Reelle Zahlen, Grenzwerte, Unterricht

Thomas Bedürftig, Hannover

Dresden, 19. und 20.1. 2018

Überblick

- Reelle Zahlen im Unterricht – Analysen

– Die Zahlengerade.

– Weitere Kunstgriffe:
Beispiel $\sqrt{2}$
Intervallschachtelungen
Unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche

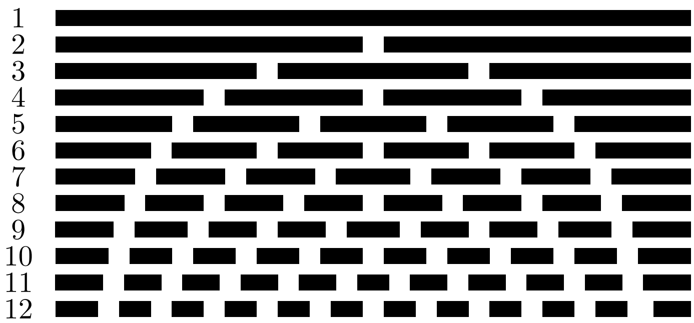
- Reelle Zahlen im Unterricht – Rekonstruktion?

1 $\mathbb{R}$ im Unterricht

1.1

Unendlichkeit im Unterricht

Teilen



– Zählen: $\{1, 2, 3, \ldots\ldots\}$? $= \mathbb{N}$.

– Vielfache: $\{3, 6, 9, \ldots\ldots\}$?

– Erweitern: $\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \ldots\ldots\}$? $\mathbb{Q}$.

Unendlichkeit im Unterricht

– Unendliche periodische Dezimalbrüche.

Ist $0,999\ldots = 1$? Oder ist $0,999\ldots < 1$?

Ist $0,333\ldots = \frac{1}{3}$? Oder ist $0,333\ldots < \frac{1}{3}$?

– Näherungen.

- **Bruch**:

– Unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche.

– Intervallschachtelungen.

– $\mathbb{R}$.

Praxis $\sqrt{2}$

Indirekter Beweis (Euklid, Buch X, § 115a)

Wir nehmen an, $\sqrt{2}$ wäre rational, sagen wir $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. m und n seien die kleinsten Zahlen in diesem Verhältnis. Es folgt $2 = \frac{m^2}{n^2}$ und $2 \cdot n^2 = m^2$. Also ist m^2 gerade und mit m^2 notwendig auch m, z. B. $m = 2 \cdot a$. Dann muss n ungerade sein, weil m und n die kleinsten Zahlen in dem angenommenen Verhältnis $\frac{m}{n}$ sind. Gleichzeitig aber folgt, und das ist der Widerspruch, dass n gerade ist, nämlich so: Aus $m = 2 \cdot a$ und $4 \cdot a^2 = m^2 = 2 \cdot n^2$ folgt, dass $n^2 = 2 \cdot a^2$ ist, also gerade und damit auch n gerade ist. □

Satz: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

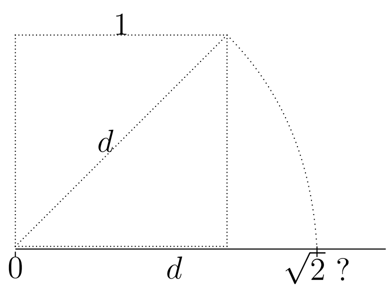
Praxis $\sqrt{2}$

„Die uns vertraute Zahl $\sqrt{2}$ gehört also nicht zur Menge der rationalen Zahlen.“

- Satz:

  $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.

Praxis



$\sqrt{2}$ ist die Länge der Diagonale im Einheitsquadrat.

Die Wahrheit

- Satz:

  $\sqrt{2}$ ist irrational.

- Satz:

  $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

  Es gibt nur rationale Zahlen!

- Satz:

  $\sqrt{2}$ ist keine Zahl.

Eingeständnis?

Es gibt keine Zahl, deren Quadrat 2 ist.

Es gibt keine Maßzahl für die Länge der Diagonale im Einheitsquadrat.

$\sqrt{2}$ ist ein Term – ohne Bedeutung.

- Die Mathematik ist am Ende.

  Was kann man tun?

Erinnerung: Mathematische Erfindung von $\mathbb{R}$

- Grundproblem der Mathematik im 19. Jahrhundert:

  Wie kann der Term $\sqrt{2}$ eine Zahl werden?

  Wie können irrationale Größen – z.B. die Länge der Diagonale im Einheitsquadrat – Zahlen werden?

  Wohin sollen rationale Näherungsfolgen konvergieren?

- Mathematisches Programm im 19. Jahrhundert:

  Arithmetisierung.

  Ergebnis: *Theorie* der reellen Zahlen. $\mathbb{R}$.

Erfindung von $\mathbb{R}$ *im Unterricht?*

- **Vereinbarungen**.

– $\sqrt{2}^2 = 2$.
– Man rechne mit Termen $a + b \cdot \sqrt{2}$ wie zuvor in $\mathbb{Q}$.

- Ergebnis: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, ein theoretischer Zahlbereich.

– $\sqrt{2}$ wird die Länge der Diagonale im Einheitsquadrat.

Praxis

Der Schritt in die Theorie findet nicht statt.

- Das Grundproblem:

  Man vereinbart nicht.

  Man erwartet Verstehen, wo man nicht verstehen kann,

  sondern nur vereinbaren kann.

2 Zahlengerade, Kunstgriffe

2.1

Die Praxis der Zahlengerade

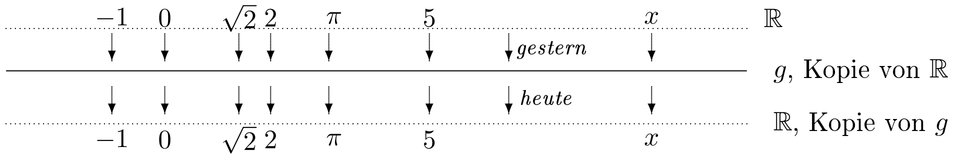
- Rezept:

  „Die reellen Zahlen werden also gleich zu Beginn durch die Gesamtheit **aller** Punkte der Zahlengeraden erklärt und als gegeben angesehen.“ [Fettdruck original im Lehrbuch]

  Motivation:

  Die „elementare Grundvorstellung“ der „lückenlosen Zahlengeraden“.

Trick



1. $\mathbb{R}$ wurde konstruiert.
2. g wurde zur Kopie von $\mathbb{R}$ erklärt.
3. $\mathbb{R}$ wird eingeführt als Kopie von g.

- Also:

  Einführung von $\mathbb{R}$ als *Kopie der Kopie* von $\mathbb{R}$.

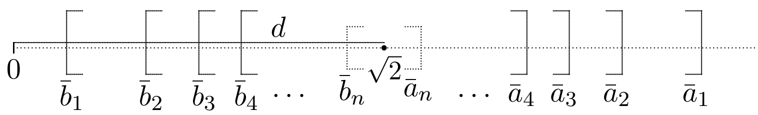
Status quo

- Zahlengerade:

  „Glaubensbekenntnis“,

  täglicher, nicht durchschauter Hintergrund,

Kunstgriff: Intervallschachtelung



$\sqrt{2}$ ist der Punkt im Innern aller Intervalle?

- Denkproblem a): $\sqrt{2}$ soll eine Zahl sein, kein Punkt.
- Denkproblem b): Der Schnitt über alle Intervalle ist – arithmetisch – leer.
- Denkfrage c): Der Schnitt über alle Intervalle ist – geometrisch – ein Intervall?

Lösung??

Was kann man tun?

$\sqrt{2}$ ist der Grenzwert der Intervallschachtelung?

Was ist der Grenzwert?

Der Grenzwert ist die Menge der zu der Intervallschachtelung äquivalenten Intervallschachtelungen?

Kunstgriff: Unendlicher Dezimalbruch

$\sqrt{2}$ ist eine Zahl,

nämlich der Dezimalbruch $1,414213\ldots$.

Was ist $1,414213\ldots$?

$1;\ 1,4\,;1,41\,;1,414\,;1,4142\,;1,41421\,;1,414213\,;\ldots$,

eine unendliche Folge *rationaler Zahlen.*

$\sqrt{2}$ ist der Grenzwert dieser Folge.

Teilproblem 1

- Was ist das Problem?

  Das Problem ist die Folge $1;\ 1,4\,;1,41\,;1,414\,;1,4142\,;1,41421\,;1,414213\,;\ldots$.

  Sie erreicht $\sqrt{2}$ nicht.

  Was ist die Lösung?

- Das Problem ist die Lösung!

  $\sqrt{2} := (1;\ 1,4\,;1,41\,;1,414\,;1,4142\,;1,41421\,;1,414213\,;\ldots)$.

Teilproblem 1

$\sqrt{2}$ ist *die* Folge, die $\sqrt{2}$ nicht erreicht.

Allgemein:

- Grenzwerte sind *die* Folgen, die sie nie erreichen.

Weierstraß (1886)

Sinnfrage

„Wenn wir von der Existenz rationaler Zahlgrößen ausgehen, so hat es keinen Sinn, die irrationalen als Grenzen derselben zu definieren, weil wir zunächst gar nicht wissen, ob es außer den rationalen noch andere Zahlgrößen gebe."

Du Bois Reymond (1882)

Einspruch

„Man fordert auch in der Tat Unmögliches, wenn eine aus den gegebenen [rationalen] Punkten herausgegriffene Punktfolge einen zu den gegebenen *nicht* gehörigen Punkt bestimmen soll."

Hermann Hankel (1867)

Prophezeiung

„Jeder Versuch, die irrationalen Zahlen formal und ohne den Begriff der Größe zu behandeln, muss auf höchst abstruse Künsteleien führen."

Teilproblem 2

- $1;\ 1,4\,;1,41\,;1,414\,;1,4142\,;1,41421\,;1,414213\,;\ldots$ ist für Schüler potentiell unendlich, offen, unfertig.

$\sqrt{2} = (1;\ 1,4\,;1,41\,;1,414\,;1,4142\,;1,41421\,;1,414213\,;\ldots)$ setzt voraus:

- $(1;\ 1,4\,;1,41\,;1,414\,;1,4142\,;1,41421\,;1,414213\,;\ldots\ )$
  ist aktual unendlich, fertig, abgeschlossen.

Teilproblem 3 „nichtperiodisch“

Noch einmal: $1,414213\ldots$ ist ein unendlicher **nichtperiodischer** Dezimalbruch.

Was kann hier „...“ bedeuten?

„**Nichtperiodisch**“ heißt „**nicht periodisch**“. Negation von „periodisch“.

Also: „...“ bedeutet „**nicht** so weiter!“. Und das „**ohne** Ende!“.

„Unendlich nichtperiodisch“: ein Wort, ohne Be**griff**.

„Denn eben wo Begriffe fehlen, Da stellt ein Wort zur rechten Zeit sich ein.“

Hermann Hankel (1867)

Widerspruch

Unendliche Folgen zur Bestimmung irrationaler Zahlen sind „in ihrer Vollendung unfaßbar“ und führen „jederzeit auf einen Widerspruch.“

Du Bois Reymond (1882)

Anklage

„Man fordert auch in der Tat Unmögliches, wenn man eine aus den gegebenen Punkten herausgegriffene Punktfolge einen zu den gegebenen nicht gehörigen Punkt bestimmen soll. Für so undenkbar halte ich dies, daß ich behaupte, keine Denkarbeit werde einen solchen Beweis für das Dasein des Grenzpunktes je einem Gehirn **abfoltern** und vereinigte es *Newtons* Divinationsgabe, *Eulers* Klarheit und die zermalmende Gewalt *Gauß*'ischen Geistes.“

Hermann Weyl (1885–1955)

Fundamentalkritik

– „In der Tat: Jede ernste und ehrliche Besinnung muß zu der Einsicht führen, daß jene Unzuträglichkeiten in den Grenzbezirken der Mathematik [Anmerkung: Mengenlehre und Logik] als Symptome gewertet werden müssen; in ihnen kommt an den Tag, was der äußerlich glänzende und reibungslose Betrieb im Zentrum verbirgt: die innere Haltlosigkeit der Grundlagen, auf denen der Aufbau des Reiches ruht.“ (1921)

David Hilbert (1926)

Mahnung

„[...] das Unendliche findet sich nirgends realisiert; es ist weder in der Natur vorhanden, noch als Grundlage in unserem *verstandesmäßigen Denken* zulässig [...].“

Paul Lorenzen (1957)

Schlusswort

„Von einer Aufeinanderfolge unendlich vieler Ziffern zu reden, ist also – wenn es überhaupt nicht Unsinn ist – zumindest ein großes Wagnis. Hierüber wird im mathematischen Unterricht zur Zeit aber meist kein Wort verloren.“ (1957)

3 $\mathbb{R}$ im Unterricht ...

3.1

Was kann man tun?

- Offenbarungseid:

  $\sqrt{2}$ ist keine Zahl!

- Programm:

  Theorie: Vereinbaren statt Verstehen!

Rechnen mit $\sqrt{2}$. Näherungen. Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ durch Dedekindsche Schnitte? „Erschaffen“ der Zahl $\sqrt{2}$? $\mathbb{R}$ als theoretisches *Modell* der Gerade: Zahlengerade. Vereinbarung: Unendlicher Dezimalbruch?

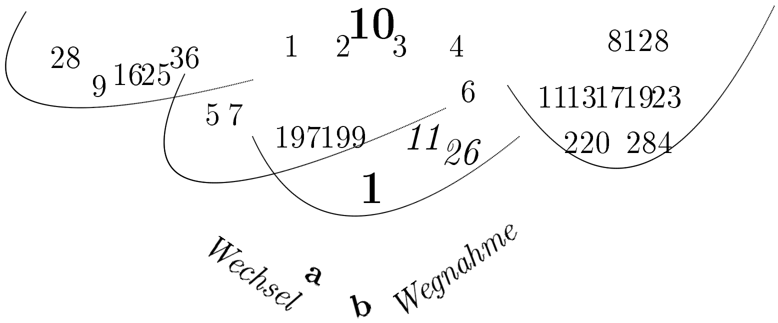
Indirekter Beweis (Euklid, Buch X, § 115a)

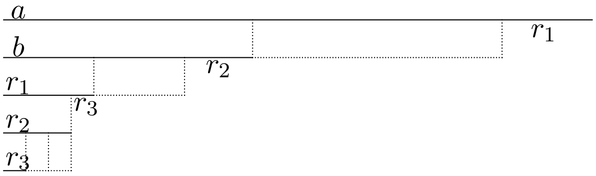
Anfang?

Wir nehmen an, $\sqrt{2}$ wäre rational, sagen wir $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. m und n seien die kleinsten Zahlen in diesem Verhältnis. Es folgt $2 = \frac{m^2}{n^2}$ und $2 \cdot n^2 = m^2$. Also ist m^2 gerade und mit m^2 notwendig auch m, z. B. $m = 2 \cdot a$. Dann muss n ungerade sein, weil m und n die kleinsten Zahlen in dem angenommenen Verhältnis $\frac{m}{n}$ sind. Gleichzeitig aber folgt, und das ist der Widerspruch, dass n gerade ist, nämlich so: Aus $m = 2 \cdot a$ und $4 \cdot a^2 = m^2 = 2 \cdot n^2$ folgt, dass $n^2 = 2 \cdot a^2$ ist, also gerade und damit auch n gerade ist. □

Überzeugt Schüler nicht.

Wie bei den Pythagoreern





$$a = 2 \cdot b + r_1$$
$$b = 2 \cdot r_1 + r_2$$
$$r_1 = r_2 + r_3$$
$$r_2 = 3 \cdot r_3$$

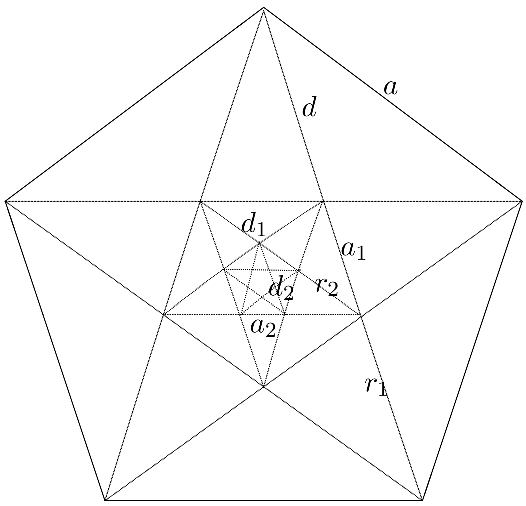
Universelles Verfahren

– *Wechselwegnahme*:

Universelles Verfahren zur Bestimmung eines gemeinsamen Maßes zweier Strecken.

- Bestimmung ihres Zahlenverhältnisses.

Wechselwegnahme im Fünfeck



$$d = a + d_1$$
$$a = d_1 + a_1$$
$$d_1 = a_1 + d_2$$
$$a_1 = d_2 + a_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

S. Wie wird die Wechselwegnahme im nächsten Fünfeck ablaufen? Wird sie nicht genauso sein wie in den größeren Fünfecken?

H. Sie wird genauso sein, Frau Schmidt!

S. Die Wechselwegnahme wird also kein Ende haben.

H. So wenig, wie die Folge der Fünfecke ein Ende hat.

S. Sehr gut, Hippasos. Wirst du ein gemeinsames Maß für d und a finden?

H. Nein, oh Lehrerin.

S. Es gibt also kein Verhältnis von Zahlen für Diagonale und Seite im regelmäßigen Fünfeck.

H. Beim Zeus, das ist die Wahrheit.

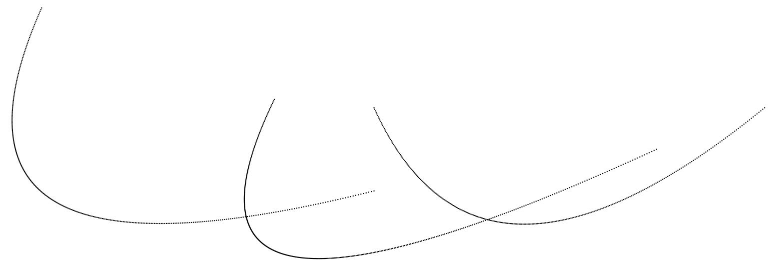
Inkommensurabilität

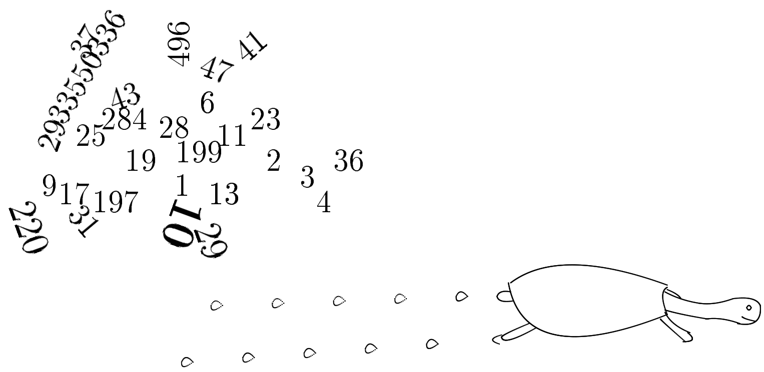
– Diagonale und Seite im regelmäßigen Fünfeck sind *inkommensurabel*: Sie stehen in keinem Verhältnis von Zahlen.

Hat a die Länge 1, so ist die Länge von d ohne Maßzahl.

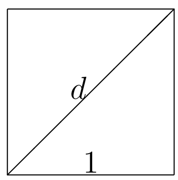
Wie bei den Pythagoreern

- *Nicht alles ist Zahl.*





Inkommensurabilität



– Anderes Beispiel:

Hat a die Länge 1, so hat die Diagonale d die Länge $\sqrt{2}$.

Was ist $\sqrt{2}$? Bestimmung von Zähler m und Nenner n.

$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Was kann man über m und n sagen?

- Rechnen:

  $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Es ist $2 = \frac{m^2}{n^2}$ und $2 \cdot n^2 = m^2$. Also ist m^2 gerade und mit m^2 auch m, z. B. $m = 2 \cdot k$. Aus $m = 2 \cdot k$ und $4 \cdot k^2 = m^2 = 2 \cdot n^2$ folgt, dass $n^2 = 2 \cdot k^2$ ist, also ist auch n gerade.

  Kürze durch 2:

$m_1 = \frac{m}{2}$, $n_1 = \frac{n}{2}$. Dann ist

$\sqrt{2} = \frac{m_1}{n_1}$.

Bestimmung von Zähler m und Nenner n für $\sqrt{2}$?

$\sqrt{2} = \frac{m_1}{n_1}$. Was kann über m_1 und n_1 sagen?

- Rechnen:

  $\sqrt{2} = \frac{m_1}{n_1}$. Dann ist $2 = \frac{m_1^2}{n_1^2}$ und $2 \cdot n_1^2 = m_1^2$. Also ist m_1^2 gerade und mit m_1^2 auch m_1, z. B. $m_1 = 2 \cdot k_1$. Aus $m_1 = 2 \cdot k_1$ und $4 \cdot k_1^2 = m_1^2 = 2 \cdot n_1^2$ folgt, dass $n_1^2 = 2 \cdot k_1^2$ ist, also ist auch n_1 gerade.

  Kürze durch 2:

  $m_2 = \frac{m_1}{2}$, $n_2 = \frac{n_1}{2}$. Dann ist

  $\sqrt{2} = \frac{m_2}{n_2}$.

Bestimmung von Zähler m und Nenner n für $\sqrt{2}$?

$\sqrt{2} = \frac{m_2}{n_2}$. Was kann man über m_2 und n_2 sagen?

- Rechnen:

  $\sqrt{2} = \frac{m_2}{n_2}$. Dann ist $2 = \frac{m_2^2}{n_2^2}$ und $2 \cdot n_2^2 = m_2^2$. Also ist m_2^2 gerade und mit m_2^2 auch m_2, z. B. $m_2 = 2 \cdot k_2$. Aus $m_2 = 2 \cdot k_2$ und $4 \cdot k_2^2 = m_2^2 = 2 \cdot n_2^2$ folgt, dass $n_2^2 = 2 \cdot k_2^2$ ist, also ist auch n_2 gerade.

  Kürze durch 2:

  $m_3 = \frac{m_2}{2}$, $n_3 = \frac{n_2}{2}$. Dann ist

  $\sqrt{2} = \frac{m_3}{n_3}$. Was kann man über m_3 und n_3 sagen?

- ....

  Kann das immer so weiter gehen? Diskussion.

Oder doch alten Beweis vorführen?

Ist $\sqrt{2}$ eine Zahl?

Gegenbeweis:

Wir nehmen an, $\sqrt{2}$ wäre eine Zahl, sagen wir $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. m und n seien die kleinsten Zahlen in diesem Verhältnis. Es folgt $2 = \frac{m^2}{n^2}$ und $2 \cdot n^2 = m^2$. Also ist m^2 gerade und mit m^2 notwendig auch m, z. B. $m = 2 \cdot a$. Dann muss n ungerade sein, weil m und n die kleinsten Zahlen in dem angenommenen Verhältnis $\frac{m}{n}$ sind. Gleichzeitig aber folgt, und das ist der **Widerspruch**, dass n gerade ist, nämlich so: Aus $m = 2 \cdot a$ und $4 \cdot a^2 = m^2 = 2 \cdot n^2$ folgt, dass $n^2 = 2 \cdot a^2$ ist, also gerade und damit auch n gerade ist. □

Entdeckungen

Es gibt keine Zahlen m, n mit $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

- $\sqrt{2}$ ist keine Zahl.

  Ist q eine Zahl, so ist $q^2 < 2$ oder $q^2 > 2$.

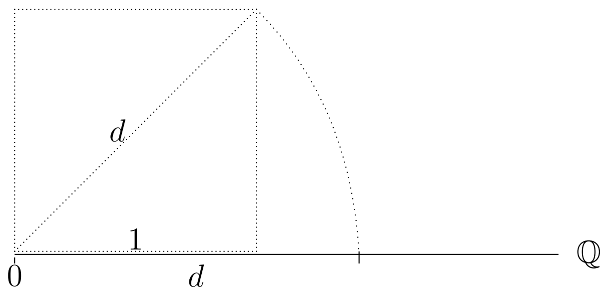
  $\sqrt{2}$ ist ein bloßer Term – ohne Bedeutung.

- Diagonale und Seite im regelmäßigen Fünfeck sind *inkommensurabel*: Sie stehen in keinem Verhältnis von Zahlen.

  Hat die Seite a im Quadrat die Länge 1, so gibt es keine Maßzahl für die Diagonale d.

- Die Diagonale d im Einheitsquadrat kann man nicht messen.

Entdeckungen



Stellen wir uns alle Zahlen auf der Geraden dargestellt vor,

dann markiert d eine Lücke zwischen den Zahlen.

Was kann man tun?

4 . . . .

4.1

Konstruktion eines neuen Zahlbereichs

$\mathbb{Q}$ ist der alte Zahlbereich.

Im neuen Zahlbereich soll $\sqrt{2}$ eine Zahl sein.

Alle „alten" Zahlen sollen im neuen Bereich sein.

Das Problem ist: Wie kann man mit $\sqrt{2}$ **rechnen**?

Genauer: Wie kann man mit $\sqrt{2}$ zusammen mit den alten Zahlen **rechnen**?

Wenn wir fertig sind, werden wir den neuen Zahlbereich $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ nennen.

Konstruktion eines neuen Zahlbereichs

Es soll gelten:

Axiom 1: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} := 2.$

$\sqrt{2}^2 := 2!$

Wie rechnet man mit $2 + \sqrt{2}$ und $3 + \sqrt{2}$?

Addition wie gewohnt:

$(2 + \sqrt{2}) + (3 + \sqrt{2}) := (2 + 3) + (\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 5 + 2 \cdot \sqrt{2}$

$(2 \cdot \sqrt{2}) + (3 \cdot \sqrt{2}) := (2 + 3) \cdot \sqrt{2}$

Konstruktion eines neuen Zahlbereichs

Wie multipliziert man $2 \cdot \sqrt{2}$ und $3 \cdot \sqrt{2}$?

Wie gewohnt:

$(2 \cdot \sqrt{2}) \cdot (3 \cdot \sqrt{2}) := (2 \cdot 3)(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = 6 \cdot 2 = 12.$

Wie rechnet man mit $(2 + 3\sqrt{2})$ und $(4 + 5\sqrt{2})$?

Wie gewohnt:

$(2 + 3\sqrt{2}) \cdot (4 + 5\sqrt{2}) := 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5\sqrt{2} + 3 \cdot 4\sqrt{2} + 3 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} =$

$= 8 + 22\sqrt{2} + 30 = 38 + 22\sqrt{2}.$

Die Rechenaxiome

- Die Zahlen in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ haben die Form $a + b\sqrt{2}$.

(1) $(a + \sqrt{2}) + (b + \sqrt{2}) := (a + b) + 2 \cdot \sqrt{2}$

(2) $(a \cdot \sqrt{2}) \cdot (b \cdot \sqrt{2}) := a \cdot b \cdot 2 = 2ab$

(3) $(a \cdot \sqrt{2}) + (b \cdot \sqrt{2}) := (a + b) \cdot \sqrt{2}$

(4) $(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) := ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2}$

Die Rechengesetze

$+$ ist kommutativ und assoziativ.

$\cdot$ ist kommutativ und assoziativ.

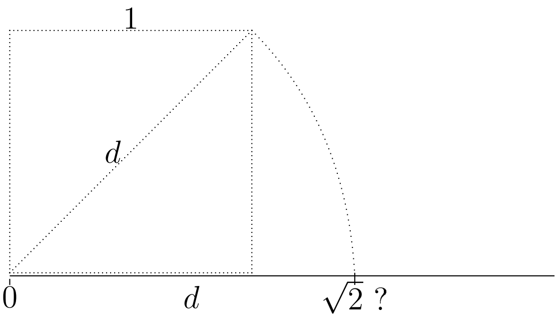
Es gilt das Distributivgesetz.

Aus (1) und (4) folgen Axiom 1 und die Axiome (2) und (3).

Division?

Gleichungen in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$?

Darstellung der neuen Zahlen auf der Zahlengeraden



$\sqrt{2}$ stellen wir dar als den Schnittpunkt des Kreises um 0 mit Radius d mit der Achse.

- $\sqrt{2}$ ist dient als Maßzahl für die Länge der Diagonale im Einheitsquadrat.

Anordnung

Die arithmetischen Operationen in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ können auf der Zahlengeraden durch Streckenaddition und -multiplikation ausgeführt werden.

- Alle Zahlen aus $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ können auf der Zahlengeraden dargestellt werden.

Die Zahlen aus $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sind linear geordnet.

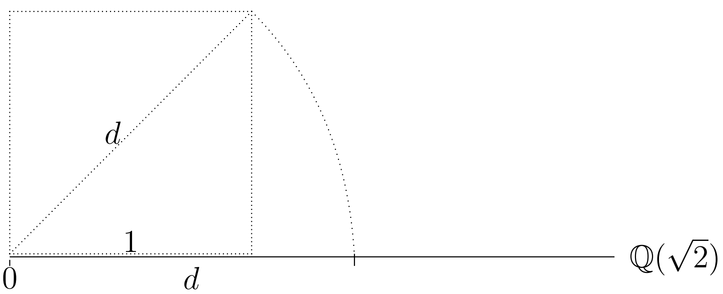
Ergebnisse

- $\sqrt{2}$ ist eine neue Zahl.
  $\sqrt{2}^2 = 2$.

- Ist q eine neue Zahl, so gilt $q^2 < 2$, $q^2 = 2$ oder $q^2 > 2$.

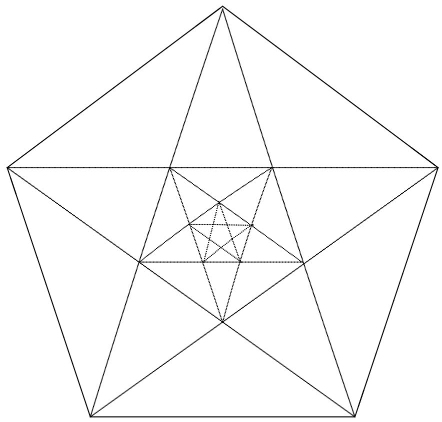
- $\sqrt{2}$ ist die Länge der Diagonalen d im Einheitsquadrat.

Ergebnisse



Stellen wir uns alle neuen Zahlen auf der Geraden dargestellt vor, dann schließt $\sqrt{2}$ die Lücke d, die die alten Zahlen gelassen hatten.

Geometrie des regelmäßigen Fünfecks



Verhältnis $d : a$. Goldener Schnitt $d : a = a : (d - a)$. $d : a = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$

Noch einmal?

Was ist $\sqrt{5}$?

$\sqrt{5}$ ist keine Zahl.

$\sqrt{5}$ ist ein Term – ohne Bedeutung.

- Was kann man tun?

Konstruktion von $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Konstruktion von $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})(\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ....

Rückblick

Wir haben Lücken in $\mathbb{Q}$ entdeckt.

Eine Lücke war auf der Zahlengerade durch d (Diagonale im Einheitsquadrat) markiert.

In die Lücke haben wir $\sqrt{2}$ gesetzt.

Wir haben Lücken in $\mathbb{Q}$ geschlossen.

Können wir alle Lücken in $\mathbb{Q}$ schließen?

Beobachtungen (für $\mathbb{Q}^+$)

Die Lücke, die durch d markiert ist, können wir auch so beschreiben:

Links liegen alle Zahlen mit $q^2 < 2$, rechts alle Zahlen mit $q^2 > 2$.

Dazwischen ist eine Lücke. Denn es gibt in $\mathbb{Q}$ keine Zahl mit $q^2 = 2$.

Genauso:

Links liegen alle Zahlen mit $q^2 < 5$, rechts alle Zahlen mit $q^2 > 5$.

Dazwischen ist eine Lücke. Denn es gibt in $\mathbb{Q}$ keine Zahl mit $q^2 = 5$.

Prinzip (für $\mathbb{Q}^+$)

U ist der Bereich der Zahlen q mit $q^2 < 2$.

O ist der Bereich der Zahlen mit $q^2 > 2$.

Die Zahlen in U sind kleiner als alle Zahlen in O.

Ein „Schnitt“ in $\mathbb{Q}$ besteht aus zwei solchen Bereichen U und O.

U heißt in der Mathematik „Unterklasse“, O „Oberklasse.

Zwei Beispiele (in $\mathbb{Q}^+$)

(1) U ist die Unterklasse der Zahlen q mit $q^2 < 2$,

O ist die Oberklasse der Zahlen mit $q^2 > 2$.

Dazwischen ist eine Lücke in $\mathbb{Q}$. Denn es gibt *keine* Zahl q mit $q^2 = 2$.

(2) U ist die Klasse der Zahlen q mit $q^2 < 9$,

O ist die Klasse der Zahlen mit $q^2 > 9$.

Dazwischen ist *keine* Lücke $\mathbb{Q}$. Denn es gibt eine Zahl q mit $q^2 = 9$.

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Immer wenn zwischen Unterklassen U und Oberklassen O eine Lücke in $\mathbb{Q}$ ist, erschaffen wir (denken wir uns, fordern wir) eine Zahl, die die Lücke schließt.

- Der Bereich der Zahlen, der so aus $\mathbb{Q}$ entsteht, heißt $\mathbb{R}$.
  Die Zahlen in $\mathbb{R}$ heißen „reelle Zahlen“.