1):31–45, January 2004.

[25] Galileo Galilei. *Sidereus Nuncius. Nachricht von neuen Sternen. Dialog über die Weltsysteme (Auswahl). Vermessung der Hölle Dantes. Marginalien zu Tasso.* Herausgegeben und eingeleitet von Hans Blumenberg. sammlung insel 1. Insel-Verlag, Frankfurt am Main, 1965.

[26] Henning Genz. *Die Entdeckung des Nichts. Leere und Fülle im Universum.* Hanser, München, 1994.

[27] Henning Genz. *Nichts als das Nichts. Die Physik des Vakuums.* Erlebnis Wissenschaft. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2004.

[28] Carl-Friedrich Geyer. *Die Vorsokratiker. Eine Einführung.* Große Denker. Junius Verlag GmbH, Hamburg, 1995.

[29] Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principica Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38:173–198, 1931.

[30] Walter Goldschmidt. The brideprice of the Sebei. *Scientific American*, 229(1):74–85, July 1973.

[31] *Grundlagen der marxistischen Philosophie. I. Der dialektische Materialismus.* Dietz Verlag, Berlin, 1959.

[32] Georg Friedrich Wilhelm Hegel. *Werke in 20 Bänden. Auf der Grundlage der Werke von 1832–1845 neu edierte Ausgabe*. Redaktion Eva Moldenhauer und Karl Markus Michel. Theorie-Werkausgabe. Suhrkamp, Frankfurt am Main, 1979.

[33] Georg Wilhelm Friedrich Hegel. *Das Sein (1812)*. Neu herausgegeben von Hans-Jürgen Gawoll. Mit einer Einleitung von Friedrich Hogemann und Walter Jaeschke. Philosophische Bibliothek, Bd. 375. Felix Meiner Verlag, Hamburg, 2., verbesserte Auflage, 1999.

[34] David Hilbert. Über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, 95:161–190, 1926.

[35] David Hilbert and Paul Bernays. *Grundlagen der Mathematik, Teil 1 und 2*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 40 und 50. Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1968.

[36] Thomas Hobbes. *Grundzüge der Philosophie. Erster Teil: Lehre vom Körper*. Übersetzt von Max Frischeisen-Köhler. Philosophische Bibliothek, Bd. 157. Felix Meiner, Leipzig, 1949.

[37] Georges Ifrah. *Die Zahlen. Die Geschichte einer großen Erfindung*. Aus dem Französischen von Peter Wanner. Campus-Verlag, Frankfurt, New York, 1992.

[38] Achim Ilchmann. Kritik der Übergänge zu den ersten Kategorien in Hegels Wissenschaft der Logik. *Hegel-Studien*, 27:11–25, 1992.

[39] Vojtěch Jarník. *Bolzano and the Foundations of Mathematical Analysis. On the Occasion of the Bicentennial of Bernhard Bolzano*. Society of Czechoslovak Mathematicians and Physicists, Prague, 1981.

[40] Karl Jaspers. *Vom Ursprung und Ziel der Geschichte*. R. Piper & Co. Verlag, München, 1949.

[41] Konrad Knopp. *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Band 11. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 4. Auflage, 1947.

[42] Arnošt Kolman. *Bernard Bolzano. Mit einem Anhang Bernard Bolzano: Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine Wurzel der Gleichung liege*. Übersetzung aus dem Russischen A. Händel und G. Höpfner. Akademie-Verlag, Berlin, 1963.

[43] Fritz A. Krafft. Otto von Guerickes Entdeckung der Unbegrenztheit des Weltraums. In Gudrun Wolfschmidt, Hrsg., *„Es gibt für Könige keinen besonderen Weg zur Geometrie. Festschrift für Karin Reich*, Algorismus. Studien zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften, Heft 60, S. 289–298, Augsburg, 2007. Dr. Erwin Rauner Verlag.

[44] Walther Kranz, Hrsg. *Hermann Diels, Die Fragmente der Vorsokratiker, griechisch und deutsch, Bd. 1: [1-58]*. Weidmann, Berlin, 18. Auflage - Unveränderter Nachdruck der 6. Auflage, 1951.

[45] Walther Kranz, Hrsg. *Hermann Diels, Die Fragmente der Vorsokratiker, griechisch und deutsch, Bd. 2: [59 - 90]*. Weidmann, Berlin, 17. Auflage - Unveränderter Nachdruck der 6. Auflage, 1952.

[46] Walther Kranz, Hrsg. *Hermann Diels, Die Fragmente der Vorsokratiker, griechisch und deutsch, Bd. 3: Register.* Weidmann, Berlin, 7. Nachdruck der 6. verbesserten Auflage, 1952.

[47] Laotse. *Tao Te King. Das Buch des Alten vom Sinn und Leben.* Aus dem Chinesischen verdeutscht und erläutert von Richard Wilhelm. Eugen Diederichs Verlag, Düsseldorf - Köln, 1976.

[48] John Lechte. *Key Contemporary Concepts. From Abjection to Zeno's Paradox.* SAGE Publications, London • Thousand Oaks • New Delhi, 2003.

[49] Gottfried Wilhelm Leibniz. *Monadologie. Französisch und deutsch.* Zeitgenössische Übersetzung von Heinrich Köhler. Mit der »Lebens-Beschreibung des Herrn von Leibniz verfaßt von dem Herrn Fontenelle«. Herausgegeben von Dietmar Till. insel taschenbuch 1832. Insel Verlag, Frankfurt am Main und Leipzig, 1996.

[50] Stanisław Lem. *Die vollkommene Leere.* Autorisierte Übersetzung aus dem Polnischen von Klaus Staemmler. Insel Verlag, Frankfurt am Main, 1973.

[51] Stanisław Lem, Hrsg. *Ist Gott ein Taoist? und andere Rätsel. Ein phantastisches Lesebuch.* Phantastische Bibliothek, Band 162, suhrkamp taschenbuch 1214. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1988.

[52] Dietrich Mahnke. *Unendliche Sphäre und Allmittelpunkt. Beiträge zur Genealogie der mathematischen Mystik.* Deutsche Vierteljahrsschrift für Literaturwissenschaft und Geistesgeschichte, Buchreihe, 23. Band. Max Niemeyer Verlag, Halle/Saale, 1937.

[53] Karl Marx. *Mathematische Manuskripte.* Herausgegeben, eingeleitet und kommentiert von Wolfgang Endemann. Scriptor–Taschenbücher Sozialwissenschaften; S 10: Beiträge zur Theorie der Gesellschaft. Scriptor–Verlag, Kronberg, Ts., 1974.

[54] William I. McLaughlin. Eine Lösung für Zenons Paradoxien. *Spektrum der Wissenschaft*, S. 66–71, Januar 1995.

[55] Herbert Meschkowski, Hrsg. *Grundlagen der modernen Mathematik.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1975.

[56] Herbert Meschkowski. *Wandlungen mathematischen Denkens. Eine Einführung in die Grundlagenprobleme der Mathematik.* R. Piper, München, Zürich, 5. Auflage, 1985.

[57] Karl von Meyenn, Hrsg. *Lust an der Erkenntnis. Triumph und Krise der Mechanik. Ein Lesebuch zur Geschichte der Physik.* Serie Piper, 1146. R. Piper Verlag, München, Zürich, Februar 1990.

[58] Jaques Monod. *Zufall und Notwendigkeit. Philosphische Fragen der modernen Biologie.* Deutsch von Friedrich Giese, Vorrede zur deutschen Ausgabe von Manfred Eigen. Deutscher Taschenbuch Verlag, München, 1975.

[59] Ernest Nagel and James E. Newman. *Der Gödelsche Beweis. Deutsche Übersetzung Hubert Schleichert.* Scientia Nova. R. Oldenbourg Verlag, München, 4., unveränderte Auflage, 1987.

[60] Platon. *Sämtliche Werke.* Lambert Schneider, Berlin, 1940.

[61] Wolfgang H. Pleger. *Die Vorsokratiker.* Sammlung Metzler, Band 265. J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 1991.

[62] Karl R. Popper. *Die Welt des Parmenides. Der Ursprung des europäischen Denkens.* Serie Piper 4071. Piper Verlag, München, 2. Auflage, 2006.

[63] Georges Poulet. *Metamorphosen des Kreises in der Dichtung.* Ullstein Materialien 35214. Verlag Ullstein GmbH, Frankfurt/M – Berlin – Wien, 1985.

[64] William Poundstone. *Im Labyrinth des Denkens. Wenn Logik nicht weiterkommt. Paradoxien, Zwickmühlen und die Hinfälligkeit unseres Denkens.* Aus dem Amerikanischen von Peter Weber-Schäfer. rororo Sachbuch, 9745. Rowohlt, Reinbek bei Hamburg, 1995.

[65] Carl Prantl. *Geschichte der Logik im Abendlande, Bd. 1 – 4.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1955.

[66] François Rabelais. *Gargantua und Pantagruel. Vollständige Ausgabe in zwei Bänden.* Aus dem Französischen übertragen von Walter Widmer und Karl-August Horst und mit Anmerkungen von Walter Widmer und Karl-August Horst. Mit einem Nachwort und einem biographischen Abriß von Karl-August Horst und sämtlichen 682 Illustrationen von Gustave Doré. Winkler-Verlag, München, 1968.

[67] Christof Rapp. *Vorsokratiker*, *Beck'sche Reihe Denker, Band 539.* Verlag C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München, 1997.

[68] Jürgen Renn. *Auf den Schultern von Riesen und Zwergen. Einsteins unvollendete Revolution.* WILEY–VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2006.

[69] Jean-Jacques Rousseau. *Emil oder Ueber die Erziehung.* Übersetzung nach Hermann Denhardt. Directmedia Publishing GmbH, Berlin, 2004.

[70] Bertrand Russell. *The Principles of Mathematics.* George Allen & Unwin ltd, London, 2. repr. edition, 1950.

[71] Bertrand Russell. *Probleme der Philosophie.* Aus dem Englischen übersetzt und mit einem Nachwort versehen von Eberhard Bubser. edition suhrkamp 207. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1967.

[72] R. M. Sainsbury. *Paradoxien.* Reclams Universal–Bibliothek Nr. 8881. Philipp Reclam jun., Stuttgart, 1993.

[73] Denise Schmandt-Besserat. The earliest precursor of writing. *Scientific American*, 238(6):38–47, June 1978.

[74] Alexander Alexandrowitsch Sinowjew. *Logik und Sprache der Physik.* Akademie-Verlag, Berlin, 1975.

[75] Lee Smolin. Quanten der Raumzeit. *Spektrum der Wissenschaft*, S. 54–63, März 2004.

[76] István Szabó. *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen.* Herausgegeben von Peter Zimmermann und Emil A. Fellmann. Wissenschaft und Kultur, Band 32. Birkhäuser Verlag, Basel · Boston · Berlin, Korrigierter Nachdruck der Dritten, korrigierten und erweiterten Auflage, 1996.

[77] James Thomson. Tasks and super–tasks. *Analysis*, XV:1–13, 1954.

[78] W. Gottfried Voigt. *W. Gottfried Voigts physicalischer Zeit-Vertreiber. [in welchem] Fragen aus dem Buch der Natur beantwortet / auch allerhand neue und rare Curiositäten angeführet / die Geheimnisse der Natur entdecket / die Ursachen / vieler Dinge erklähret / die Wahrheit befestiget / und die Irrthümer kräfftig widerleget werden.* In Verlegung Johann Adam Plen[?] Gedruckt bey Johann Heinrich Richtern, Leipzig, 1694.

[79] Carl Friedrich von Weizsäcker. Parmenides und die Graugans. In [81], S. 441–465 beziehungsweise [82], S. 16–45.

[80] Carl Friedrich von Weizsäcker. Parmenides und die Qantentheorie. In [81], S. 466–491 beziehungsweise [82], S. 46–75.

[81] Carl Friedrich von Weizsäcker. *Die Einheit der Natur.* Carl Hanser Verlag, München/Wien, 1971.

[82] Carl Friedrich von Weizsäcker. *Ein Blick auf Platon. Ideenlehre, Logik und Physik.* Universal–Bibliothek Nr. 7731. Philipp Reclam jun., Stuttgart, 1996.

[83] Hermann Weyl. *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft.* Scientia Nova. R. Oldenbourg Verlag, München, 6. Auflage, 1990.

[84] Th. Wolff. *Der Wettlauf mit der Schildkröte. Gelöste und ungelöste Probleme.* August Scherl G. m. b. H., Berlin S W, 1929.

[85] Christian Freiherr von Wolff. *Vollständiges mathematisches Lexicon, Darinnen alle Kunst–Wörter und Sachen, Welche In der erwegenden und ausübenden Mathesi vorzukommen pflegen, deutlich erkläret; Überall aber Zur Historie der Mathematischen Wissenschafften dienliche Nachrichten eingestreuet, Und die besten und auserlesensten Schrifften, welche iede Materie gründlich abgehandelt, angeführet: Ferner auch Die Mund– und Redens–Arten derer Markscheider auch hieher gehöriger Künstler und Handwercker beschrieben; Und endlich alles zum Nutzen so wohl gelehrter als ungelehrter Liebhaber der vortrefflichen Mathematick eingerichtet worden. Nebst XXXVI Kupffer–Tabellen.* Bey Joh. Friedrich Gelditschens sel. Sohn, Leipzig, 1734.

[86] Stephen Wolfram. *A New Kind of Science.* Wolfram Media, Champaign, IL., 2002.