Unendlichkeit, reelle Zahlen, Grenzwerte

Thomas Bedürftig, Hannover

Dresden, 19.1. 2018

Überblick

- Der Anfang des Unendlichen.

- Bei den Pythagoreern.

  Mathematikphilosophische Stationen.

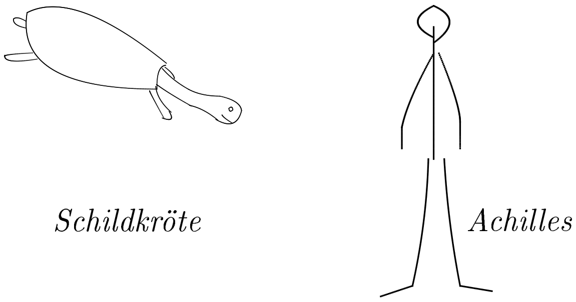
- Die Wende im 19. Jahrhundert.
  $\mathbb{R}$ und die Folgen.

- $\mathbb{R}$ im Unterricht.

1 Anfang

1.1

Wie alt ist die Unendlichkeit?



Achilles und die Schildkröte

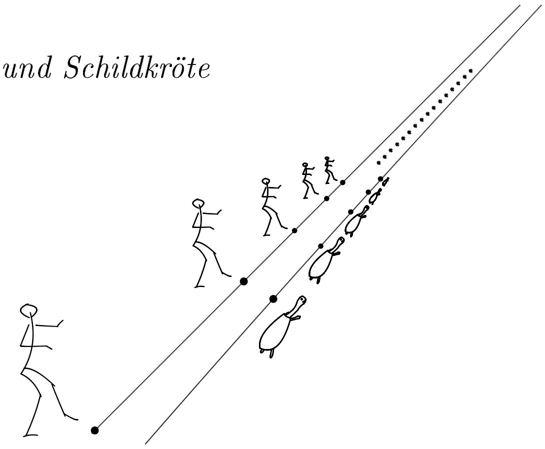
– Die Schildkröte hatte lange *nachgedacht*.

– Aufforderung zum Wettlauf.

– Vorsprung: 10 Schritte.

– Wette: Achilles kann die Schildkröte nicht überholen!

Achilles und Schildkröte



Achilles kann die Schildkröte nicht überholen.

Achilles und Schildkröte

– 450 v.Chr.

- **Paradoxon**:

  Achilles kann die Schildkröte nicht überholen, da die Schildkröte immer schon weg ist.

Was ist das Problem?

- Konflikt zwischen endlicher Zeit und unendlichem Prozess:

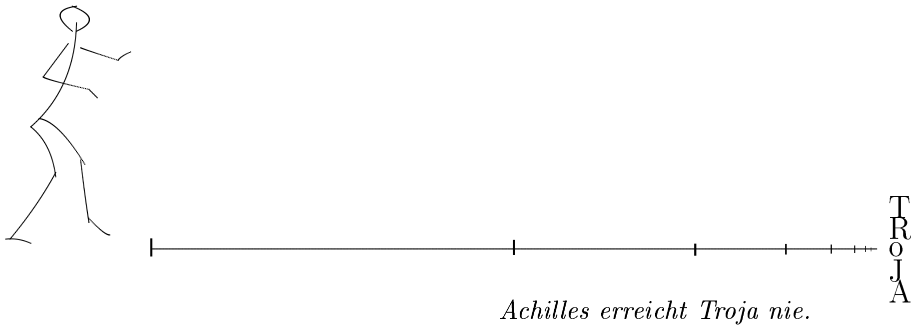
– Die Folge der immer kleiner werdenden Abstände zwischen Achilles und der Schildkröte ist ohne Ende.

– Achilles kann diese Folge niemals durchlaufen –

  und gibt auf.

Achilles ohne Schildkröte

. . . denkt nach



Achilles erreicht Troja nie.

Was ist das Problem?

- **Paradoxon** der Streckenteilung:

  Die Folge der immer kleiner werdenden Teilstrecken ist ohne Ende.

- Zenon (um 490 bis 430 v. Chr.)

- Entdeckung der Unendlichkeit.

Zenon (um 490 bis 430 v. Chr.)

- Parmenides (um 520 bis 460 v. Chr.)

– Das Seiende ist ohne Anfang und Ende,

– in sich gleichmäßig, stetig, unteilbar, vollendet, unwandelbar.

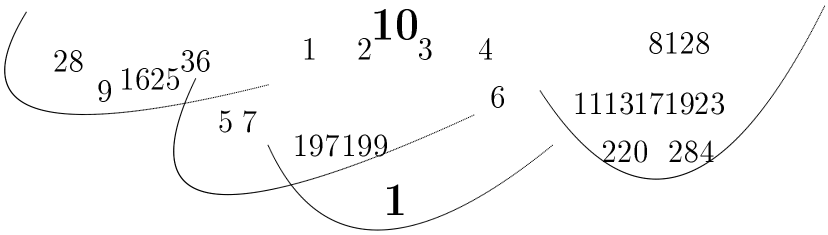
– Werden und Vergehen, Veränderung und Bewegung sind Schein.

Philosophischer Spott!

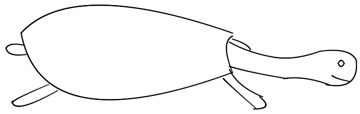
2 Pythagoreer

2.1

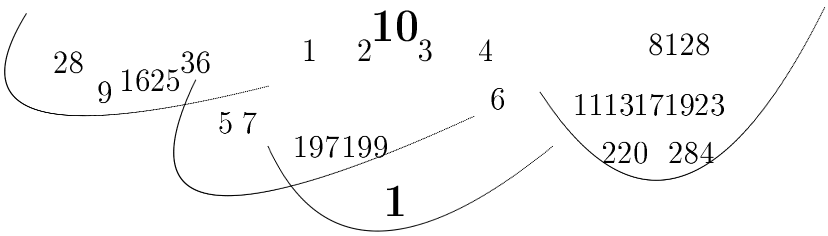
Die Schildkröte auf dem Weg zu den Pythagoreern



ALLES ist ZAHL



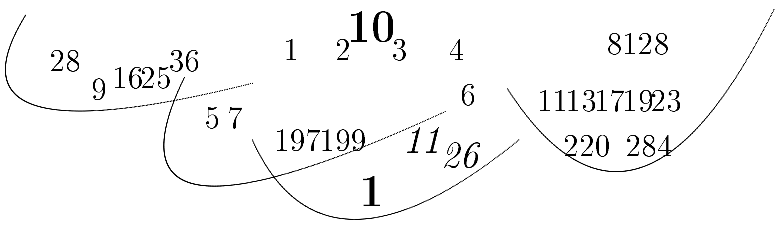
Bei den Pythagoreern



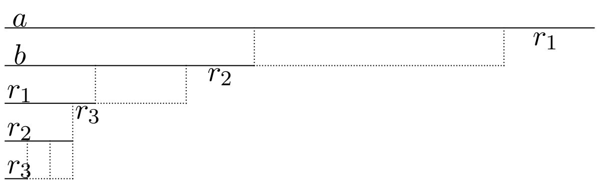
euklidischer **104** **44** *Algorithmus*

$$\begin{aligned}104 &= 2\cdot 44+16\\ 44 &= 2\cdot 16+12\\ 16 &= 1\cdot 12+4\\ 12 &= 3\cdot \mathbf{4}\end{aligned}$$

Bei den Pythagoreern



Wechsel **a** **b** *Wegnahme*



$$\begin{aligned}a &= 2\cdot b+r_1\\ b &= 2\cdot r_1+r_2\\ r_1 &= r_2+r_3\\ r_2 &= 3\cdot r_3\end{aligned}$$

Universelle Verfahren

- *Euklidischer Algorithmus*:

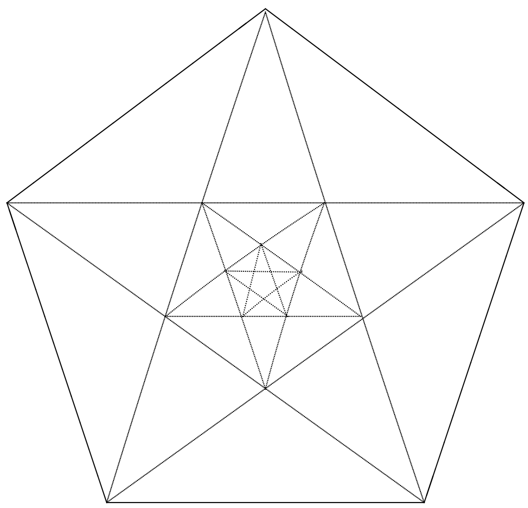
  Universelles Verfahren zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen.

- *Wechselwegnahme*:

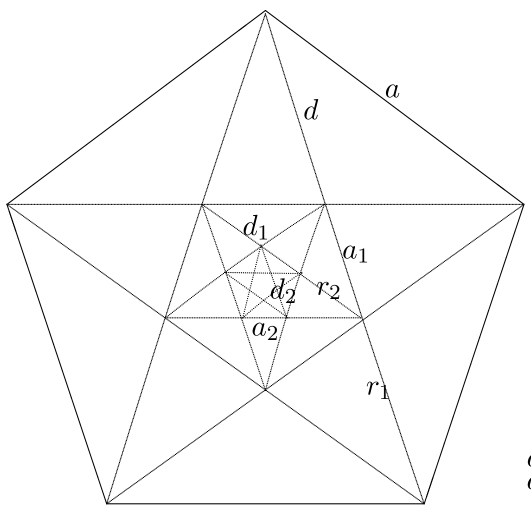
  Universelles Verfahren zur Bestimmung eines gemeinsamen Maßes zweier Strecken.

• Bestimmung ihres Zahlenverhältnisses.

„Logo“ der Pythagoreer



Wechselwegnahme im Fünfeck



$$\begin{aligned} d &= a + d_1 \\ a &= d_1 + a_1 \\ d_1 &= a_1 + d_2 \\ a_1 &= d_2 + a_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Ein vorsokratisches Gespräch

S. Wie wird die Wechselwegnahme im nächsten Fünfeck ablaufen? Wird sie nicht genauso sein wie in den größeren Fünfecken?

H. Sie wird genauso sein, Schildkröte!

S. Die Wechselwegnahme wird also kein Ende haben.

H. So wenig, wie die Folge der Fünfecke ein Ende hat.

S. Sehr gut, Hippasos. Wirst du ein gemeinsames Maß für d und a finden?

H. Nein, oh Schildkröte.

S. Es gibt also kein Verhältnis von Zahlen für Diagonale und Seite im regelmäßigen Fünfeck.

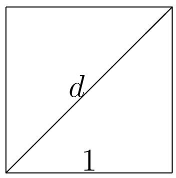
H. Beim Zeus, das ist die Wahrheit.

Inkommensurabilität

- Diagonale und Seite im regelmäßigen Fünfeck sind *inkommensurabel*: Sie stehen in keinem Verhältnis von Zahlen.

  Hat die Seite die Länge 1, so gibt es für die Länge der Diagonalen keine Maßzahl.

  – Weiteres Beispiel:

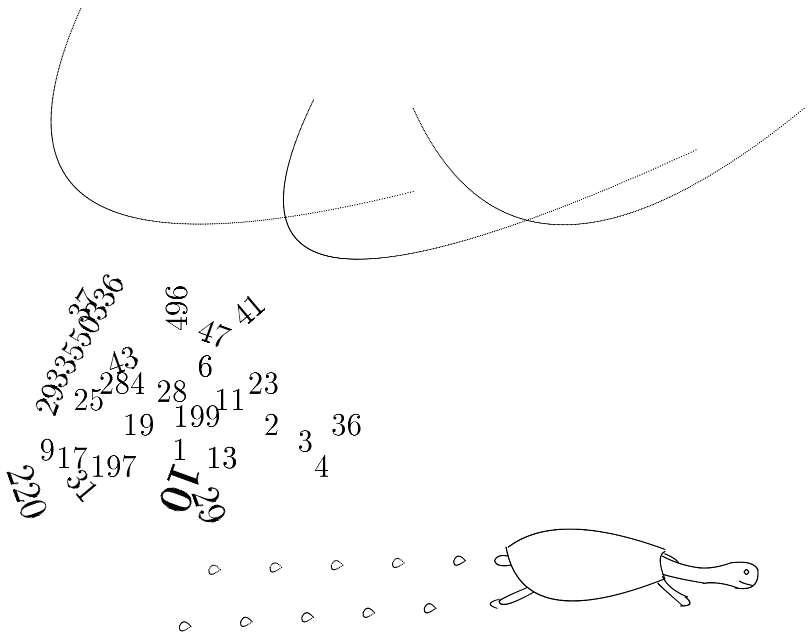
  

  Die Diagonale d im Einheitsquadrat ist ohne Maßzahl.

Bei den Pythagoreern

- *Nicht alles ist Zahl.*

Bei den Pythagoreern



Bei den Pythagoreern

- Zahlentheorie als Metaphysik ist gescheitert. Speziell:

  Wirklichkeit und Anschauung sind nicht durch Zahlen zu erfassen.

  - Philosophie wird Grundlage der Mathematik.

  - Mathematik zerfällt in Geometrie und Größenlehre einerseits und Arithmetik und Zahlentheorie andererseits.

  - Geometrie und Größenlehre bilden den Rahmen der künftigen Mathematik.

3 Stationen

3.1

Bei Platon (427–347 v. Chr.)

S. Bericht vom vorsokratischen Gespräch.

P. Staunen:

P. „Es kam mir vor, als wäre das gar nicht bei Menschen möglich, sondern eher nur beim Schweinevieh. Und da schämte ich mich, nicht nur für mich selbst, sondern auch für alle Hellenen."

Bei Aristoteles (384–322 v. Chr.)

Beifall.

A. „Aporie". („aporos": „hilflos".) – Unauflösbarkeit der Paradoxien!

A. Es gibt ein Unbegrenztes „deswegen, weil in dem Denken kein Aufhören ist."

„Es kann ferner etwas ein Unendliches sein dadurch, dass es ein immer weiteres Hinzufügen [...] zulässt."

A. „Unmöglich nun ist es, dass ein solches Unendliches selber als abgetrennt für sich [...] existiere."

- Festschreibung für die nächsten 2 200 Jahre.

Bei Euklid (? 360–300 v. Chr. ?)

Aristotelisch.

E. „Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Menge von Primzahlen.“

– Statt: Es gibt unendlich viele Primzahlen.
Oder: Die Menge der Primzahlen ist unendlich.

Bei Leibniz (1646–1716)

Bekräftigung.

Philalethes: „Nichts ist klarer als der Widersinn der Vorstellung einer unendlichen Zahl.“

Theophil: „Ich bin derselben Ansicht. Aber das ist nicht der Fall, weil man nicht die Vorstellung des Unendlichen haben kann, sondern weil ein Unendliches nicht ein wahres Ganzes sein kann.“ (1704)

Bei Gauss (1777–1855)

Verteidigung.

– „[...], so protestire ich zuvörderst gegen den Gebrauch einer unendlichen Grösse als einer Vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur ein Façon de parler, in dem man eigentlich von *Grenzen* spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während anderen ohne Einschränkung zu wachsen verstattet ist.“
– „Hierin ist aber nichts Widersprüchliches, wenn der endliche Mensch sich nicht vermisst, etwas Unendliches als etwas Gegebenes [...] betrachten zu wollen.
Sie sehen, dass hier in der That der Fragepunkt unmittelbar an die Metaphysik streift.“ (1831)

Bei Hilbert (1862–1943)

Diktum.

„[...] das [aktual] Unendliche findet sich nirgends realisiert; es ist weder in der Natur vorhanden, noch als Grundlage in unserem verstandesmäßigen Denken zulässig

[...]." (1926)

4 Die Wende

4.1

Cantor und die Schildkröte (1872)

- Ein nachsokratisches Gespräch

S. Achill kann mich nicht überholen, da ich immer schon weg bin – wenn er da ist, wo ich war.

C. Doch!

S. Diagonale und Seite im Einheitsquadrat sind inkommensurabel.

C. Stimmt!

S. Es gibt keine Maßzahl für die Diagonale d im Einheitsquadrat.

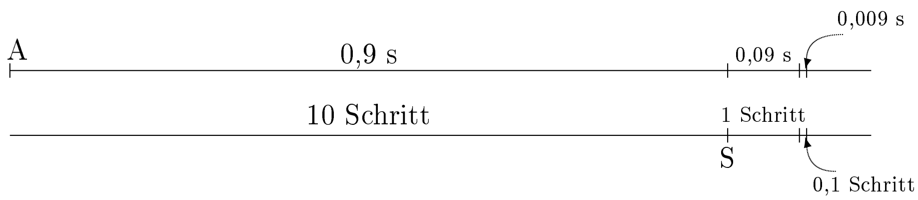
C. Doch!

Cantor und die Schildkröte

S. Nicht alles ist Zahl.

C. **Doch!**

Wettlauf mit der Stoppuhr



$0,9999999\ldots$

für 10 Schritte	0,9 Sekunden
für 11 Schritte	0,99 Sekunden
für 11,1 Schritte	0,999 Sekunden
... ...	... ...
für $11,111111111\ldots$ Schritte	$0,99999999999\ldots$ Sekunden
... ...	... ...

S. Ohne Ende!

- C.: Doch!

Cantors Diktum

- **Definition**:

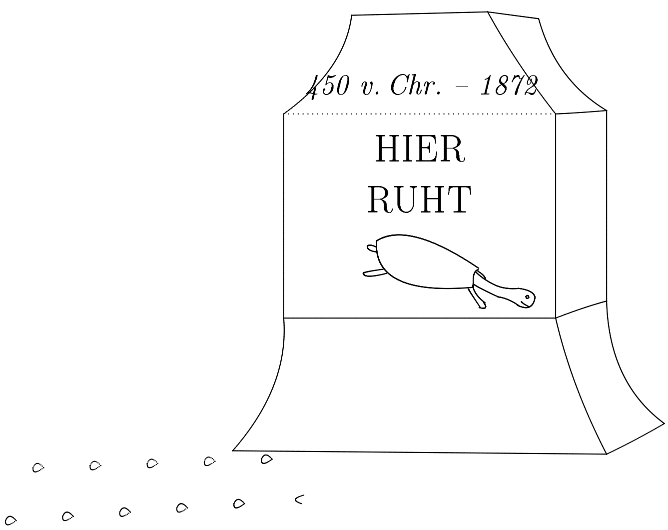
  $0,9999999999999999\ldots := 1!$

- **Definition**:

  $\sqrt{2} := 1,414213562\ldots\ldots\ldots.$

  Die Zahl $1,414213562\ldots\ldots\ldots$ ist die Länge der Diagonalen im Einheitsquadrat.

Das Ende der Spur



Cantors Kunststück

Was ist $0,99999999999999999999\ldots$?

Unendliche Folge

$0,9;\ 0,99;\ 0,999;\ 0,9999;\ \ldots\ldots$

$\forall\varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N\, (|1 - a_n| < \varepsilon)!$ $\qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 1$

1 ist der **Grenzwert**, der nie erreicht wird.

Wieso $0,99999999999999999999\ldots = 1$?

Cantors Kunststück

- Was ist $0,99999999999999999999\ldots$?

  Unendliche Folge

  $0,9;\ 0,99;\ 0,999;\ 0,9999;\ \ldots\ldots$

  $\boldsymbol{\{}\ 0,9;\ 0,99;\ 0,999;\ 0,9999;\ \ldots\ldots\ \boldsymbol{\}}$

  Unendliche Menge. Mathematischer Gegenstand.

- Definition: $\{0,9;\ 0,99;\ 0,999;\ 0,9999;\ \ldots\ldots\} := 1$

Cantors Kunststück

Alltägliche Übung.

a) Zählen: $1, 2, 3, 4, \ldots$ – ohne Ende.

b) $\boldsymbol{\{}\ \ 1, 2, 3, 4, \ldots\ \ \boldsymbol{\}}$

c) $\mathbb{N} := \ \boldsymbol{\{}\ 1, 2, 3, 4, \ldots\ \ \boldsymbol{\}}$

Cantors Kunststück

- **Unendlichkeitsaxiom** der Mengenlehre:

  $\mathbb{N} := \ \boldsymbol{\{}\ 1, 2, 3, 4, \ldots\ \ \boldsymbol{\}}$ ist eine Menge.

- **Paradoxon** der Mengenlehre:

a) *„…“ bedeutet „zähle weiter – ohne Ende“.*

b) „}“ bedeutet „Ende“.

- Kurz: .... **}**

Cantors Kunststück

Mengenlehre widerspricht allem Dagewesenen:

H. Das Unendliche ist nicht als Grundlage in unserem verstandesmäßigen Denken zulässig.

G. Protest gegen den Gebrauch einer unendlichen Grösse als einer Vollendeten.

L. Ein Unendliches kann nicht ein wahres Ganzes sein.

A. Unmöglich nun ist es, dass ein solches Unendliches selber als abgetrennt für sich [...] existiere.

Cantors Kunststück

- Mengenlehre ignoriert

Wirklichkeit.

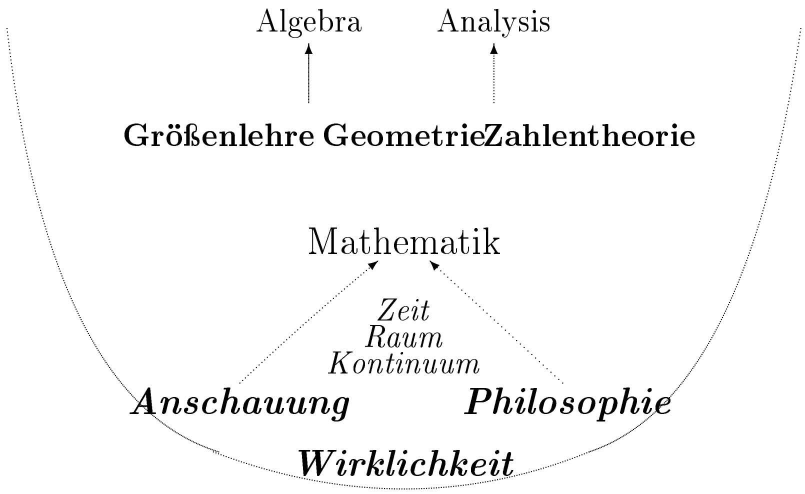
Anschauung.

Philosophie.

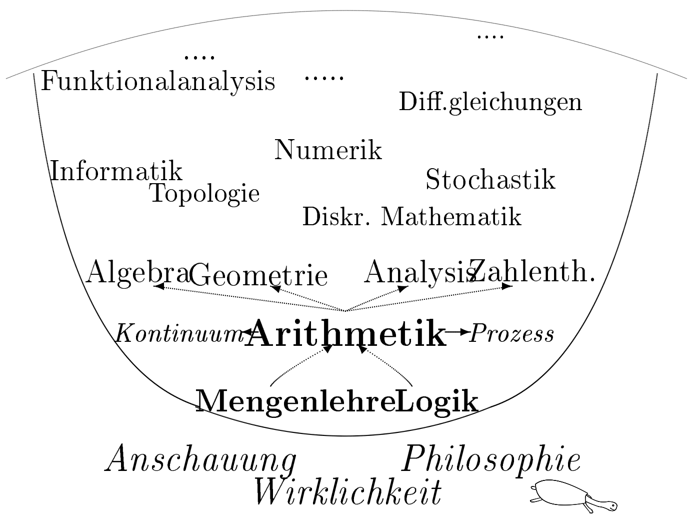
5 ...

5.1

Gestalt der alten Mathematik



Neue Gestalt, Höhere Mathematik



Mathematik heute

– Reine Mathematik.

– Geschlossenes Gebäude. Ausschluss der Öffentlichkeit.

– Das Fundament der Mathematik ist Mathematik.

- Befreit von Philosophie und Schildkröten.

6 Reelle Zahlen und die Folgen

6.1

Kunstwerk $\mathbb{R}$

Unendliche Folgen, Cauchyfolgen $(a_n) : \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n > N\ (|a_m - a_n| < \varepsilon)$.

Nullfolge $(c_n) : \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ (|c_n - 0| < \varepsilon)$.

$(a_n) \approx (b_n)$, wenn $(a_n - b_n)$ Nullfolge ist.

Beispiel: $(0,9; 0,99; 0,999; \ldots) \approx (1; 1; 1; \ldots)$

$[(a_n)]$ Menge aller zu (a_n) äquivalenten Cauchyfolgen.

$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ Menge aller Folgen, $\mathfrak{F}$ Menge aller Cauchyfolgen,
$\mathfrak{N}$ Menge aller Nullfolgen.

- Definition: $\mathbb{R} := \mathfrak{F}/\mathfrak{N}$.

  Unendliche Menge unendlicher Mengen (Klassen) äquivalenter unendlicher Mengen (Folgen).

Arithmetisierung

Konstruktion der reellen Zahlen 1872.

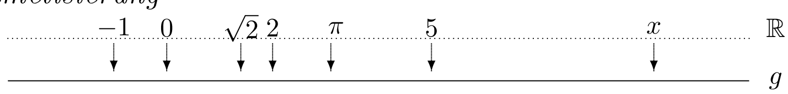
Ziel ist die „Arithmetisierung“ der Mathematik:

„Alles ist Zahl!“ Das alte Pythagoreische Programm.

- 1. Schritt:

  Darstellung der reellen Zahlen auf der Geraden.

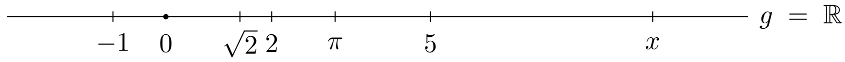
Arithmetisierung



Frage 1: Passen alle konstruierten Zahlen auf g?
Cantors Axiom!

Frage 2: Ist g „voll“ mit den neuen Zahlen?
Heimliches Axiom!

Diktum 2



Zahlen/Gerade $\qquad g = \mathbb{R} \qquad$ Zahlengerade

Hybrid aus Geometrie und Arithmetik.

Denkschritte in die höhere Mathematik

– Unendlichkeit wurde aktual.

– Der Zählprozess wurde zur Menge $\mathbb{N}$.

– Unendliche Folgen wurden Mengen.

- Die reellen Zahlen wurden konstruiert.

– Das lineare Kontinuum wurde zur Kopie von $\mathbb{R}$. Stichwort „Zahlengerade“.

- Geraden wurden Punktmengen.

– Funktionen, Prozesse, Bewegungen wurden statisch.

- Revolution im mathematischen Denken.

Mathematik als Punktmengenlehre

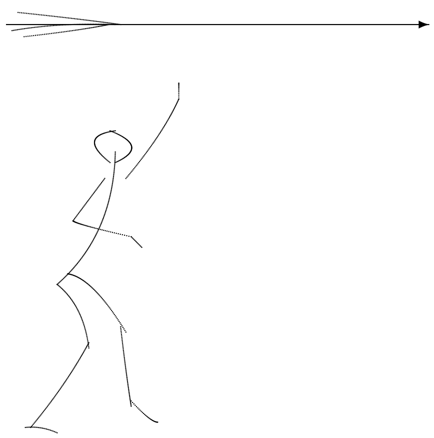
- Ist der Raum eine Menge von Punkten?

– Fließen Zeitpunkte an uns vorüber?

– Zeichnet man Punkte, wenn man eine Gerade zeichnet?

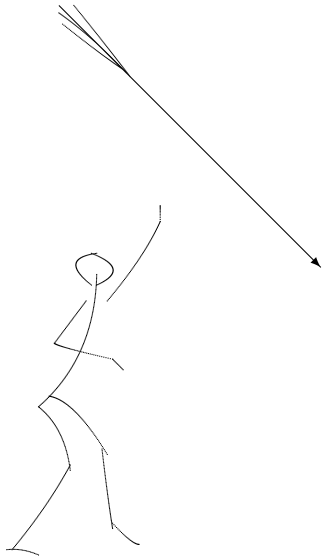
- Was ist ein Punkt?

Achilles und der Pfeil

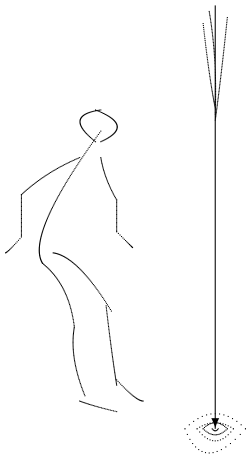


Der Pfeil kann nicht fliegen, da er in jedem Punkt ruht.

Achilles und der Pfeil



Zenons Pfeilparadoxon



Was passiert im Unterricht?

- Revolution in der Mathematik! Revolution im mathematischen Denken! Revolution im Mathematikunterricht?? Revolution im Denken der Schüler??

- Probleme im Hintergrund.

  Unterschwellig. Unbewusst.

- Beispiele aus dem Unterricht.