Verschwinden und Rückkehr der Infinitesimalien

Thomas Bedürftig, Hannover

Dresden, 20.1. 2018

Überblick

– Der Anfang der Infinitesimalien.

– Das Ende.

– Die Rückkehr.

– Die Gegenwart.

– Schluss.

1 Anfang . . .

1.1

Klein

- Klein

– Sehr klein!

– Unendlich klein!

– Am kleinsten?

– Atome?

Unendlich klein

Unendlich klein, nicht atomar.

- Infinitesimalien bei Leibniz:

  Strecken wie gewöhnliche Strecken.

  Größen wie gewöhnliche Größen.

  Nur unendlich klein.

- Leibniz erweitert die alte aristotelische Anschauung des geometrischen Kontinuums.

Leibniz

> „Man muß aber wissen, daß eine Linie nicht aus Punkten zusammengesetzt ist, auch eine Fläche nicht aus Linien, ein Körper nicht aus Flächen, sondern eine Linie aus Linienstückchen (*ex lineolis*), eine Fläche aus Flächenstückchen, ein Körper aus Körperchen, die unendlich klein sind (*ex corpusculis indefinite parvis*)."

Fiktionen?

- Sind Infinitesimalien „Fiktionen"?

  Vorstellungen? Gedankliche Bilder? Veranschaulichungen?

- Oder

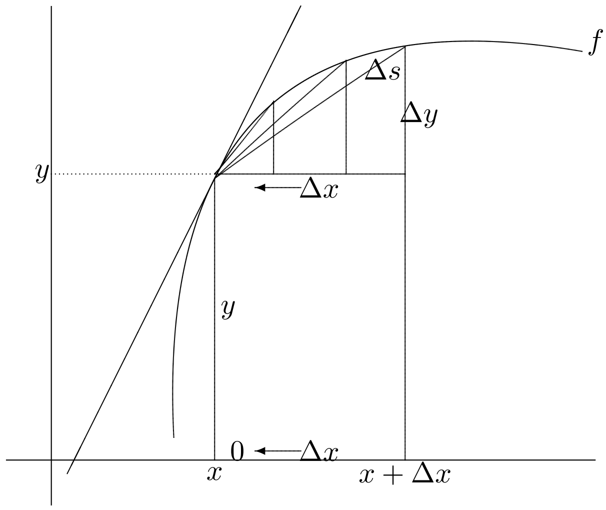
  Erdichtungen? Täuschungen?

  Unsinn? Hirngespinste?

Unglaublich!

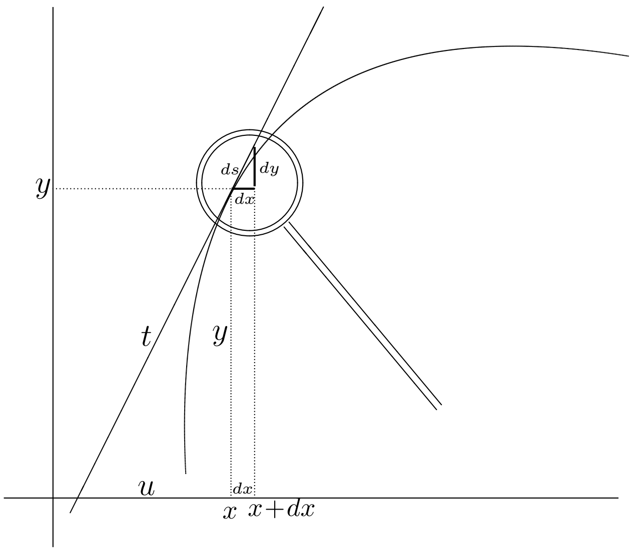
> „[...] heute kann man kaum glauben, dass unendlich kleine Größen bis in die Zeit von Cauchy und Weierstraß, also bis in die Mitte des 19. Jahrhunderts, zum Handwerkszeug der Mathematiker gehörten. Sie sollten [...] niemals (!) die Ausdrücke dy und dx als eigenständige Größen verwenden."

– (Behrends, Analysis I, 2003)



Sekanten-Dreiecke, $\Delta x \to 0$

Charakteristisches Dreieck



Charakteristisches Dreieck bei Leibniz

Leibniz' Auffassung 1684

> „Dennoch aber werden die ds und dx nicht im absoluten Sinne ‚Nichts' sein, da sie zueinander stets das Verhältnis von $t : u$ bewahren, [...]"

- Rechnen mit infinitesimalen Größen.

$$\frac{ds}{dx} = \frac{t}{u}$$

$$ds \cdot u = t \cdot dx$$

$$\frac{t}{ds} = \frac{u}{dx}$$

„Licht"

– Das Dreieck (ds, dx, dy) ist unendlich klein. Im endlichen Dreieck (t, u, y) spiegelt es sich wieder.

Die Verhältnisse der *unendlich kleinen* Seiten zu den *endlichen* Seiten bilden eine

Brücke zwischen der Realität der endlichen Größen und den infinitesimalen Größen.

Hinweis auf eine „Realität“ der Infinitesimalien.

- Nicht nur das Funktionieren, auch die Anschauung und ihre (nur verborgene) Existenz dürften Einfluss gehabt haben auf die Erfolgsgeschichte der Infinitesimalien.

Historische Postulate

- Johann Bernoulli 1691

– *Postulat 1.*
Eine Größe, die vermindert oder vermehrt wird um eine unendlich kleinere Größe, wird weder vermindert noch vermehrt.

– *Postulat 2.*
Jede krumme Linie besteht aus unendlich vielen Strecken, die selbst unendlich klein sind.

– *Postulat 3.*
Eine Figur, die durch zwei Ordinaten, der unendlich kleinen Differenz der Abszissen und dem unendlich kleinen Stück einer beliebigen Kurve begrenzt ist, wird als Parallelogramm betrachtet.

1872

- 1872 – Ende der Erfolgsgeschichte der Infinitesimalien.

  Erfindung der Grenzwerte. Finitisierung.

– Mathematische Löschung der Infinitesimalien.

– Relikte einer mathematisch finsteren Vergangenheit.

2 Ende ....

2.1

Grenzwert 1675?

Wer hat den Grenzwert erfunden?

Leibniz?

„Denn anstelle des Unendlichen oder des unendlich Kleinen nimmt man so große oder so kleine Größen, wie nötig ist, damit der Fehler geringer sei, als der gegebene Fehler, [...] .“

- **Finitisierung** 150 Jahre vor Cauchy?

Grenzwert 1675?

„Denn anstelle des Unendlichen oder des unendlich Kleinen nimmt man so große oder so kleine Größen, wie nötig ist ($< \delta$), damit der Fehler geringer sei, als der gegebene Fehler ($< \varepsilon$), [...] .“

Grenzwert 1675?

Thomas Sonar:

„Man stelle sich vor, das Werk wäre damals publiziert worden. Dann wären den Mathematikern einige Jahrhunderte des Arbeitens auf unsicherem Untergrund erspart geblieben.“ (Spektrum der Wissenschaft 2016)

De Quadratura (1676)

Grenzwert 1821?

Cauchy 1821:

„Unter dieser Voraussetzung ist die Funktion $f(x)$ zwischen den festgesetzten beiden Grenzen der Veränderlichen x eine stetige Funktion dieser Veränderlichen, wenn für jeden zwischen diesen Grenzen gelegenen Wert x der numerische Wert der Differenz $f(x+\alpha)-f(x)$ mit α zugleich so abnimmt, dass er kleiner wird als jede endliche Zahl. Mit anderen **Worten**: *Die Funktion $f(x)$ wird zwischen den gegebenen Grenzen stetig in Bezug auf x sein, wenn zwischen diesen Grenzen ein unendlich kleiner Zuwachs der Veränderlichen stets einen unendlich kleinen Zuwachs der Funktion bewirkt.*“

Grenzwert 1861!

Weierstraß 1861:

„Ist es nun möglich, für h eine Grenze δ zu bestimmen, so daß für alle Werte von h, welche ihrem absoluten Betrag nach kleiner als δ sind, $f(x+h)-f(x)$ kleiner werde als irgendeine noch so kleine Größe ε, so sagt man, dass dieselbe eine *continuierliche Funktion* sei vom Argument, [...] .“

Grenzwert 1861??

„[...] Ist es nun möglich, für h eine Grenze δ zu bestimmen, so daß für alle Werte von h, welche ihrem absoluten Betrag nach kleiner als δ sind, $f(x+h)-f(x)$ kleiner werde als irgendeine noch so kleine Größe ε, so **sagt** man,

*es entsprechen unendlich kleinen Änderungen des Arguments unendlich kleine Änderungen der Funktion. Denn man **sagt**, wenn der absolute Betrag einer Größe kleiner werden kann als irgendeine beliebig angenommene noch so kleine Größe, sie kann unendlich klein werden. Wenn nun eine Funktion so beschaffen ist, daß unendlich kleine Änderungen des Arguments unendlich kleine Änderungen der Funktion entsprechen, so sagt man,*

dass dieselbe eine *continuierliche Funktion* sei [...] .“

Grenzwert 1861??

Man sagte „Grenzwert“ und dachte „Infinitesimalien“.

- Man *sagte*
- – „kleiner als irgendeine noch so kleine Größe ε“,
- – „kleiner als jedes vorgegebene ε“.
- Man *dachte*
- – „kleiner als alle ε“.
- „Definition“ von „infinitesimal“:

  α ist unendlich klein, wenn $\forall\varepsilon\,(\alpha < \varepsilon)$.

Grenzwert 1861??

???

- – Das Dialogische musste logisch werden.
- – Die Vorstellung des *Vorgebens einzelner Elemente* war nicht unterschieden von der Vorstellung der *Vorgabe „aller“ Elemente*.

Die logische Struktur in den Formulierungen war unklar.

Grenzwert 1861??

- $\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0\, \forall h\, (|h| < \delta \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| < \varepsilon)$.

- – $\forall\varepsilon$? $\forall h$?
- – Welche sind „alle“?
- – Worüber erstreckt sich der Quantor $\forall$?

- – Unendliche Bereiche!

- Die Finitisierung wartete auf die infiniten Mengen.

Grenzwerte 1872!!

- Cantor erfand die unendlichen Mengen.
- Die reellen Zahlen wurden 1872 konstruiert,
- – damit Grenzwerte Zahlen sind.
- – Die reellen Zahlen wurden in die geometrische Gerade projiziert.
- – Die reellen Punkte auf der Geraden wurden zu **den** Punkten der Geraden erklärt.
- Die *Zahlengerade* war erfunden.

- $\mathbb{R}$ wurde das mathematische Kontinuum.
  - Neben den reellen Zahlen war kein Platz.
- Infinitesimalien wurden undenkbar.

Entfernung der Infinitesimalien

- Das Aus für die Infinitesimalien.

  Cantor schreibt an Giulio Vivanti 1893:
  - von „[...] papiernen Größen, die gar keine andere Existenz haben als auf dem Papiere ihrer Entdecker und Anhänger" und
  - vom Infinitesimalen als dem „infinitären Cholera-Bazillus der Mathematik".

Der weite Weg zu den Grenzwerten

- Stationen auf dem Weg
  - Mengen wurden unendlich.
  - Der Zählprozess wurde zur Menge $\mathbb{N}$.
  - Folgen wurden Mengen.
  - Das lineare Kontinuum wurde zur Kopie von $\mathbb{R}$.
  - Funktionen wurden Wertetabellen.
  - Prozesse, „Werden", „Streben" wurden statisch.

- Zusammen: Revolution im mathematischen Denken.

Der weite Weg zu den Grenzwerten

- Die Grenzwerte hatten ihren „sicheren Untergrund" erst in den reellen Zahlen gefunden.

- Bis dahin brauchte es „einige Jahrhunderte".

  - „Man stelle sich vor, das Werk wäre damals (1676) publiziert worden. Dann wären den Mathematikern einige Jahrhunderte des Arbeitens auf unsicherem Untergrund erspart geblieben." (Sonar 2016)

Kommentar

- „Geschichtsschreibung ist rückwärtsgekehrte Prophetie." (*Frei nach Friedrich Schlegel, Athenaeum I (1798)*)

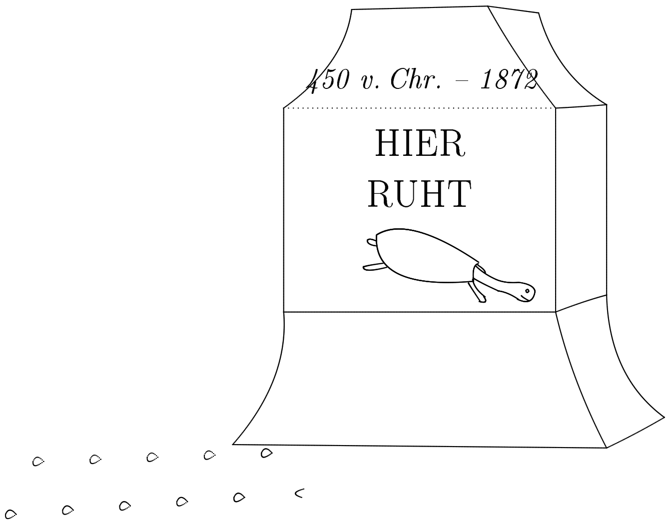
- Herbert Breger (2009):

„Was seine [Leibniz'] Differential- und Integralrechnung anlangt, so kann man ihr nicht gerecht werden, wenn man sie mit der Brille der Mathematik der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts betrachtet.“

3 Rückkehr

3.1

Verschwinden



In der Unterwelt

- Mathematische Entsorgung der Infinitesimalien.

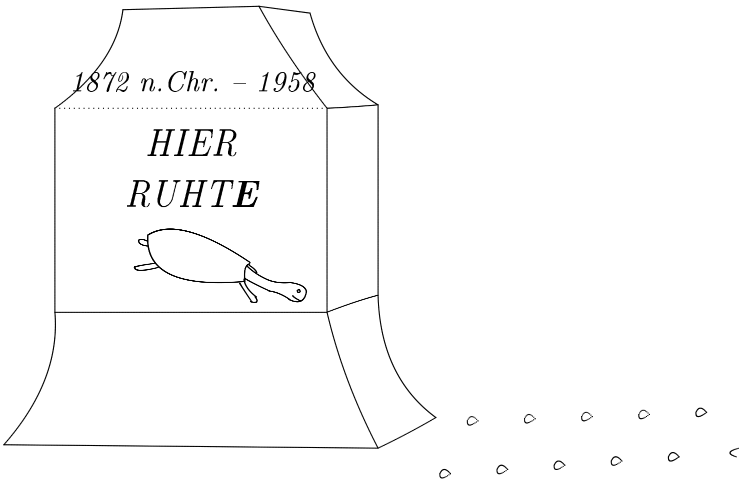
  Weiterleben im mathematischen Untergrund:

– im Unterbewusstsein, heuristisch, heimlich,

– in der Physik,

- in der Schule.

Comeback



Anekdote

– Liebe Mathematikerinnen,
ich bin in der 6. Klasse und wir haben gerade periodische Dezimalbrüche durchgenommen. Wir haben gelernt: $\frac{1}{9} = 0.111\ldots$, $\frac{3}{9} = 0.333\ldots$ usw. Was aber ist dann $0.999\ldots$? Unsere Lehrerin hat gesagt, das wäre $\frac{9}{9}$. Das kann aber doch nicht sein. Das wäre doch 1 und $0.999\ldots$ ist doch ein Unendlichstel kleiner als 1. Gibt es $0.999\ldots$ überhaupt? Aber eine Zahl, die ich mir ausdenken kann, muss es doch geben. Wie kommt man zu $0.999\ldots$?
Ich würde mich über eine Antwort freuen.
Lina

Anekdote

– Ein Mathematiker spendet „Trost" – „so er denn überhaupt nötig ist."

– „Später wirst Du lernen, dass ein Unendlichstel gleich Null ist."

Quellen

– *Mitteilungen der DMV 2 u. 3/2003*, S. 14.

Inzwischen abgedruckt in dem Buch

– *π & Co. – Kaleidosskop der Mathematik*, hrsg. 2008 von E. Behrends, P. Gritzmann, G.M. Ziegler, S. 88–91.

Quellen

– A. Beutelspacher: *Kleines Mathematikum – Die 101 wichtigsten Fragen und Antworten zur Mathematik*, C.H. Beck, 2. Auflage 2010.

– Frage 61: $0,999\ldots = 1$?

– Antwort: „Denn tatsächlich ist $0,999\ldots$ gleich 1."

– Denn: „Der Abstand wird kleiner als jede Zahl, die wir uns ausdenken können."

Untersuchung 2011

256 Gymnasiasten	Kl. 7 bis 12		
a) $0,999\ldots < 1$	b) $0,999\ldots = 1$	Enthaltung	ungültig
$72,2\%$	$31,6\%$	$3,1\%$	$4,3\%$

50 Studierende	ab 3. Sem.		
a) $0,999\ldots < 1$	b) $0,999\ldots = 1$	Enthaltung	ungültig
50%	50%	0%	0%

Braunschweig 2013

– *51 Studierende aller Lehrämter mit dem Fach Mathematik*

a) $0,999\ldots < 1$	b) $0,999\ldots = 1$	Enthaltung	ungültig
$90,2\%$	$9,8\%$	0%	0%

Problem?

$0,9999999999999999999999999999999999999999\ldots$

– Die Folge $0,9$; $0,99$; $0,999$; $0,9999$; …strebt gegen 1.

- a) 1 erreicht sie nie!

- b) Doch!

4 $0,999\ldots\ = 1$ oder $0,999\ldots\ < 1$?

4.1

$0,999\ldots\ = 1$. *Wieso?*

– „Haben wir mal gelernt."

– „Weil es fast schon 1 ist."

– „$0,999\ldots\ = 1$ weil die Zahl die fehlt, so unendlich klein ist."

– „Da die $0,999\ldots$ ins Unendliche geht und sich der 1 annähert, kann man sagen, dass $0,999\ldots\ = 1$."

– „Irgendwann nach zig $0,999\ldots999$ wird $0,999\ldots$ zu 1."

$0,999\ldots = 1$? *Beweise?*

– Beweis 1:

$$\begin{array}{rrcrcl} & 10 & \cdot & 0,999\ldots & = & 9,999\ldots \\ - & 1 & \cdot & 0,999\ldots & = & 0,999\ldots \\ \hline & 9 & \cdot & 0,999\ldots & = & 9 \\ & & & 0,999\ldots & = & 1 \end{array}$$

– Beweis 2:

$$\begin{array}{rcrcl} & & \frac{1}{3} & = & 0,333\ldots \\ 3 & \cdot & \frac{1}{3} & = & 0,999\ldots \\ \hline & & 1 & = & 0,999\ldots \end{array}$$

$0,999\ldots = 1$*? Beweise?*

– Beweis 3:

Berechnung das arithmetischen Mittels

$$\begin{array}{rcrcl} 1 & + & 0,999\ldots & = & 1,999\ldots \\ 1,999\ldots & : & 2 & = & 0,999\ldots \end{array}$$

Das arithmetische Mittel von $0,999\ldots$ und 1 ist $0,999\ldots$.

„[...], also liegt zwischen $0,999\ldots$ und 1 gar keine weitere Zahl. Somit stellen auch $0,999\ldots$ und 1 denselben Zahlenwert dar.“

$0,999\ldots = 1$*? Beweise*

– Beweis 4: $$0,9 + 0,09 + 0,009... = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{9}{10^i} = 1\,,$$

da für die Folge (s_n) der Partialsummen $s_1 = 0,9$; $s_2 = 0,99$; $s_3 = 0,999$ usw. gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ (|1 - s_n| < \varepsilon)$

– Analysis I

$0,999\ldots = 1$*? Probleme*

– Problem (i): Schreib- und Rechenweise im Beweis 1

$9,999\ldots - 0,999\ldots =$

$$\begin{array}{rrcrcrcl} & (9 & + & 0,9 & + & 0,09 & + & \ldots) \\ - & (0,9 & + & 0,09 & + & 0,009 & + & \ldots) \\ \hline & 8,1 & + & 0,81 & + & 0,081 & + & \ldots \end{array}$$

Nebenrechnung:

$$(8,91 \quad ; \quad 8,991 \quad ; \quad 8,9991 \quad ; \quad \ldots)$$

$= 8,999\ldots$

$0,999\ldots = 1$*? Probleme*

Beweis 1 richtig:

$$\begin{array}{rrcrcl} & 10 & \cdot & 0,999\ldots & = & 9,999\ldots \\ - & 1 & \cdot & 0,999\ldots & = & 0,999\ldots \\ \hline & 9 & \cdot & 0,999\ldots & = & 8,999\ldots \\ & & & 0,999\ldots & = & 0,999\ldots \end{array}$$

$0,999\ldots = 1$*? Probleme*

– Problem (ii): Ist im Beweis 2 wirklich $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$??

– Problem (iii): Schreib- und Rechenweise in Beweis 3

– Problem (iv): Der Begriff „Grenzwert“ im Beweis 4
  „Grenzwert wird nicht erreicht!“

$0,999\ldots < 1$*? Wieso?*

– „Mathematisch ist $0,999\ldots = \frac{9}{9} = 1$. Da man aber unendlich viele 9er Stellen hintendran stellen kann, ist diese Zahl immer kleiner als 1.“

– „Weil es fehlt der Zahl $0,99999999\ldots$ die Zahl 0,00000000000..1 um genau 1 zu sein.“

– „Zwar ∞ aber auch immer 1 weniger als 1.“

– „$0,999\ldots$ ist kein Ganzes. 1 ist ein Ganzes.“

– „Woas i ned.“

$0,999\ldots < 1$*? Beweis?*

$0,999\ldots$ vergleichen mit 1 heißt:

$0,9$ mit 1, dann $0,99$ mit 1, dann $0,999$ mit 1; $\ldots$ vergleichen,

$(0,9; 0,99; 0,999; \ldots)$ vergleichen mit $(1; 1; 1; \ldots)$.

$(0,9; 0,99; 0,999; \ldots) < (1; 1; 1; \ldots)$!

- Also: $0,999\ldots < 1$.

$0,333... < \frac{1}{3}$? *Beweis?*

$0,333...$ vergleichen mit $\frac{1}{3}$ heißt

$0,3$ mit $\frac{1}{3}$, dann $0,33$ mit $\frac{1}{3}$, dann $0,333$ mit $\frac{1}{3}$; $\ldots$ vergleichen,

$(0,3; 0,33; 0,333; \ldots)$ vergleichen mit $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \ldots)$.

$0,3 < \frac{1}{3}; \quad 0,33 < \frac{1}{3}; \quad 0,333 < \frac{1}{3}; \quad \ldots$

$(0,3; 0,33; 0,333; \ldots) < (\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \ldots)$.

- Also: $0,333... < \frac{1}{3}$?

$0,999\ldots < 1$? *Etwas Mathematik*

- Bereich *aller* Folgen reeller Zahlen, durch $<$ angeordnet.

- Körper der hyperreellen Zahlen $^*\mathbb{R}$ (Schmieden/Laugwitz 1958, Robinson 1961)

- Die Konstanten Folgen $(r; r; r; \ldots)$ sind die reellen Zahlen.

- *Definition*: $(a_1; a_2; a_3; \ldots) < (b_1; b_2; b_3; \ldots)$ genau dann, wenn $a_i < b_i$ für alle oder für *fast alle* i.

- Es gilt: $0,333... < \frac{1}{3}$ und $0,999\ldots < 1$!

Antwort

- Ist $0,999\ldots < 1$ oder $0,999\ldots = 1$?

- Antwort: **Beides!**

- Grenzwertmathematik: $0,999\ldots = 1$

- Infinitesimalmathematik: $0,999\ldots < 1$

Tatsächlich versus theoretisch

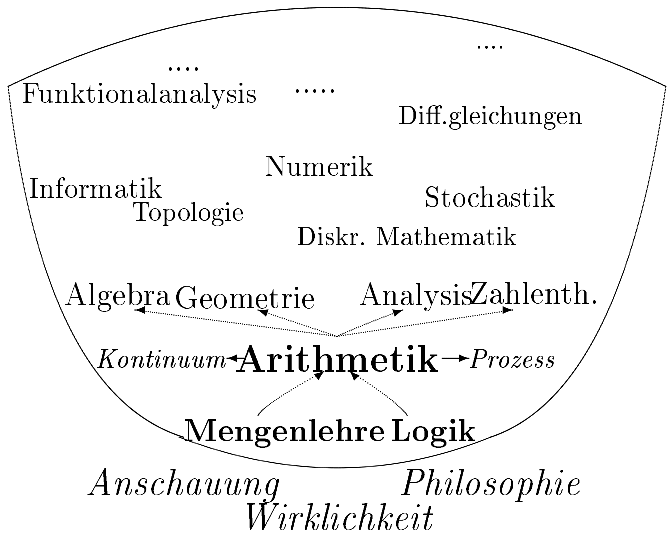
$0,999\ldots$ ist *weder* wirklich *noch* tatsächlich gleich 1.

$0,999\ldots$ ist weder *wirklich* noch *tatsächlich* kleiner als 1.

$\mathbb{R}$ **und** $^*\mathbb{R}$ sind „nur“ Modelle des linearen Kontinuums.

$0,999\ldots$ ist **theoretisch** gleich 1,
und
$0,999\ldots$ ist **theoretisch** kleiner als 1.

Mathematische Rückkehr der Infinitesimalien



Arithmetische Rückkehr – Prinzip

Mengenlehre und Logik wurden erfunden wurden, um die Infinitesimalien zu entfernen.

Die gleiche Mengenlehre und Logik haben die Infinitesimalien neu erfunden.

Als Zahlen, als „hyperrelle Zahlen“.

Arithmetische Rückkehr – Prinzip

- Zahlbereichserweiterung.

– $\mathbb{R}$ wird erweitert zu ${}^*\mathbb{R}$.

– Angeordneter Körper ${}^*\mathbb{R}$ der hyperreellen Zahlen.

- Nonstandard. Nichtstandard.

Theoretische Rückkehr – der logische Weg

- Man nehme als ${}^*\mathbb{R}$ ein Nichtstandardmodell von $\mathbb{R}$.

Theoretische Rückkehr – der logische Weg

– Man nehme den angeordneten Körper $\mathbb{R}$.

– Man nehme $Th(\mathfrak{R})$, das sind alle arithmetischen Sätze über $\mathbb{R}$.

– Man nehme $\Psi = Th(\mathfrak{R}) \cup \{0 < \underline{x}, 1 < \underline{x}, 2 < \underline{x}, \ldots\}$.

– Jede endliche Teilmenge von Sätzen in Ψ ist gemäß einer Interpretation β mit einem ausreichend großen $\beta(x)$ erfüllt.

– Man nehme den *Endlichkeitssatz*:

– Es gibt ein Modell $\mathfrak{B}$ von $\Psi = Th(\mathfrak{R}) \cup \{0 < x, 1 < x, 2 < x \ldots\}$.

– Es ist $\mathfrak{B} \models Th(\mathfrak{R})$ und $\beta(x) > n$ für alle n.

– $\mathfrak{B}$ ist nichtarchimedisch. Den Grundbereich nenne man ${}^*\mathbb{R}$.

– Es gibt unendlich große und unendlich kleine Zahlen.

Theoretische Rückkehr – der mengentheoretische Weg

– Man nehme $\mathbb{R}$.

– Man nehme $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, die Menge aller Folgen (a_n).

– Man definiere eine geeignete Äquivalenzrelation.

– Man definiere ${}^*\mathbb{R}$ als die Menge aller Klassen.

Theoretische Rückkehr – der mengentheoretische Weg

– Man nehme Cof, die Menge aller cofiniten Teilmengen von $\mathbb{N}$, das sind die Teilmengen, deren Komplement endlich ist.

– Man nehme das Ideal $V = \{(c_n) \mid \{n \mid c_n = 0\} \in Cof\}$.

– Cof ist ein freier Filter.

– Man nehme das Zornsche Lemma.

– Man nehme in der geordneten Menge aller feineren Filter als Cof den maximalen Filter U.

– Man nehme das maximale Ideal V_u.

– Man nehme ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/V_u$.

– ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/V_u$ ist ein angeordneter, nichtarchimedischer Körper.

– Es gibt unendlich große und unendlich kleine Zahlen.

5 Gegenwart .....

5.1

Altes und Neues

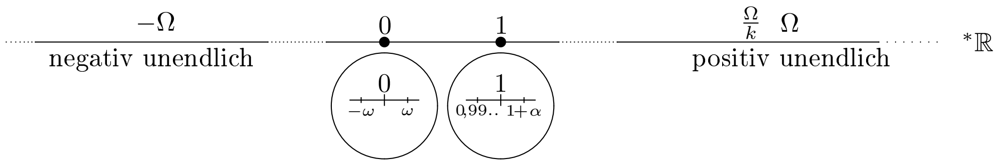
- Rechnen wie bisher. ${}^*\mathbb{R}$ ist ein Körper wie die reellen Zahlen.

- Nichtarchimedisch:

  Es gibt unendliche kleine Zahlen. $\alpha < r$ für alle positiven reellen Zahlen.

  Es gibt unendlich große Zahlen. $\mu > r$ für alle positiven reellen Zahlen.

- Neue Anschauung:



Hyperreelle Zahlen

- Sprech- und Schreibweisen

  Unendlich kleine, infinitesimale Zahlen. $dx \approx 0,\ \alpha \approx 0.$

  Unendlich nah: $\alpha \approx \beta$, wenn $\alpha - \beta \approx 0$.

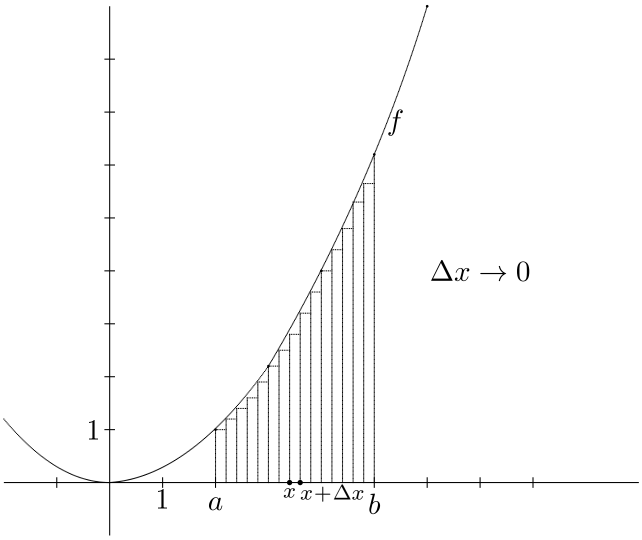
  Unendlich große, infinite Zahlen. $\mu \gg 1.$

  Beschränkte Zahlen. $\gamma < n \in \mathbb{N}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

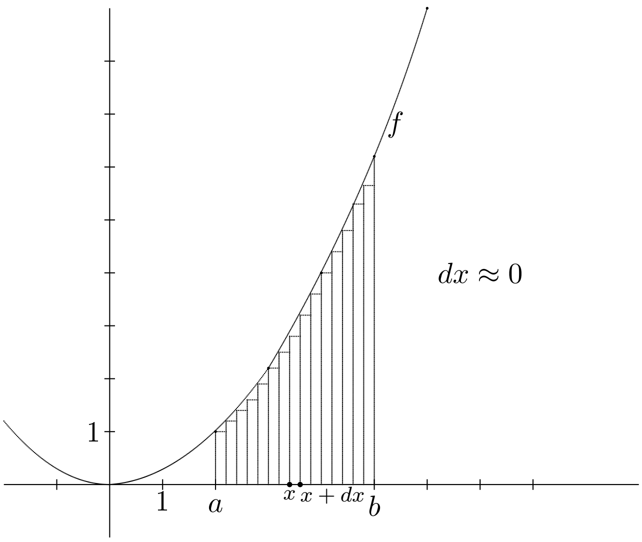
- **Standardteil**.

  Jede beschränkte hyperreelle Zahl liegt unendlich nah zu einer reellen Zahl.

Beispiel: Integral



Beispiel: Integral



Integral

dx ist unendlich klein.

μ, die Zahl der Intervalle, ist unendlich groß.

$a + \mu \cdot dx = b$, $x_k = a + k \cdot dx$.

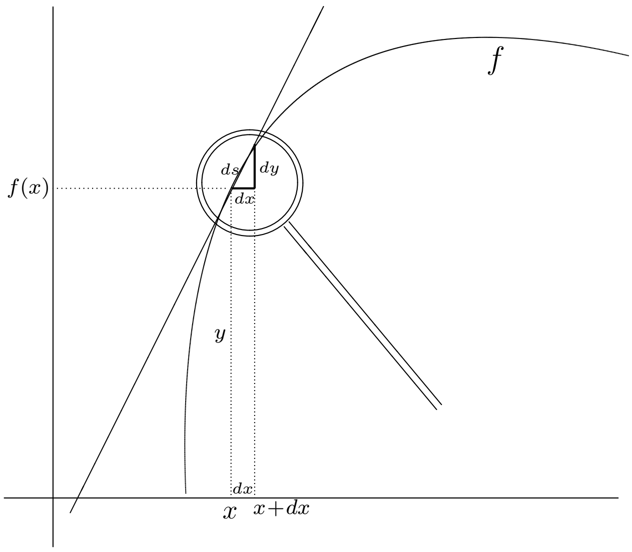
Fläche der Streifen: $dx \cdot f(x_k)$.

Die Fläche unter der Kurve:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{\mu} f(a + k \cdot dx) \cdot dx \ .$$

Das Integral ist der Standardteil der unendlichen Summe.

Differentialquotient



Differentialquotient und Ableitung

$$dy = f(x+dx) - f(x)$$

- Differentialquotient: $\dfrac{dy}{dx}$

- Ableitung: $f'(x) \approx \frac{dy}{dx}$
  Die Ableitung ist der Standardteil des Differentialquotienten.

Differentialquotient und Ableitung

Standardbeispiel $f(x) = x^2$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x_o+dx)-f(x_o)}{dx} = \frac{(x_o+dx)^2-x_o^2}{dx} = \frac{x_o^2+2x_odx+dx^2-x_o^2}{dx} = 2x_o + dx$$

$$f'(x) = 2x_o \approx \frac{dy}{dx}$$

Stetigkeit

f heißt **stetig**, wenn $f(x) \approx f(x+dx)$ für infinitesimale dx.

Kettenregel

$y = f(x)$, $z = g(y)$ differenzierbar.

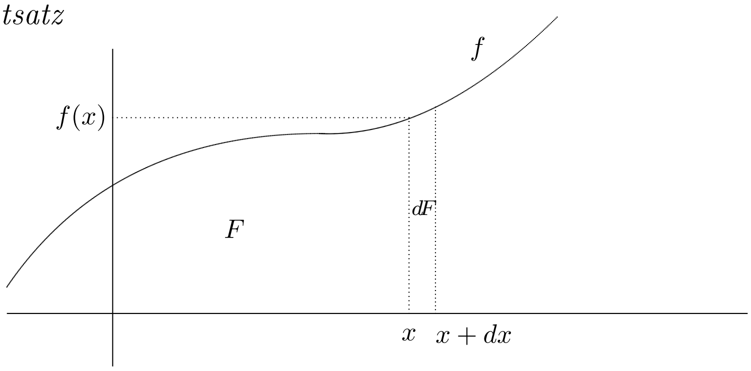
$z = \varphi(x) = g(f(x))$.

$dy = f(x + dx) - f(x)$, $\qquad dz = g(y + dy) - g(y)$.

$\frac{dz}{dy} \approx g'(y)$, $\qquad \frac{dy}{dx} \approx f'(x)$.

Aus
$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$
folgt
$$\varphi'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Hauptsatz



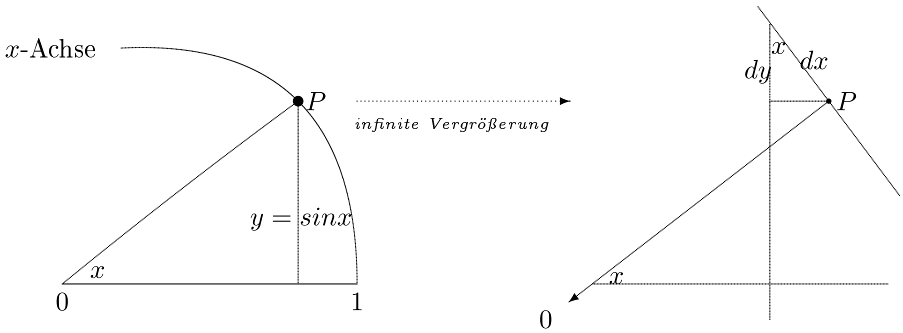
$dF = F(x + dx) - F(x)$.

f ist im Intervall $[x, x + dx]$ „$\approx$ konstant“.

$dF \approx f(x) \cdot dx$,

also $F'(x) \approx \frac{dF}{dx} \approx f(x)$.

$\sin'(x)$*:*



In der infiniten Vergrößerung wird der Kreis lokal gerade.

Man sieht: $\sin'(x) \approx \frac{dy}{dx} = \cos(x)$.

Infinite Vergrößerung

Karl Kuhlemann:

Über die Technik der infniten Vergrößerung und ihre mathematische Rechtfertigung (2017)

Mathematisch legitime Technik ist.

Man darf das – gedankliche und ideale – Infinitesimale veranschaulichen.

Leibniz hat dies intuitiv getan.

6 Schluss

6.1

Frage

Widerstand?

„Das Widerstreben, mit dem diese Vorstellungen schließlich aufgegeben wurden, war tief verwurzelt in der philosophischen Einstellung der damaligen Zeit und in dem Wesen des menschlichen Geistes überhaupt." (Courant 1941)

Widerstand

- Zweifelhafter Ruf der Logik:

– Unbequem.

– Pathologisch.

– Unvollständigkeit, fehlende Widerspruchsfreiheit, Nichtaxiomatisierbarkeit, Nichtentscheidbarkeit??

– Uninteressant.

– Irrelevant.

– Unabhängigkeit??

– Unangenehm.

– Nonstandard **und** Standard?

– Paradox.

Widerstand

- Mengentheoretisches Glaubensbekenntnis:

– Das Kontinuum ist eine Punktmenge.

– Das lineare Kontinuum ist $\mathbb{R}$. Zahlengerade!

– $0,999\ldots = 1$.

– Achilles überholt die Schildkröte.

– Der Pfeil ruht.

– Punkte sind

objektiv,

ausdehnungslos.

Zurück ins 17. Jahrhundert?

- Zurück ?
- – Gedanklich, anschaulich: Ja.
- – Mathematisch: Nein!

- – Infinitesimalien waren Größen und wurden Zahlen.
- – Mit modernen Methoden
- – über die reellen Zahlen hinaus.

Wozu?

- – Traditionelles Element des mathematischen Denkens.
- – Erweiterung des mathematischen Instrumentariums.
- – Erweiterung der Analysis.
- – Arithmetik statt Grenzwertformalismus.

- – Analysisunterricht ohne Grenzwerte.
- – Alternative und Bereicherung in der elementaren Lehre.

Appell

- – Die reellen Zahlen sind 150 Jahre alt.
- – Rücktritt??
- Nein!
  $\mathbb{R}$ ist der Ausgangs- und Bezugspunkt.
- – Erweiterung! Bereicherung! Anti-Aging

- Standard braucht Nonstandard!

- *Unterricht und Lehre brauchen neue Zahlen.*