EIN WEG DURCH DIE UNENDLICHKEIT

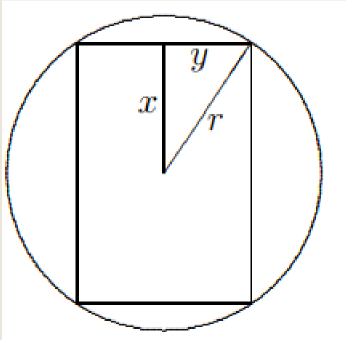
Wie kann eine Epoche zur Differenzialrechnung in der 12. Klasse gelingen?

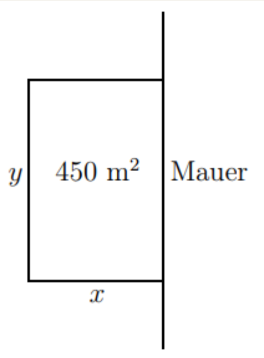
Alexandra Schäfer – 18. Januar 2025

Worum es geht – Schöne Beispiele…

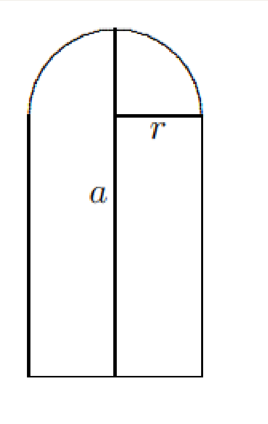
…aus Karlsruhe, Stuttgart und Kassel …

- Die Optimierungsaufgaben von Herrn Hutter





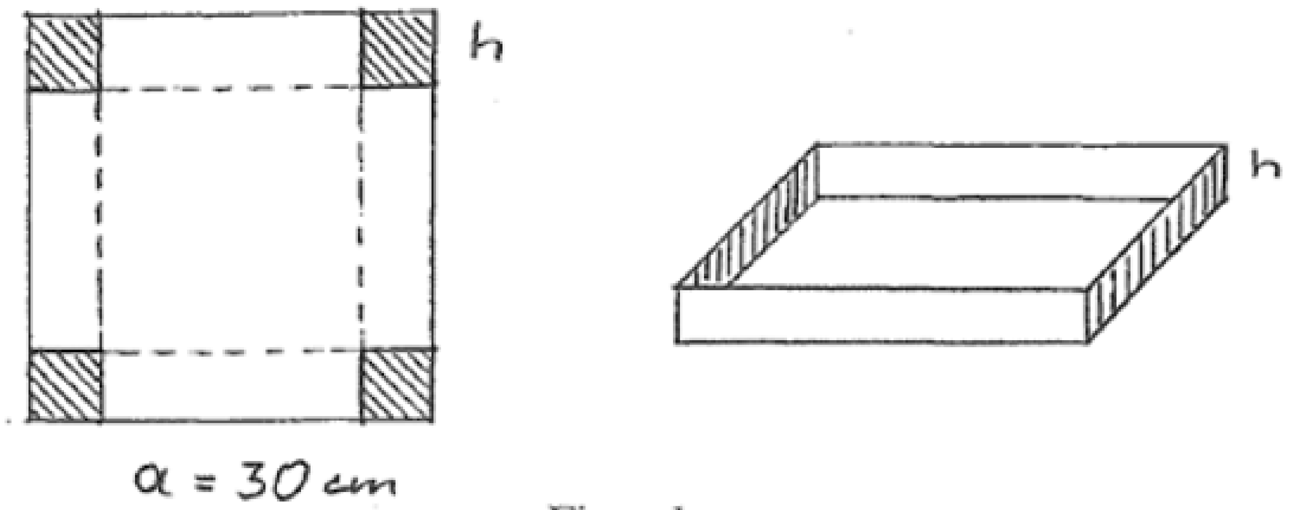
$r = 3,1$	$\Rightarrow$	$O(3,1) \approx 141,525371$
$r = 3,01$	$\Rightarrow$	$O(3,01) \approx 141,3732367$
$r = 3,001$	$\Rightarrow$	$O(3,001) \approx 141,3716851$
$r = 3,0001$	$\Rightarrow$	$O(3,0001) \approx 141,3716696$
$r = 3,00001$	$\Rightarrow$	$O(3,00001) \approx 141,3716694$
$r = 3,000001$	$\Rightarrow$	$O(3,000001) \approx 141,3716694$
		$\dots$
$r = 2,999999$	$\Rightarrow$	$O(2,999999) \approx 141,3716694$
$r = 2,99999$	$\Rightarrow$	$O(2,99999) \approx 141,3716694$
$r = 2,9999$	$\Rightarrow$	$O(2,9999) \approx 141,3716696$
$r = 2,999$	$\Rightarrow$	$O(2,999) \approx 141,3716851$
$r = 2,99$	$\Rightarrow$	$O(2,99) \approx 141,3732437$
$r = 2,9$	$\Rightarrow$	$O(2,9) \approx 141,5323601$



Worum es geht – Schöne Beispiele…

…aus Karlsruhe, Stuttgart und Kassel …

- Die Schachteln von Thomas Neukirchner

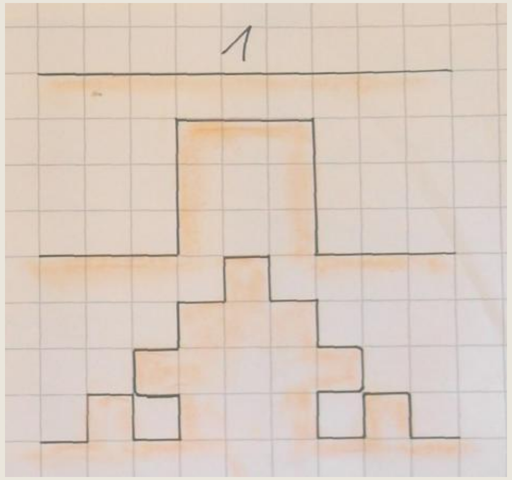


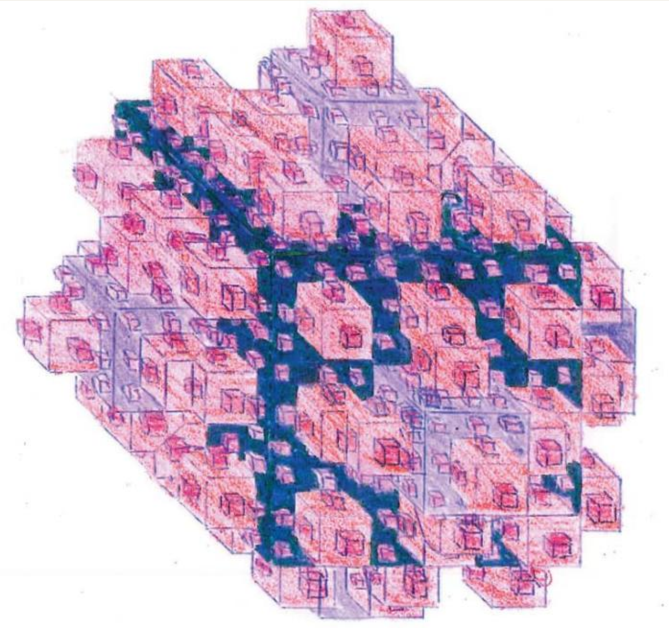
Figur 1

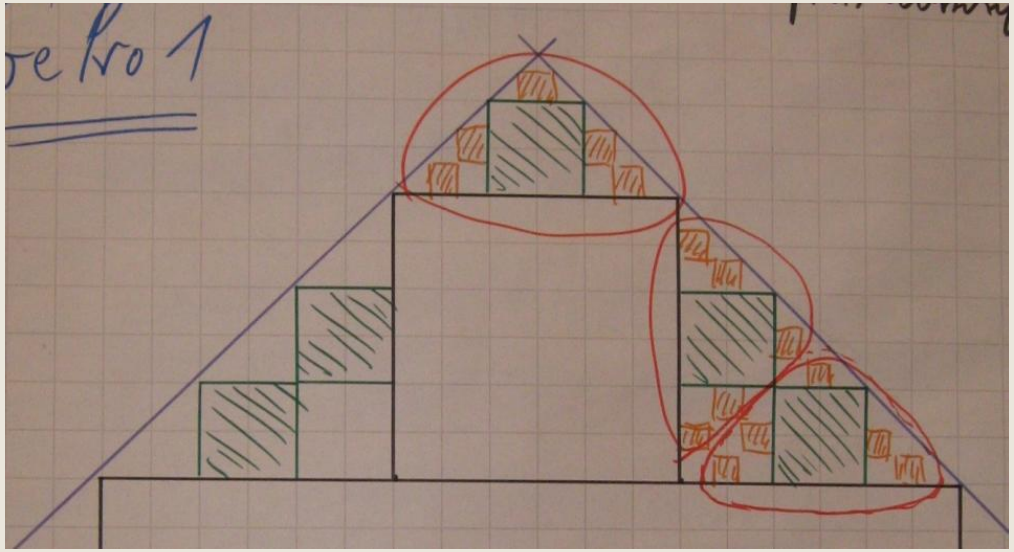
Worum es geht – Schöne Beispiele…

…aus Karlsruhe, Stuttgart und Kassel …

- Die Fraktale von Herrn Rosbigalle







WER DIE WAHL HAT, HAT DIE QUAL

Warum überhaupt Qual? Das ist doch eher ein Schlaraffenland!

MEINE GANZ EIGENE OPTIMIERUNG

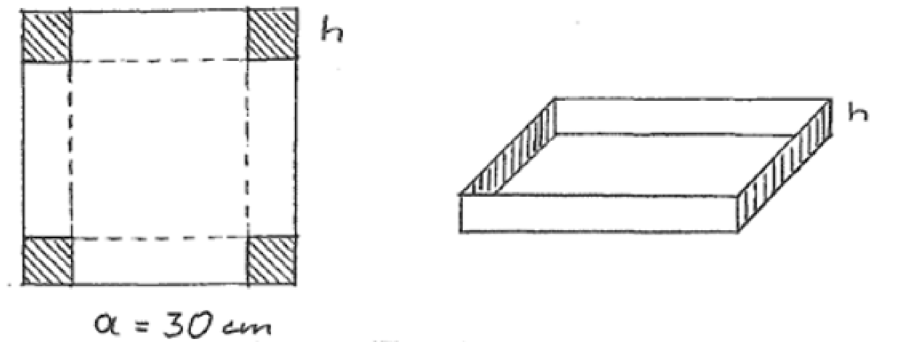
Die Creme de la Creme? – Entscheidet selbst

EINBLICKE
VOM SCHWEREN ZUM LEICHTEN

in die drei Optimierungen …
… des Rechenweges
… des Übergangs von den Extremwertraufgaben zur lokalen Änderung
… der Schreibweise

Optimierung des Weges

...Erster Weg bei den geometrischen Aufgaben ...



Figur 1

Formel

$$V(h) = (30-2h)^2 \cdot h$$

Tabelle

$H\ddot{o}he\ h\ [cm]$	$Breite$	$Volumen\ [cm^3]$
1	28	$1 \cdot 28 \cdot 28 = 784$
2	26	$2 \cdot 26 \cdot 26 = 1.352$
3	24	$3 \cdot 24 \cdot 24 = 1.728$
4	22	$4 \cdot 22 \cdot 22 = 1.936$
5	20	$5 \cdot 20 \cdot 20 = 2.000$
6	18	$6 \cdot 18 \cdot 18 = 1.944$
7	16	$7 \cdot 16 \cdot 16 = 1.792$
8	14	$8 \cdot 14 \cdot 14 = 1.568$
9	12	$9 \cdot 12 \cdot 12 = 1.296$
10	10	$10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$

Vermutung

Einschachtelung

$H\ddot{o}he\ h\ [cm]$	$Breite$	$Volumen\ [cm^3]$
4,8	20,4	$4{,}8 \cdot 20{,}4 \cdot 20{,}4 = 1997{,}568$
4,9	20,2	$4{,}9 \cdot 20{,}2 \cdot 20{,}2 = 1.999{,}396$
5,1	19,8	$5{,}1 \cdot 19{,}8 \cdot 19{,}8 = 1.999{,}404$
5,2	19,6	$5{,}2 \cdot 19{,}6 \cdot 19{,}6 = 1.997{,}632$

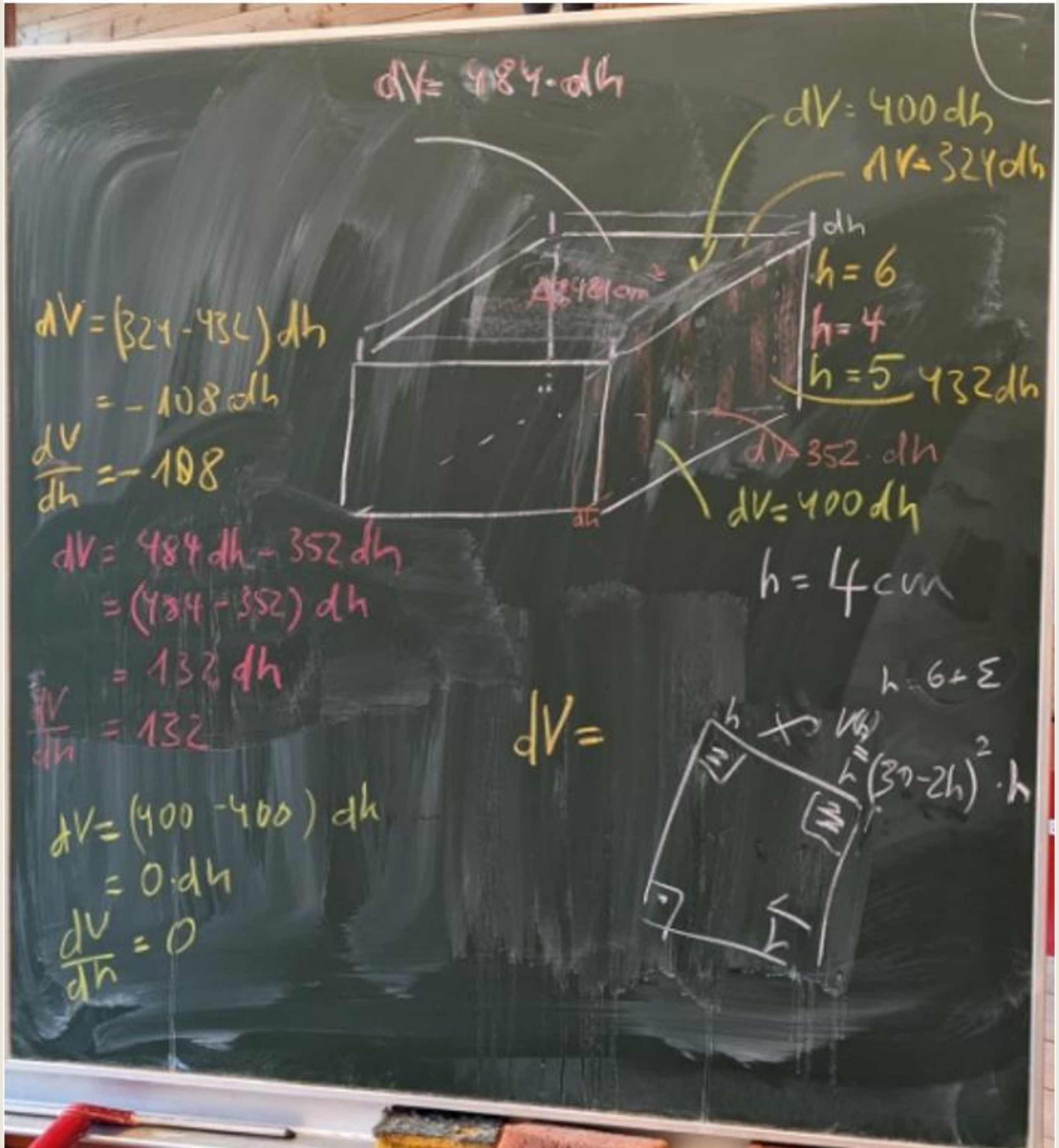
Beweis der Vermutung über ΔV

$$V(5+\varepsilon) = (20-2\varepsilon)^2 \cdot (5+\varepsilon) \qquad \text{mit } \varepsilon = \Delta h$$

$$= 2.000 - 60\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3$$

$$= 2.000 - \varepsilon^2 \cdot (60 - 4\varepsilon)$$

$\rightarrow$ *$V(5)$ ist das größte Volumen!*



Vergleich der Zu – und Abnahme der Deckel – und Wandflächen:

$$V(4+\varepsilon) = (22-2\varepsilon)^2 \cdot (4+\varepsilon)$$
$$= 1.936 + 132\varepsilon - 72\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3$$
$$\Delta V = \left(132 - 72\varepsilon + 4\varepsilon^2\right) \cdot \varepsilon$$
$$\Delta V = \left(132 - 72\varepsilon + 4\varepsilon^2\right) \cdot \Delta h$$

→ $$dV = \left(132 - 72\varepsilon + 4\varepsilon^2\right) \cdot dh$$

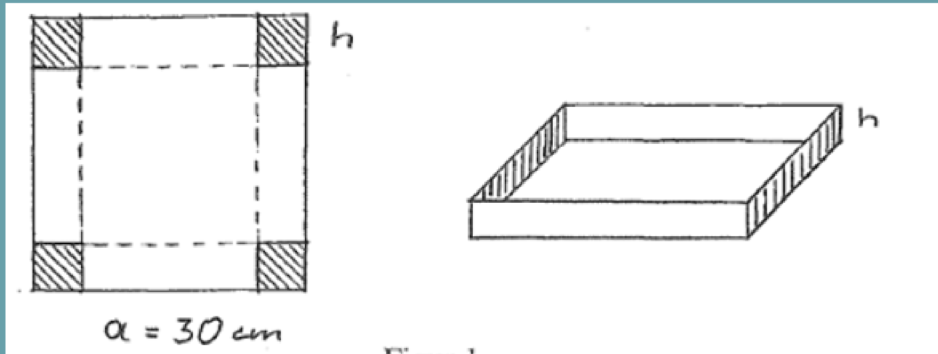
$$dV = \left(132 - \cancel{72\varepsilon} + \cancel{4\varepsilon^2}\right) \cdot dh$$
$$dV = 132 \cdot dh$$
$$\frac{dV}{dh} = 132$$
$$V(6+\varepsilon) = (18-2\varepsilon)^2 \cdot (6+\varepsilon)$$
$$= 1.944 - 108\varepsilon - 48\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3$$
$$\Delta V = \left(-108 - 48\varepsilon + 4\varepsilon^2\right) \cdot \varepsilon$$
$$\Delta V = \left(-108 - 48\varepsilon + 4\varepsilon^2\right) \cdot \Delta h$$

→ $$dV = \left(-108 - 48\varepsilon + 4\varepsilon^2\right) \cdot dh$$

$$dV = \left(-108 - \cancel{48\varepsilon} + \cancel{4\varepsilon^2}\right) \cdot dh$$
$$dV = -108 \cdot dh$$
$$\frac{dV}{dh} = -108$$
$$V(6+\varepsilon) = \frac{dV}{dh} = 0$$

Optimierung des Weges

...zweiter Weg allgemeine Betrachtungsweise ...



Figur 1

Keine Tabelle, keine Vermutung, keine Einschachtelung, kein Beweis
-> Verwendung der gewonnenen Erkenntnisse:

Allgemeine Betrachtungsweise mit Buchstaben statt Zahl

Formel

$$V(h) = (30 - 2h)^2 \cdot h = 900h - 120h^2 + 4h^3$$

$$V(h + \varepsilon) = (30 - 2(h + \varepsilon))^2 \cdot (h + \varepsilon)$$

...

$$V(\mathrm{h} + \mathrm{\varepsilon}) = 900h + 900\mathrm{\varepsilon} - 120h^2 - 240h\mathrm{\varepsilon} - 120\mathrm{\varepsilon}^2 + 4h^3$$
$$+12h^2\mathrm{\varepsilon} + 12h\mathrm{\varepsilon}^2 + 4\mathrm{\varepsilon}^3$$

Differenzbildung ΔV

$$\Delta V = 900\mathrm{\varepsilon} - 240h\mathrm{\varepsilon} - 120\mathrm{\varepsilon}^2 + 12h^2\mathrm{\varepsilon} + 12h\mathrm{\varepsilon}^2 + 4\mathrm{\varepsilon}^3$$

Differenzial

$$\frac{dV}{dh} = 900 - 240h + 12h^2$$

Differenzial gleich Null setzen

$$\frac{dV}{dh} = 900 - 240h + 12h = 0$$

-> eigentlich kürzer

..... jedoch sehr mühsam

Dann kam der Toilettendeckel

… und alles wurde anders …

„Wie breit muss der Toilettendeckel sein, wenn er eine gesamte Fläche von $1234\ cm^2$ *einnehmen soll, und der Umfang minimal sein soll?“*

- Die bisher gegangenen Wege wollten nicht mehr klappen bzw. waren ja soooo mühsam, denn …

Dann kam der Toilettendeckel

… und alles wurde anders …

„Wie breit muss der Toilettendeckel sein, wenn er eine gesamte Fläche von $1234\ cm^2$ einnehmen soll, und der Umfang minimal sein soll?“

- Die bisher gegangenen Wege wollten nicht mehr klappen bzw. waren ja soooo mühsam, denn …

$b\ [cm]$	$U_{Deckel}\ [cm]$
10	264,654398163397
15	191,3143057843
20	159,10796326795
25	143,35495408494
30	135,82861156859
35	133,0032214332
40	133,1159265359
37	132,76243474841
38	132,79249863016
37,5	132,76576446074
37,2	132,76089769989
37,1	132,76118291326
37,15	132,76091996672
37,17	132,76088223281

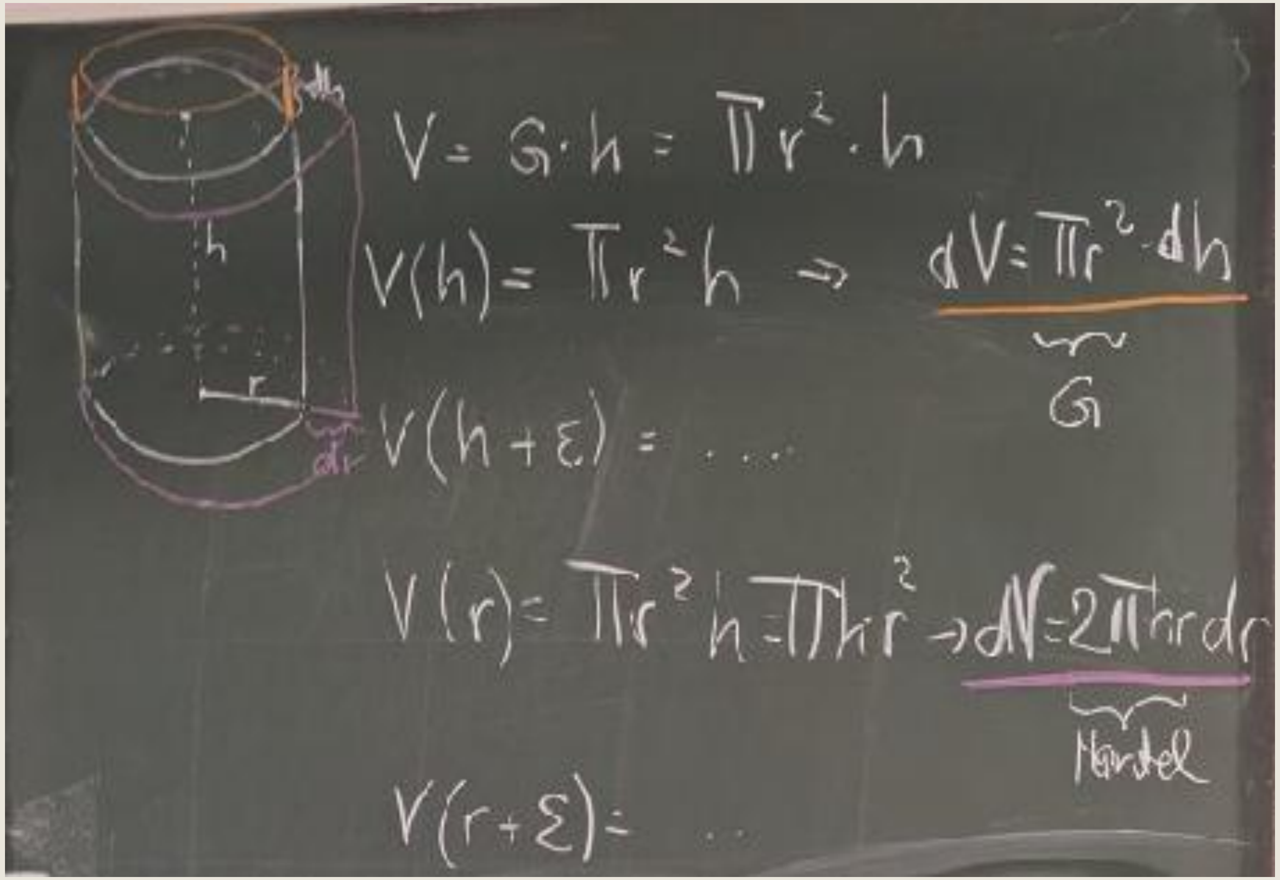
Es musste was Neues her – ein dritter Weg

…wir schauen genau unsere ganze Arbeit bis hier an. Was haben wir immer geduldigst gemacht und was erhalten?

Quadrat	$A(x) = x^2$ $dA = 2xdx$
Würfel	$V(x) = x^3$ $dV = 3x^2dx$
Kreis	$A(x) = \pi r^2$ $dA = 2\pi r dr$
Kugel	$V(x) = \frac{4}{3}\pi r^3$ $dV = 4\pi r^2 dr$
Nach oben verschobenes Quadrat	$f(x) = x^2 + 5$ $df = 2xdx$
Nach links verschobenes Quadrat	$f(x) = x^2 + 3x$ $df = (2x + 3)dx$
Quadratische Schachtel	$V(c) = 900c - 120c^2 + 4c^3$ $dV = (900 - 240c + 12c^2) \cdot dc$
Rechteckige Schachtel	$V(c) = 160\text{c} - 52c^2 + 4c^3$ $dV = (160 - 104\text{c} + 12c^2) \cdot dc$
Rechteck mit Umfang 20 cm	$A(l) = 10l - l^2$ $dA = (10 - 2l) \cdot dl$
Gleichschenkliges Dreieck mit Rechteck	$A(l) = (8 - l) \cdot l = 8l - l^2$ $dA = (8 - 2l) \cdot dl$
Toilettendeckel	$U_{Deckel} = \frac{2468}{b} + b\left(\frac{\pi}{4} + 1\right)$ $dU_{Deckel} = ???$

Altes neu erkannt und benannt

-> Von der Fläche zum Umfang und vom Volumen zur Oberfläche



Optimierung Übergang von Extremwerten zu lokalen Änderungen

Die Sonnenblume

Um wie viel cm ist die Sonnenblume an Tag 50 höher als an Tag 30?

$\boldsymbol{f(b) - f(a)}$: *Absolute Änderung* von $f \ in \ [a; b]$

Um wie viel Prozent ist die Sonnenblume an Tag 50 höher als an Tag 30?

$\frac{\boldsymbol{f(b)-f(a)}}{\boldsymbol{f(a)}} \ mit \ f(a) \neq 0$ *Relative Änderung* von $f \ in \ [a; b]$

Um wie viel cm ist die Sonnenblume von Tag 30 bis Tag 50 täglich durchschnittlich gewachsen?"?

$\frac{\boldsymbol{f(b)-f(a)}}{\boldsymbol{b-a}} \ mit \ a < b$ *Mittlere Änderungsrate* von $f \ in \ [a; b]$

Optimierung Schreibweise

Bekanntes neu benannt

$$f(b) - f(a) \rightarrow V(x+h) - V(x) = \Delta V$$
$$b - a \rightarrow (x + h - x) = \Delta x$$

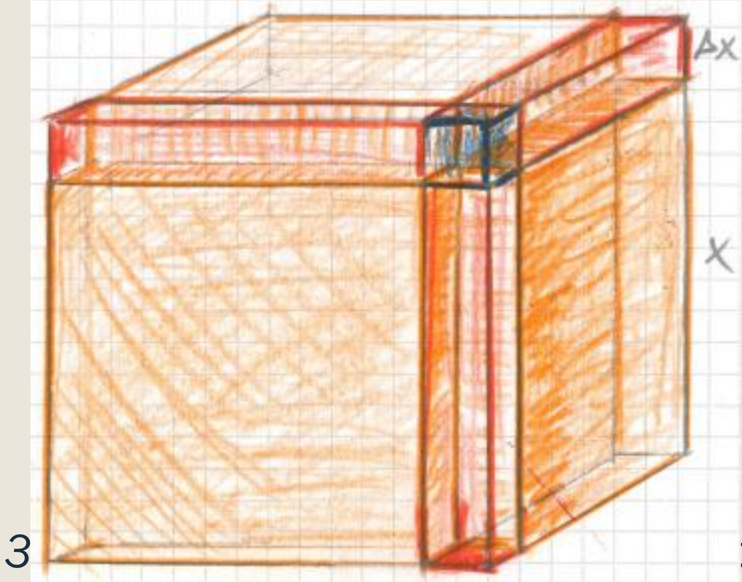
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\Delta V}{\Delta x}$$

$$\frac{dV}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(b+h) - V(b)}{h} = \frac{dV}{db}$$

Von den Ableitungsregeln zur „3-Wege-Ansicht“ …

- Potenzenregel
- Kettenregel
- Produktregel (->Quotientenregel: brauchen wir diese?)
- Trigonometrische Funktionen -> das erste Mal am Graphen

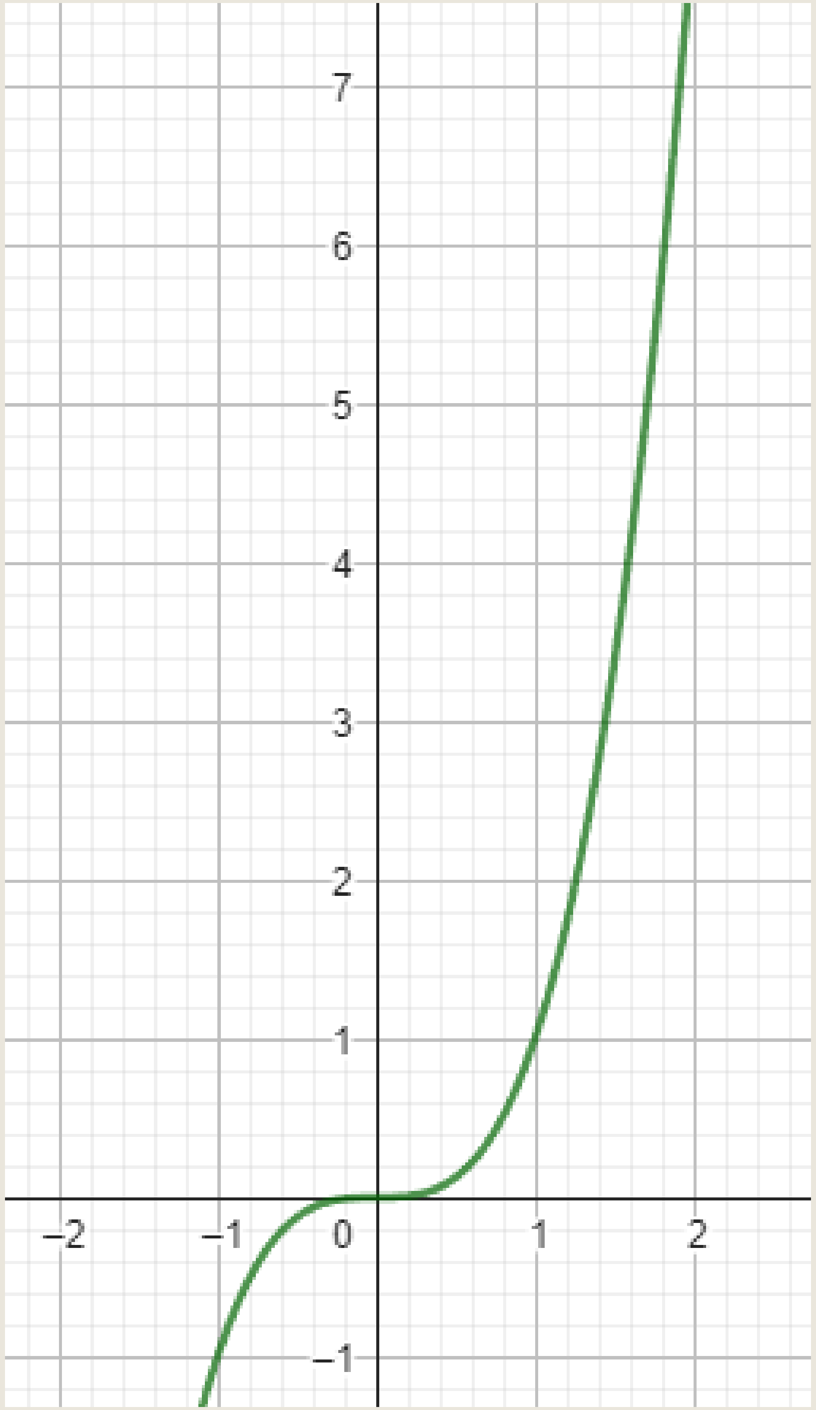
- Was ist die Ableitung?
  - *Änderung: entweder nix, negativ oder positiv*
- „3-Wege-Ansicht“ am Beispiel der Funktion $\mathrm{f}(x) = 3x^2$
  - *1. algebraischer Weg über die h-Methode*
    $f'(x) = 3x^2$
  - *2. geometrischer Weg über die Form*



  - *3* … *phen*

Tangenten als Differenziale

Der Übergang von Thomas Neukirchner



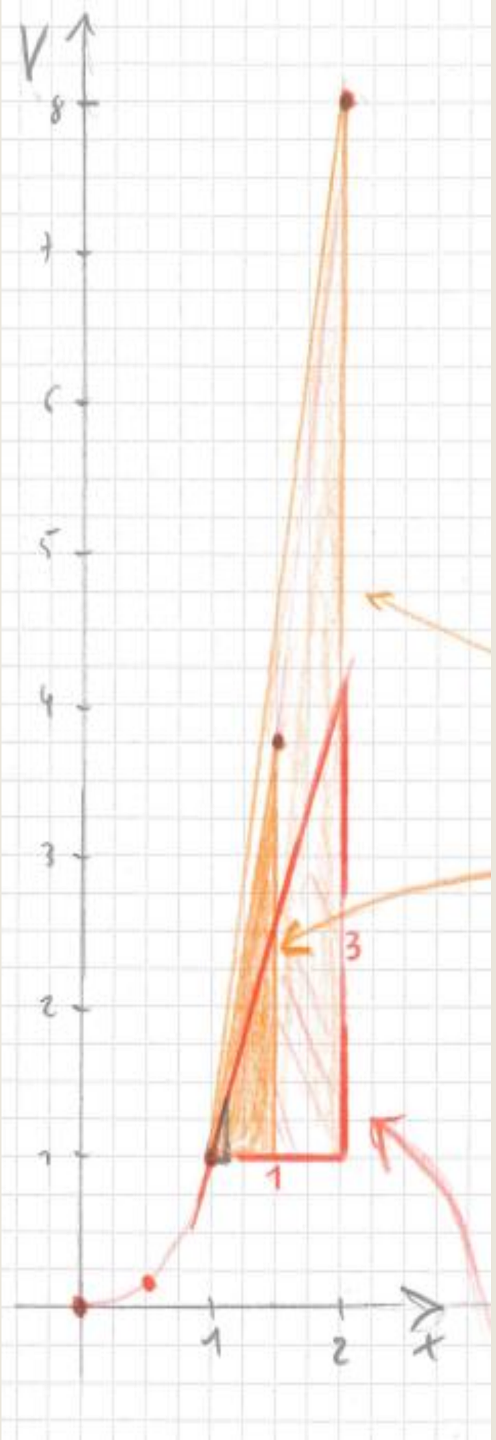
Tangenten als Differenziale

Der Übergang von Thomas Neukirchner

Δx	$\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{V(1+h) - V(1)}{\Delta x}$	
1	$\frac{2^3 - 1^3}{1} = \frac{7}{1} =$	7
0,5	$\frac{1{,}5^3 - 1^3}{0{,}5} = \frac{2{,}375}{0{,}5} =$	4,75
0,1	$\frac{1{,}1^3 - 1^3}{0{,}1} = \frac{0{,}331}{0{,}1} =$	3,31
0,01	$\frac{1{,}01^3 - 1^3}{0{,}01} = \frac{0{,}0303}{0{,}01} =$	3,03
0,001	$\frac{1{,}001^3 - 1^3}{0{,}001} = \frac{0{,}0303}{0{,}001}$	3,003
0,0001	$\frac{1{,}0001^3 - 1^3}{0{,}0001} = \frac{0{,}0303}{0{,}0001}$	3,0003
.		.
.		.
.		.
0		3

Tangenten als Differenziale

Der Übergang von Thomas Neukirchner



Fazit und Ausblick –
Würde ich es nochmal so machen?

Warum? – Optimierungsaufgaben sind Sonderfälle der lokalen Änderungen☺

VIELEN DANK FÜR EURE AUFMERKSAMKEIT!