Peter Gallin (Prof. Dr.), Universität Zürich, Institut für Gymnasial- und Berufspädgogik

Mathematik als Geisteswissenschaft oder Der Mathematikschädigung dialogisch vorbeugen

Zusammenfassung

Die Mathematik ist eine Geisteswissenschaft im doppelten Sinn. Zum einen grenzt sie sich als Wissenschaft durch diese Bezeichnung von der Naturwissenschaft ab, zum anderen wird sie hier in der Rolle eines Unterrichtsfachs als „didaktische“ Geisteswissenschaft verstanden, bei der es wesentlich um die geistige Entwicklung der Schülerinnen und Schüler im Fachbereich Mathematik geht. Wie bei der körperlichen Entwicklung muss auch bei der geistigen Entwicklung beachtet werden, dass bei einem gegebenen Entwicklungsstand nicht alles jugendfrei ist, was die Didaktik anzubieten vermag. Ziel ist es also, die geistige Reifung zu fördern, ohne eine Schädigung zu bewirken. Eine bewährte Strategie dazu ist, dass die Lehrkraft den Lernenden mehr zutraut. Fehlendes Zutrauen in der traditionellen Didaktik äussert sich exemplarisch in vier Bereichen: Bei der Wissensvermittlung, beim Einsatz von Algorithmen, bei der Herstellung von Aufgaben und beim Einsatz von modernen Veranschaulichungsmitteln wie dreidimensionalen Modellen, computergestützten Animationen, interaktiven Wandtafeln usw. Das Dialogische Lernen, bei dem (im Mathematikunterricht) das Verstehen im Zentrum steht, gibt einen Rahmen, in welchem grösseres Zutrauen gegenüber den Lernenden realisiert werden und sich damit das Potential der geistigen Entwicklungsmöglichkeiten entfalten kann.

Ursprünglich wollte ich Architekt werden getreu den Vorbildern von Vater und Grossvater. Darum zeichnete ich bereits als neunjähriges Kind Pläne von Häusern in der Art, wie ich sie oft zu sehen bekam. Ein ausgemustertes Holzdreieck mit einem rechten und zwei halben rechten Winkeln war das einzige Konstruktionswerkzeug, das ich damals besass und mit dem ich mich ans Werk machte. Zuerst einmal war da natürlich ein Rechteck als Grundriss des Hauses zu zeichnen: Eine Seite, ein rechter Winkel, die zweite Seite, wieder ein rechter Winkel, die dritte Seite in gleicher Länge wie die erste und dann der dritte rechte Winkel, dessen letzter Schenkel die vierte Seite gab. Aber o weh: Der vierte Winkel war kein rechter und auch waren die Längen der zweiten und vierten Seite nicht gleich. Ich scheiterte bereits beim Zeichnen meines Rechtecks und taufte sogleich mein „krummes Haus“ romanisierend mit dem Fantasienamen „Chesa Krümlas“ (Abb. 1). Meine Erwartung, dass ein Viereck mit drei rechten Winkeln zwingend einen vierten Rechten haben müsste, wurde durch die Realität meiner ungelenken Konstruktionen arg enttäuscht. Und die Belehrungen meiner älteren Schwestern über den Einsatz einer sogenannten Reissschiene und das zuverlässige Parallelverschieben wollte ich in meiner Ungeduld gar nicht hören. Mein Tischchen war so oder so viel zu klein für das grosse Instrument, das zudem nur im Büro meines Vaters zugänglich gewesen wäre.

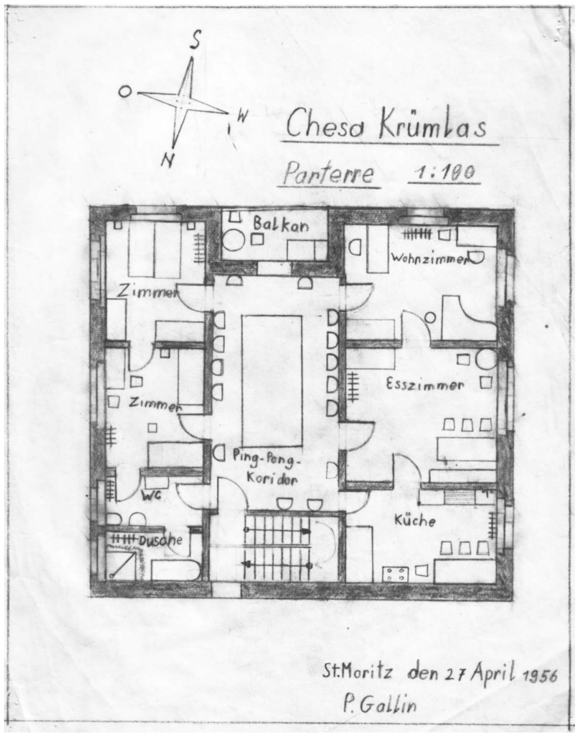

Abb. 1: Erste Versuche beim Zeichnen eines Grundrisses

Erst im Geometrieunterricht des Gymnasiums begann ich zu begreifen, dass zwischen der Realität und der mathematischen Idealisierung immer ein Graben bestehen bleibt, wie sehr man sich auch um Präzision bemüht. Die von Euklid stammenden Ideen von den ausdehnungslosen Punkten und den nur in einer Richtung ausgedehnten, aber unendlich dünnen Geraden kombiniert mit der eindeutig festgelegten Parallelen brachten mich dazu, den Berufswunsch zu wandeln vom Architekten, der sich mit der Realität herumschlagen muss, zum Mathematiker, der sich mit perfekt Stimmigem befassen kann. So glaubte ich, dass die Mathematik ihren einzigen Sinn darin findet, die Realität mit Idealisierungen zu beschreiben, und dass demzufolge Untersuchungen in den Idealisierungen eine bequeme Art des Studiums der Natur sein müssten. Mit Beginn des Physikunterrichts bestätigte sich diese Ansicht, so dass ich kurzerhand Mathematik und Naturwissenschaft gleichsetzte. Wie bin ich doch erschrocken, als mein Mathematiklehrer mit erhobenem Zeigefinger sagte: „Nein, Peter, die Mathematik ist viel eher eine Geisteswissenschaft!“ Vielleicht war es dieser Schreck, der mich dazu brachte, Physik – konsequenterweise natürlich Theoretische Physik – zu studieren.

Im Verlauf des Studiums und in der Assistenzzeit danach stellte sich immer mehr heraus, dass mich der menschliche Geist genauso stark interessierte wie das Funktionieren der Natur. Ganz besonders faszinierte mich die Reaktion des emotional-intellektuellen Menschen auf unerwartete mathematisch-naturwissenschaftliche Phänomene. Dieses Interesse an der Wechselwirkung zwischen dem Innern eines Menschen und dem Äussern eines Problems wies mir deutlich den Weg zum Lehrerberuf. Und weil für mich das gedankliche Durchdringen eines Problems mehr Gewicht erhielt als das geschickte experimentelle Vorgehen, kehrte ich zur Mathematik zurück und begann meine Lehrtätigkeit am Gymnasium in diesem Fach. Gewiss waren zu Beginn noch deutliche Spuren einer physikorientierten Vergangenheit erkennbar, so dass ich – wie viele junge Studienabgänger – dem sogenannten „Alltagsbezug“ der Mathematik eine fast zu grosse Bedeutung zugemessen hatte. Erst im Kontakt mit den realen Menschen und ihren Nöten beim Lernen und Begreifen von Mathematik im gymnasialen Unterricht wandelte sich mein Bild der Mathematik von der Hilfswissenschaft für die Beherrschung von Natur und

Technik über ihre von allem Äusseren unabhängige, in sich stimmige, abstrakte Wissenschaft der Beziehungen und Muster zu einem Tätigkeitsfeld, in dem Menschen sich selber bis an die Grenze ihrer Leistungsfähigkeit fordern und gerade dadurch aber auch bestätigen können. Descartes berühmtes Zitat „cogito, ergo sum“ wurde für mich zum pädagogischen Leitsatz für den Mathematikunterricht, indem ich ihn umdeutete in „Ich treibe Mathematik, also spüre ich mich selbst“[1]. Erst mit diesem Bild der Mathematik als Herausforderung für den menschlichen Geist konnte ich einsehen und begründen, weshalb das Fach Mathematik eine so wichtige Stellung im Kanon der Schulfächer erhalten hat: Im Zentrum steht ein in den Präambeln der Lehrpläne nur implizit erwähnter Bildungs- und Erziehungsauftrag.

Es geht – etwas nüchterner gesprochen – um den Aufbau einer umfassenden Handlungskompetenz, wie sie von Franz E. Weinert (Weinert 2001, S. 51) definiert worden ist: Die Handlungskompetenz umfasst die notwendigen und entwicklungsfähigen Voraussetzungen, die es einer Person ermöglichen, in einem spezifischen Handlungsfeld (Fachgebiet, Beruf) erfolgreich zu agieren (Ruf 2008, S. 246). Das Entscheidende an diesem Begriff ist nun, dass die Handlungskompetenz drei notwendige Aspekte aufweist. Im Zentrum steht der fachliche Aspekt mit dem zugehörigen Wissen und Können. Dieser Aspekt ist es denn auch, der in den heute verbreiteten Tests (wie z.B. PISA) untersucht werden kann. Der fachliche Aspekt ist aber eingebettet in den sozialen Aspekt der Handlungskompetenz, wo die Fähigkeiten zum Perspektivenwechsel, zur Kooperation, zur Wertschätzung, zum Dialog genannt werden. Schliesslich werden die beiden Aspekte noch im dritten eingebettet, dem personalen Aspekt der Handlungskompetenz, wo es um die Fähigkeit zur Reflexion, die Motivation, den Willen, das Selbstkonzept, das Wertekonzept und um die Sinnfrage geht. Erst im erfolgreichen Zusammenspiel aller drei Aspekte kann von einer erreichten Handlungskompetenz gesprochen werden. Dass der zweite und dritte Aspekt nicht mit Tests erhoben werden kann, ist unbestritten. Sie sind es denn, welche in der Schule nur durch eine begleitende Lehrperson erkannt und gefördert werden können.

Vor dem Hintergrund meiner persönlichen Unterrichtserfahrung und dem erziehungswissenschaftlichen Begriff der Handlungskompetenz wurde die Mathematik für mich zu einer Wissenschaft, die sich um die Entwicklung des menschlichen Geistes dreht, zu einer Geisteswissenschaft. Da mich hier die Mathematik als Schulfach und ihre didaktischen Aspekte interessieren, werde ich mich keinesfalls in den theoretischen Disput über die Stellung der Mathematik als universitäre Wissenschaft einmischen[2]. Tatsächlich wird kontrovers diskutiert, ob man die Mathematik als Geisteswissenschaft auffassen darf, aber man findet praktisch keine Diskussion über ihre Stellung in der Schule. Meine Erfahrung als Mathematiklehrer hat im Laufe der Jahre gezeigt, dass der Mathematikunterricht davon profitiert, wenn man die Mathematik aus pragmatischen Gründen als nahezu reine Geisteswissenschaft auffasst. Der Unterricht wird dadurch nämlich nicht nur entschlackt und vereinfacht, sondern kommt auch näher an die Lernenden heran. Hans Freudenthal hat dazu in seinem Artikel „Mathematik – eine Geisteshaltung“ (Freudenthal 1982) geschrieben: „Immer gilt: Der Schüler erwirbt Mathematik als Geistesverfassung nur über Vertrauen auf seine eigenen Erfahrungen und seinen eigenen Verstand.“

---

[1] „Vom Sinn des Mathematikunterrichts“ heisst ein Artikel, den ich früher zu diesem Thema geschrieben habe (Gallin 2002).

[2] In seinem Vortrag „Mathematik als Kulturleistung“ vom 28. November 2008 zeigt Christoph Schweigert ausführlich, weshalb die Mathematik eine Geisteswissenschaft ist. Download-Links (27. März 2010):
www.math.uni-hamburg.de/home/schweigert/2008.geist.pdf
www.math.uni-hamburg.de/home/schweigert/transp.html

Es besteht die Gefahr, dass durch die Charakterisierung der Mathematik als Geisteswissenschaft ein Missverständnis aufkommt. Es ist nicht gemeint, dass im Mathematikunterricht der menschliche Geist hinlänglich intensiv trainiert werden soll, damit er in der Lage ist, schnell und fehlerfrei zu funktionieren und so die gestellten, abstrakten Aufgaben mit gelernten Rezepten zu lösen. Vielmehr ist das Durchschauen und Verstehen von Zusammenhängen das Ziel der Bemühungen, so dass das effiziente Lösen von Aufgaben gleichsam zu einem willkommenen Nebeneffekt abgestuft wird. Damit wird die zentrale Bedeutung des handelnden Menschen als ganzem deutlich: Sobald Einsicht und Verstehen ins Spiel kommen, reicht es nicht mehr aus, beim lernenden Menschen nur die fachlichen Kompetenzen zu fördern, sondern man muss sich – gemäss Weinert – auch um seine motivationalen und emotionalen Grundlagen kümmern.

Welche konkreten Konsequenzen ergeben sich daraus für die Gestaltung des Unterrichts? Der Philosoph Hans-Georg Gadamer, der sich zentral mit der Frage des Verstehens auseinandergesetzt hat, gibt eine erste Anweisung (Gadamer 1959): „Das erste, womit das Verstehen beginnt, ist, dass etwas uns anspricht: Das ist die oberste aller hermeneutischen Bedingungen“. Darin kommt zum Ausdruck, dass am Anfang der motivationale Aspekt von jedem Fachwissen steht. Der Physiker Martin Wagenschein geht in seinem Ratschlag noch einen Schritt weiter und betont neben dem motivationalen auch den sozialen Aspekt (Wagenschein 1986): „Das wirkliche Verstehen bringt uns das Gespräch. Ausgehend und angeregt von etwas Rätselhaftem, auf der Suche nach dem Grund.“ Zwar steht auch bei ihm am Anfang genauso die Betroffenheit einer Person, aber sie soll ergänzt werden durch den Austausch mit anderen Personen, welche sich zum gleichen „Rätsel“ Gedanken gemacht haben.

So einleuchtend und einfach diese Einsichten und Empfehlungen sind, so regelmässig und konsequent werden sie in der traditionellen Didaktik missachtet, und dies nicht etwa aus Unachtsamkeit im täglichen Unterricht, sondern primär schon in den wohldurchdachten Lehrbüchern und Unterrichtskonzepten. Es geht also nicht bloss nur um Nuancen im Lerntempo, sondern es steht die geistige Entwicklung unserer Schülerinnen und Schüler auf dem Spiel, indem ihnen von den Grundanlagen her die Möglichkeit des Verstehens systematisch geboten wird oder eben nicht. Selbstverständlich haben die Begabteren unter ihnen sich schon immer die Freiheit genommen, die Lernstoffe für sich selber zu problematisieren, zu durchdringen, zu diskutieren und so zu einem echten Verstehen vorzustossen. Die Schwächeren allerdings werden in der traditionellen Didaktik dazu verführt, sich mit oberflächlicher Imitation von fachlichen Handlungen zu begnügen. Und weil sich die Lehrperson auch auf die schwächeren Schülerinnen und Schüler konzentrieren muss, hat sich das verhängnisvolle Paradigma herausgebildet, dass gerade jene Schülerinnen und Schüler einfach zu handhabende Rezepte benötigen, um wenigstens die minimalen (fachlichen) Kompetenzen zu erreichen. Es bildet sich ein Teufelskreis: Auf die Mühen, welche die Lernenden beim Übernehmen der mathematischen Verfahren bekunden, reagieren die Lehrenden – unterstützt von Lehrbüchern und Lehrmitteln – mit einer immer ausgeklügelteren und raffinierter gegliederten Stoffvermittlung in der Meinung, dass sehr einfache und kleine Schritte doch für alle verstehbar sein müssten. Genau das ist aber eine Täuschung, denn durch die vielen kleinen Schritte, durch die sogenannte Segmentierung (Gallin & Ruf 1990, S. 36 ff.), werden die Lernenden nur noch mehr vom eigentlichen Thema entfernt, weil der Durch- und Überblick erschwert und ihre Person gar nicht erst angesprochen wird. Die notwendige Bedingung für ein Verstehen wird nicht gegeben. Die Lernenden geraten in vollständige Abhängigkeit von vorgegebenen Erklärungsschemata.

Ein Teufelskreis kann nur mit einem Befreiungsschlag aufgebrochen werden. Das bedeutet, dass viele Selbstverständlichkeiten der tradierten Didaktik hinterfragt und vielleicht sogar eliminiert werden müssen. Könnte es sein, dass unser didaktisches Bemühen einen schädlichen Einfluss auf die geistige Entwicklung unserer Kinder hat, dass es die sogenannte Mathematikschädigung verursacht? Freudenthal sagt im erwähnten Artikel (Freudenthal 1982): „Ja, vielleicht hat das nutzlose Mathematiklernen noch Schaden verursacht.“ Worauf müssten wir also achten? Zur Beantwortung solcher Fragen möchte ich aus dem Konzept des „Dialogischen Lernens“, welches ein umfassendes pädagogisches Angebot macht (Ruf & Gallin 2005), die hier relevanten Aspekte herausgreifen und pointiert auf den Mathematikunterricht bezogen darstellen.

Zutrauen

Das Hauptproblem der traditionellen Mathematikdidaktik ist, dass die Lehrpersonen in der Regel den Lernenden zu wenig zutrauen. Dies geschieht nicht etwa böswillig, sondern aus dem Bestreben heraus, den Lernenden das Beste zu geben. In vier Bereichen ist dies besonders deutlich zu erkennen: Es herrscht die Meinung vor,
• dass das gesamte Fachwissen in von langer Hand geplanter Wissensvermittlung schön segmentiert dargeboten werden soll,
• dass untadelige Algorithmen für fehlerfreies Funktionieren instruiert werden sollen,
• dass perfekte Übungsaufgaben auszuarbeiten sind und
• dass nur allerbeste Veranschaulichungen bereitgestellt werden müssen.
Fehlendes Zutrauen äussert sich in diesen vier Bereichen konkret folgendermassen:

1. Die Trennung zwischen Wissensvermitteln und Üben geschieht meist so, dass die Theorie im eigentlichen Klassenunterricht präsentiert wird und die Übungen als Hausaufgaben erteilt werden. Wenn aber als Hausaufgaben anstelle von gewöhnlichen Übungen über entsprechend gestellte Aufträge einfache, aber echte Fachprobleme und Forschungsfragen aufgegeben werden, kann sich diese traditionelle Aufteilung durchaus ändern. Entscheidend ist, dass sich die Lernenden mit den zentralen Fragestellungen hinreichend lange auseinandersetzen können und müssen. Ob dies nun zu Hause oder in der Schule geschieht, ist nebensächlich. Als Beispiel dafür mag das Potenzrechnen mit allgemeinen Exponenten herangezogen werden. Normalerweise kennen die Schülerinnen und Schüler bereits aus dem 7. oder 8. Schuljahr das Rechnen mit natürlichen Exponenten. In einem späteren Zeitpunkt sollten sie nun auch negative und gebrochene Exponenten, ja sogar irrationale Exponenten kennenlernen. Schaut man sich die Lehrbücher an, so könnte man glauben, dass die Lehrkraft die Definitionen für diese Verallgemeinerungen in der Stunde besprechen und dann mit einigen Übungen festigen sollte. Dazu bieten die Lehrbücher in der Regel viel Material an, zuerst zum Rechnen mit ganzzahligen Exponenten, dann zum Rechnen mit gebrochenen Exponenten und auch mit irrationalen Exponenten. Zum Schluss stellt man dann die vermischten Aufgaben. Die Erfahrung zeigt aber, dass auch nach mehrwöchiger Vorbereitung beim Übergang zu den vermischten Aufgaben erhebliche Schwierigkeiten auftauchen, ja man sogar den Eindruck gewinnt, als hätte man die einzelnen Teilgebiete gar nicht behandelt. Diese Erfahrung hat mich dazu gebracht, ganz anders in das Thema einzusteigen und den Lernenden gleich zu Beginn den zentralen Auftrag mit folgendem Inhalt zu stellen: Wie muss man die uns noch unbekannte Zahl 2^{-3} einerseits und die Zahl $2^{1/3}$ andererseits definieren, wenn wir die Annahme treffen, dass die schon längst bekannten Potenzgesetze, insbesondere $2^a \cdot 2^b = 2^{a+b}$ und $(2^a)^b = 2^{a \cdot b}$ weiterhin gültig bleiben sollen? Es zeigt sich, dass die

Lernenden durchaus in der Lage sind, sich mit solchen „Forschungsfragen" auseinanderzusetzen und auch Antworten finden. Man kann ihnen also wesentlich mehr zutrauen, als dies üblicherweise der Fall ist. In diesem Auftrag kommt auch zum Ausdruck, wie die Segmentierung in zuerst negative und dann gebrochene Exponenten unnötig ist. Kurz gesagt: Man beginnt gleich mit „vermischten Aufgaben", anstatt viel Zeit in die Teile zu investieren.

2. Eine schon etwas subtilere, weil verstecktere und unbewusste Art von fehlendem Zutrauen wird durch die in der Mathematik übliche Weise der Darstellung von Ergebnissen suggeriert. Definitionen und Sätze beherrschen die mathematische Literatur. Das verleitet die Lehrpersonen dazu, auch den Schülerinnen und Schülern hieb- und stichfeste Definitionen und Algorithmen für bestimmte Probleme zu liefern: Beispielsweise die Bruchdivisionsregel „man dividiert durch einen Bruch, indem man..." oder die Äquivalenz „$\log_a(b) = c \Leftrightarrow a^c = b$", mit der man den Logarithmus definiert, oder auch das Gausssche Eliminationsverfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme. Zur ersten Regel sei hier der Hinweis erlaubt, dass es im Prinzip genügt, die Kernidee „geteilt durch einhalb gibt mehr" und eine zugehörige Geschichte zu kennen (Ruf & Gallin 2005, Band 2, S. 25). Ebenso kurz sei hier der Hinweis auf den von den Schülerinnen und Schülern normalerweise wenig geliebten Logarithmus: „Der Logarithmus zur Basis *a* von *b* ist diejenige Zahl, die man auf *a* setzen muss, um *b* zu erhalten." Mit diesem – zugegebenermassen sehr salopp formulierten – Sätzlein werden die Lernenden in die Lage versetzt, sich etwas Konkretes unter einem Logarithmus vorzustellen und sogar selbstständig die Logarithmengesetze (insbesondere auch die wenig beachteten „Wegfressgesetze" $\log_a(a^b) = b$ und $a^{\log_a(b)} = b$) und andere Formalisierungen zu finden. Bei den linearen Gleichungssystemen will ich etwas ausführlicher werden. Normalerweise werden lineare Gleichungen mit einer einzigen Variablen (Unbekannten) eingeführt. Auch die zugehörigen Textaufgaben sollten mit einer Unbekannten bewältigt werden. Nun zeigt sich, dass es gerade dabei oft viel natürlicher wäre, gleich zu Beginn mit zwei oder mehr Unbekannten zu arbeiten. Das nachfolgende Beispiel stammt aus „Algebra 1" (Deller u.a. 2000, Aufgabe 131, S. 67) und sollte mit einer einzigen Variablen gelöst werden: „Peter holt Rotwein, Weisswein und Mineralwasser aus dem Keller. Er nimmt gleich viele Weinflaschen wie Mineralwasserflaschen und doppelt so viel Weissweinflaschen wie Rotweinflaschen, insgesamt 30 Flaschen. Wie viele Flaschen jeder Sorte sind es?" Hier liegt es doch nahe, die Variablen r, w und m zu deklarieren als die Anzahlen der entsprechenden Flaschen, und dann die drei Gleichungen für die drei Unbekannten aufzustellen. Den Lernenden bereitet das nachfolgende Eliminieren mit dem Einsetzungsverfahren keine Schwierigkeiten, ja sie finden es sogar selbst. Wie viel schwieriger ist es doch, diese Aufgabe mit einer einzigen Variablen (z. B. x = Anzahl Rotweinflaschen) direkt in eine Gleichung umzusetzen! Die Gleichung $x + 2x + (x + 2x) = 30$ kann nur dann so leicht hingeschrieben werden, wenn man auf die gute Idee kommt, die Anzahl Rotweinflaschen mit x zu bezeichnen und damit die Anzahlen der anderen Flaschensorten auszudrücken. Kurz: Man muss im Kopf, bevor man etwas schreibt, die Aufgabe schon so gut durchschauen, wie man dies mit drei Variablen erst nach dem Aufstellen der Gleichungen beim schriftlichen Rechnen tun müsste. An diesem Beispiel sieht man, dass es sich erstens nicht lohnt, lange Zeit bei Textaufgaben mit einer Gleichung und einer Unbekannten zu verweilen und zweitens das Eliminationsverfahren bei mehreren Gleichungen schon sehr früh thematisiert werden kann. Damit dies funktioniert, müssen die Lernenden aber nicht einen Algorithmus mit strenger Hinführung zur sogenannten Dreiecksform des Gleichungssystems auswendig lernen, sondern sie sollen eigene Wege beschreiten, die nur durch eine Kernidee der folgenden Art gekennzeichnet sind: „Wenn du drei Gleichungen mit drei Unbekannten hast, dann sieh zu, dass du auf zwei

verschiedene Arten mit dem Additionsverfahren auf zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten kommst.“ Mehr braucht es nicht. Man kann den Lernenden zutrauen, das Verfahren am konkreten Beispiel zu finden. Ja, in einer höheren Klassenstufe könnte sogar der Auftrag gestellt werden, eine Schematisierung zu entwickeln, welche nicht von der jeweiligen günstigen Konstellation der gegebenen Zahlen im Gleichungssystem abhängt. Sogar das Gausssche Verfahren könnte so von den Lernenden gefunden werden.

3. Mathematiklehrerinnen und -lehrer verwenden sehr viel Zeit darauf, Übungs- und Prüfungsaufgaben herzustellen, welche gut zur behandelten Theorie passen, ihrerseits schön gestuft sind vom Einfachen zum Schwierigen und erst noch „schöne Zahlen“ beim Rechenvorgang und beim Ergebnis liefern. (Böse Zungen behaupten sogar, dass die Mathematiklehrpersonen nur deshalb so gut sind, weil sie ständig Aufgaben herstellen.) Dabei wird übersehen, dass den Lernenden ausgerechnet in diesem Bereich viel zugetraut werden kann und sie Erstaunliches, ja Überraschendes erfinden können. Das Herstellen von Aufgaben für Mitschülerinnen und Mitschüler birgt ein enormes Potential an motivationaler Energie. Zum einen ist die erste Phase der eigentlichen Erfindung und Herstellung stark motivierend, wenn das Ziel darin besteht, einerseits eine lösbare und andererseits eine recht schwierige Aufgabe zu generieren. Dann aber ist auch das Lösen der betreffenden Aufgaben besonders attraktiv und spannend, da ja der Autor oder die Autorin persönlich bekannt ist und allenfalls bei unlösbaren oder zu schweren Aufgaben auch direkt angegangen werden kann. Der soziale Aspekt der Handlungskompetenz im Mathematikunterricht kommt so ganz selbstverständlich zum Zug. Mehr dazu kann im zweiten Band „Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik“ (Ruf & Gallin 2005, S. 167 ff.) nachgelesen werden.

4. Die wohl subtilste Form von fehlendem Zutrauen unterläuft uns mit den besten Absichten beim Einsatz von veranschaulichenden Hilfsmitteln, seien dies Modelle, wie sie zum Beispiel aus Plexiglas in den Sammlungen der Fachschaft Mathematik zu finden sind, oder seien dies die modernen, computergestützten Animationen auf Bildschirmen, Projektionswänden und interaktiven Wandtafeln. Gerade bei diesen verführerisch schönen und effizienten Errungenschaften ist besondere Vorsicht geboten, steht doch hier die geistige Entwicklung der Lernenden ganz besonders auf dem Spiel. Beinahe paradox verhält es sich an dieser Stelle mit dem Zutrauen: Einerseits traut man den Lernenden zu, die glatten und makellosen Veranschaulichungen rezeptiv zu verkraften, andererseits traut man ihnen nicht zu, entsprechende Vorstellungen, Zeichnungen ja sogar Modelle produktiv selbst zu entwickeln. Die geistige Entwicklung ist dabei nicht an ein reales Alter gebunden, sondern vielmehr an das Problem selbst. Eine Person ist also gegenüber einer mathematischen Fachfrage oder einem mathematischen Problem zu Beginn immer gleichsam ein Kind. Durch die Beschäftigung mit der Frage oder dem Problem reift die Person langsam, indem sich ihr neue Fragen stellen, ihr mögliche Ansätze in den Sinn kommen und ihr Ideen einfallen. Sie bearbeitet die Sache mehr oder weniger erfolgreich, meist bis zu dem Punkt, wo sie ansteht und in den Austausch mit anderen zu treten wünscht. Dies ist ein Reifeprozess, der nicht abgekürzt werden kann und der für ein Verständnis der Sachlage, wie wir von Gadamer, Wagenschein und Weinert wissen, unerlässlich ist. Ob dabei das erwartete Ziel erreicht wird oder nicht, spielt keine grosse Rolle. Wer also zum Beispiel von einem regulären Dodekaeder spricht und glaubt, dessen Netz den Kindern vorgeben zu müssen, handelt verwerflich, weil er erstens die Herstellung des Netzes den Kindern nicht zutraut und zweitens sie dadurch schädigt, dass er ihre

geistige Entwicklung durch einen Vorgriff abzukürzen versucht[3]. Es geht also – etwas überspitzt formuliert – im Bereich der Veranschaulichungen um einen didaktischen Jugendschutz, der kaum etwas mit dem tatsächlichen Alter der Lernenden, vielmehr aber mit ihrer Stellung relativ zu einem bestimmten Fachproblem zu tun hat. Wie beim körperlichen muss also auch beim geistigen Reifeprozess bei dem, was man einem Heranwachsenden vorführt, Rücksicht auf seinen jeweiligen Entwicklungsstand genommen werden. Trifft eine Veranschaulichung zur Unzeit, das heisst zu früh, auf eine unvorbereitete, unreife Person, so schädigt sie diese. Ist aber der Reifeprozess bis zu einem gewissen Grad abgeschlossen, sind die Veranschaulichungen ein legitimer Genuss.[4] Hier das richtige Mass und den richtigen Zeitpunkt zu finden, ist eine grosse Kunst. Zusammenfassend halten wir fest: Modelle, Veranschaulichungen und Animationen sind schön und gut, jedoch nicht jugendfrei. Beziehen wir die Überlegungen der vorangehenden Abschnitte mit ein, so gilt dieser Hinweis zum Jugendschutz auch für Theorien und Algorithmen, mit denen die Kinder genauso erst nach einer gewissen geistigen Reifezeit konfrontiert werden sollen (Gallin 2002).

Ein Beispiel möge illustrieren, wie nahe sich für die geistige Entwicklung einerseits schädliche und andererseits förderliche Veranschaulichungen kommen können. Man stelle sich vor, von einer gut schälbaren Wurst (z.B. von einer Lyonerwurst) werde eine Tranche schief abgeschnitten und dann geschält. Die Frage stellt sich, wie denn die abgezogene und glattgestrichene Wursthaut aussehe. Damit wird eine ganze Reihe von mathematischen Fragen aufgeworfen bis hin zur Frage nach einem Beweis für die gefundene Form. (Dass diese Fragestellung auch einen ganz realen Anwendungsbezug hat, sei nur am Rande vermerkt: Wenn ein Spengler Blech für zwei zylindrische Rohre zurechtschneiden muss, welche in einem rechten Winkel aufeinander stossen sollen, muss er genau dieses Problem lösen.) Soweit die für die geistige Entwicklung förderliche Anlage. Nun findet sich in einem alten Buch (Steinhaus 1950, S. 198, 199) folgende Bildersequenz zum gleichen mathematischen Inhalt: Eine zylindrische Kerze wird mehrfach mit einem nicht zu breiten Papierstreifen eingewickelt. Dann wird sie im Bereich der umwickelten Stelle schief entzweigeschnitten. Wickelt man dann die eine Hälfte des durchschnittenen Papiers ab, entsteht eine interessante ebene Kurve, welche vom Messer produziert worden ist. Warum ist diese Veranschaulichung eher schädlich als die erste? Neben der Tatsache, dass man Kerzen im Gegensatz zu Würsten normalerweise nicht durchschneidet, wird die Periodizität der interessanten Kurve gleich von Anfang an durch das mehrfache Einwickeln offengelegt. Es bleibt kein Raum für die geistige Konstruktion der Periodizität und Differenzierbarkeit der Kurve. Das Rätsel wird damit zwar wohlmeinend vereinfacht, gleichzeitig aber kann die Entzauberung zu einer Mathematikschädigung beitragen, indem sie von einer eigenen geistigen Tätigkeit abhält und das didaktische Arrangement ganz in den Vordergrund rückt.

Für den regulären Mathematikunterricht gibt es neuerdings einen Ansatz, der explizit die persönliche Vorstellungskraft unserer Schülerinnen und Schüler schult. Die Forschungsarbeiten von Christof Weber befassen sich mit sogenannten „Mathematischen Vorstellungsübungen“. In seinen Büchern und Beiträgen (Weber 2007, 2008, 2009 und

---

[3] Siehe Beispiel am Schluss dieses Artikels.

[4] Es wäre eine Überreaktion, wie beim Bildersturm der Reformation im 16. Jahrhundert Vorstellungshilfen und Veranschaulichungen ganz aus dem Mathematikunterricht zu verbannen.
(Zitat aus Wikipedia, 27. März 2010: Auf Weisung reformatorischer Theologen und der zum neuen Glauben übergetretenen Obrigkeit wurden Gemälde, Skulpturen, Kirchenfenster und andere Bildwerke mit Darstellungen Christi und der Heiligen sowie weiterer Kirchenschmuck, teilweise auch Kirchenorgeln, aus den Kirchen entfernt. http://de.wikipedia.org/wiki/Reformatorischer_Bildersturm)

2010) sind viele Beispiele zu finden, wie einzig durch gedankliches Vorstellen in einem bestimmten mathematischen Sachverhalt erstaunlich tief vorgedrungen werden kann. Mit seiner ganz unprätentiösen Einleitung „Stellt euch einmal vor,..." stösst man im Unterricht auf einfachste Weise das Tor zu einer geistigen Entwicklung der Lernenden auf und zwar auf allen Schulstufen. Das gilt beispielsweise auch für Studierende des Fachs Mathematik, die mittels einer Vorstellungsübung zu den Kugeln von Dandelin in die Lage versetzt werden, im Nachhinein selbstständig ein räumlich ansprechendes Bild der Situation zu skizzieren, ohne je ein entsprechendes reales Modell, das es natürlich gibt, gesehen zu haben. Sobald sie aber die inneren Vorstellungen aufgebaut haben, empfinden sie das reale Modell als wunderbare Bestätigung ihrer Leistung und ihrer Reife. Und sie erinnern sich noch Jahre nach der Vorstellungsübung an das Phänomen der Dandelin-Kugeln. Bereits Platon hat in seinen Werken mehrmals auf das „geistige Auge" (oft auch als „Seelenauge" oder sogar als „Verständnis" übersetzt) hingewiesen, das mehr wert sei als tausend leibliche Augen und mit dem allein die Wahrheit geschaut werden könne (Schleiermacher 1963). Für ihn war die Beschäftigung mit Mathematik nichts anderes als die Schulung dieses Sehens.[5]

Zuhören und Zuwenden

Nachdem nun viel über das in der traditionellen Didaktik fehlende Zutrauen gesprochen worden ist, rücken zwei nachgeschaltete didaktische Bewegungen wie von selbst ins Blickfeld. Damit die Lehrperson in jedem Moment weiss, welchen Reifegrad ihre Schülerinnen und Schüler besitzen, muss sie deren Produkte laufend sichten. Das Kennzeichen des Zutrauens ist es, dass die Lernenden zu Produktionen angehalten werden, die im traditionellen Unterricht nicht für möglich gehalten werden. Umso wichtiger ist es, dass die Lehrperson diese oft unvorhersehbaren Leistungen würdigt, auswertet und wieder in den Unterricht einfliessen lässt. Dieser Vorgang kann mit „Zuhören" umschrieben werden, womit zum Ausdruck kommt, dass sich die primäre Aufgabe der Lehrperson verlagert von der Produktion zur Rezeption, während umgekehrt bei den Lernenden von der Rezeption zur Produktion (Ruf & Gallin 2005, Band 2, S. 10 ff.). Eigentlich ist diese Umkehr längst bekannt: Produzieren ist einfacher als Rezipieren, denn beim Rezipieren sind immer zwei Standpunkte zu bedenken, während beim Produzieren zunächst nur der eigene Standpunkt zählt. Daher sollen die Lernenden mit dem Produzieren beginnen dürfen.[6] Ihre Entwicklung kann aber nur Fortschritte machen, wenn sie erfahren können, dass ihre Produktionen ernst genommen werden und dass sie einen unmittelbaren Einfluss auf das Geschehen im Unterricht haben. Es ist also unumgänglich, dass die Lehrperson alle Arbeiten der Lernenden einsammelt und durchsieht. Erst dann kann sie sich an die Feinplanung des Unterrichts machen. Mehr zu dieser Praxis des Dialogischen Lernens findet man in mehreren Publikationen (Gallin 2008, 2009).

Dass bei der Sichtung der Schülerarbeiten ein grosser Arbeitseinsatz der Lehrperson erforderlich ist, kann leicht abgeschätzt werden. Umso mehr muss man ein Auge auf jene Stellen werfen, an denen die Arbeit erleichtert werden kann. Der Hauptpunkt liegt im Zutrauen: Wenn den Schülerinnen und Schülern mehr zugetraut wird, fallen viele

[5] Während Platons Gedanken zum geistigen Auge und zur Mathematik sehr praxisnah und relevant für die Schule sind, können wir heute seinen Ausführungen zur Schule nicht mehr folgen. Platon hat die Schulung des Volkes überhaupt nicht ins Auge gefasst, sondern sich nur um die Elite (Kriegerkaste) gekümmert. Sein streng hierarchisches Denken steht einer Volksschule diametral entgegen.

[6] Bereits beim Erstleseunterricht gilt dieses Prinzip, wenn man Jürgen Reichen und seiner Kernidee „Lesen durch Schreiben" folgt (Reichen 1988).

Aufgaben weg, welche traditionellerweise die Lehrperson – vor allem im Bereich des Vorbereitens und des Bereitstellens von Material – übernommen hat. Neben diesem Ausgleich, der allerdings einiger Gewöhnung bedarf, ist dafür ein nicht zu unterschätzender Lohn in Aussicht: Die Lehrperson muss sich nicht mehr künstlich und angestrengt um einen besonders persönlichen, einfühlsamen und netten Umgang mit den Lernenden kümmern, denn durch das Zutrauen und das Zuhören entwickelt sich von selbst eine für die Lernenden deutlich spürbare Zuwendung, welche sie über das Fach selbst erfahren und nicht etwa bei ausserschulischen Aktivitäten. So lernen sie das Fach als etwas sehr Persönliches kennen in zweifacher Ausprägung: Zum einen personifiziert der Fachlehrer oder die Fachlehrerin das Fach und lebt vor, wie das Fach auch im elementaren, schulischen Bereich noch eine geistige Entwicklung ermöglicht, zum anderen kann die Person des Lernenden spüren, dass sie mit ihren eigenen Ideen, Ansätzen und Beiträgen nicht chancenlos ist gegenüber einem altehrwürdigen Fach wie der Mathematik.

Ein konkretes Beispiel aus dem 5. Schuljahr[7] möge abschliessend zeigen, wie zwanglos und direkt man im Mathematikunterricht vom Zutrauen über das Zuhören zum Zuwenden gelangen kann: Es geht um das Thema „Netze von Körpern“. Ein erster Auftrag an die Schülerinnen und Schüler mag etwa so gestellt werden: „In der Mathematik nennt man einen Bastelbogen für einen geometrischen Körper ein ‚Netz’. Gib Netze von Körpern an, die du bereits kennst.“ Und schon sprudelt es und die Kinder tragen ihre Schätze herbei, die natürlich aufgegriffen und besprochen werden. Ein zweiter Auftrag könnte lauten: „Hier siehst du einen Körper. Zeichne dessen Netz!“ Wenn die Kinder gewöhnt sind, die Spuren ihrer Denkschritte festzuhalten, sind Perlen wie jene von Leon immer wieder zu finden: Er skizziert als Netz für einen geraden Kreiskegel die folgende Figur (Abb. 2) in sein Journal, bemerkt aber rasch seinen Fehler und zeichnet schnell eine korrekte Figur. Zum Glück hat die Lehrerin seinen ersten Versuch vor dem Radiergummi retten können.

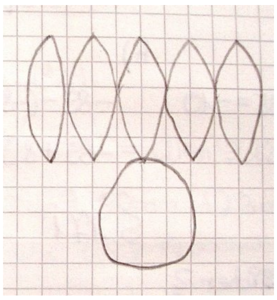

Abb. 2: Leons erster Versuch für ein Netz eines geraden Kreiskegels

Welche Lehrperson hätte die Fantasie und den Mut gehabt, in ihrer Vorbereitung Leons erstes Netz zu erfinden und den Lernenden als Rätsel vorzulegen? Jetzt aber entspinnt sich eine angeregte Diskussion über Leons merkwürdigen Körper, ja man fragt sich schliesslich, wie denn das Netz einer Kugel oder eines schiefen Kreiskegels wohl aussehen müsste. Fragen, die auch Lehrpersonen ins Grübeln bringen, denn es kommt sogar die Rektifikation der Ellipse ins Spiel. (Erstaunlicherweise fällt man beim Versuch, ein Netz einer zylindrisch segmentierten „Kugel“ zu konstruieren, auf die gleichen Kurven zurück, wie sie das Experiment mit der Lyonerwurst zutage gefördert hat.) Dieses Beispiel aus dem Unterricht zeigt, welch geistige Entwicklungsmöglichkeiten sich eröffnen, sobald man den Kindern etwas zutraut und nicht gleich etwas didaktisch bis ins Detail Ausgeklügeltes vorsetzt.

[7] Das Beispiel entstand am 17. Juni 2009 im Unterricht von Studienrätin Maren Distel vom Hegau-Gymnasium in Singen (Hohentwiel).

Literatur

Deller, Henri & Gebauer, Peter & Zinn, Jörg (2000): *Algebra 1, Aufgaben*. Zürich: Orell Füssli Verlag AG.

Freudenthal, Hans (1982): *Mathematik – eine Geisteshaltung*. Grundschule, Heft 4, 140–142.

Gadamer, Hans-Georg (1959): Vom Zirkel des Verstehens. In: Günther Neske (Hrsg.): *Martin Heidegger: Festschrift zum 70. Geburtstag*. Pfullingen: Neske Verlag, 24 – 35.

Gallin, Peter & Ruf, Urs (1990): *Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz.* Zürich: Verlag Lehrerinnen und Lehrer Schweiz (LCH), sowie: Seelze-Velber: Kallmeyer (1998).

Gallin, Peter (2002): *Vom Sinn des Mathematikunterrichts*. Gymnasium Helveticum Nr. 1/2002 (VSMP-Festschrift), 28 – 32.

Gallin, Peter (2008): Den Unterricht dialogisch gestalten – neun Arbeitsweisen und einige Tipps. In: Ruf, Urs & Keller, Stefan & Winter, Felix (Hrsg.): *Besser lernen im Dialog*. Seelze-Verber: Kallmeyer Verlag, 96 – 108.

Gallin, Peter (2009): Dialogisches Lernen im Mathematikunterricht. In: Leuders, Timo & Hefendehl-Hebeker, Lisa & Weigand, Hans-Georg (Hrsg.): *Mathemagische Momente.* Berlin: Cornelsen Verlag, 40 – 49.

Reichen, Jürgen (1988): *Lesen durch Schreiben. Wie Kinder selbstgesteuert lesen lernen*. Zürich: Sabe Verlag.

Ruf, Urs & Gallin, Peter (2005): *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Austausch unter Ungleichen. Grundzüge einer interaktiven und fächerübergreifenden Didaktik* (Band 1) und *Spuren legen – Spuren lesen. Unterricht mit Kernideen und Reisetagebüchern* (Band 2). 3. überarbeitete Auflage. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Ruf, Urs (2008): Das Dialogische Lernmodell vor dem Hintergrund wissenschaftlicher Theorien und Befunde. In: Ruf, Urs & Keller, Stefan & Winter, Felix (Hrsg.): *Besser lernen im Dialog*. Seelze-Verber: Kallmeyer Verlag, 233 – 270.

Schleiermacher, Friedrich (1963) (Übersetzung): Platon, Politeia (7. Buch, 527 e). In: Walter, F. Otto & Grassi, Ernesto & Plamböck, Gert (Hrsg.): *Platon, Sämtliche Werke*. Reinbeck bei Hamburg: Rowohlt Verlag.

Steinhaus, Hugo (1950): *Mathematical Snapshots.* New York: Oxford University Press. Neuauflagen: 1979, 1983, 1999 (Dover Publications)

Wagenschein, Martin (1986): *Die Sprache zwischen Natur und Naturwissenschaft*. Marburg: Jonas Verlag, 74.

Weber, Christof (2007): *Mathematische Vorstellungen bilden. Praxis und Theorie von Vorstellungsübungen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II*. Bern: h.e.p. Verlag AG.

Weber, Christof (2008): „Umfallen und Wegrutschen ist gleich" – mit mathematischen Vorstellungsübungen in den Dialog gehen. In: Ruf, Urs & Keller, Stefan & Winter, Felix (Hrsg.): *Besser lernen im Dialog*. Seelze-Verber: Kallmeyer Verlag, 142 – 161.

Weber, Christof (2009): Mathematische Vorstellungsübungen für die Oberstufe. In: Leuders, Timo & Hefendehl-Hebeker, Lisa & Weigand, Hans-Georg (Hrsg.): *Mathemagische Momente.* Berlin: Cornelsen Verlag, 208 – 221.

Weber, Christof (2010): *Mathematische Vorstellungsübungen im Unterricht – ein Handbuch für das Gymnasium*. Seelze: Klett/Kallmeyer Verlag (erscheint 2010).

Weinert, Franz (2001): Concept of Competence: A Conceptual Clarification. In: Rychen, Dominique Simone & Salganik, Laura Hersh (Hrsg.): *Defining and Selecting Key Competencies*. Göttingen: Hogrefe Verlag, S. 45 – 65.