Eine einheitliche Konstruktion der Kegelschnitte entwickelt aus einem räumlichen Kegel-Schnitt

Peter Baum*

Zusammenfassung. Für jede der drei Kurven Ellipse, Parabel und Hyperbel gibt es viele, jedoch sehr spezifische Konstruktionen: mit der „Gärtnerkonstruktion" oder „Fähnchenkonstruktion" kann man nur Ellipsen erzeugen, die Schnitte einer parallelen Geradenschar mit einer konzentrischen Kreisschar liefern zwar Parabeln, aber keine Ellipsen oder Hyperbeln, und zwei konzentrische Kreisscharen erzeugen zwar Ellipsen und Hyperbeln, aber keine Parabeln.

Ähnlicher sind schon die Konstruktionen, die sich ergeben, wenn man die Ortslinie aller Punkte, die von einer Leitlinie und einem festen Punkt gleichen Abstand haben, erzeugen will: Ist die Leitlinie eine Gerade, erhält man eine Parabel. Ist die Leitlinie ein Kreis und liegt der Punkt innerhalb des Kreises, erhält man eine Ellipse. Liegt der Punkt außerhalb des Kreises, erhält man eine Hyperbel. Aber auch hier sind die konkreten Konstruktionen verschieden.

Einzig die Leitlinieneigenschaft der Kegelschnitte führt zu einer einheitlichen Konstruktion. Jede der drei Kurven ist bekanntlich eine Ortslinie derjenigen Punkte, deren Abstände von einer Geraden l und einem Punkt F ein konstantes Verhältnis bilden.

Alle genannten Konstruktionen zeigen keinen unmittelbaren Zusammenhang mit dem Schnitt eines Kegels. Bekannt ist die einfache Überlegung von Dandelin[1], der diejenigen Inkugeln eines geraden Kreiskegels betrachtet, die auch die Schnittebene berühren. Aus dieser Betrachtung im Raum ergibt sich eine einfache Kegelschnittskonstruktion, wenn die Schnittebene auf einer Mantellinie senkrecht steht.

1 Der gerade Kreiskegel und die Schnittebene

Wir denken uns ein dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem. Die Zeichen- und Projektionsebene sei die xz-Ebene. Die x-Achse zeigt nach rechts, die y-Achse

*erstellt am 27.11. 2014, stark überarbeitet am 23.07.2022

[1]Germinalo Pierre **Dandelin**, geb. 12.04.1794, gest. 15.02.1874.

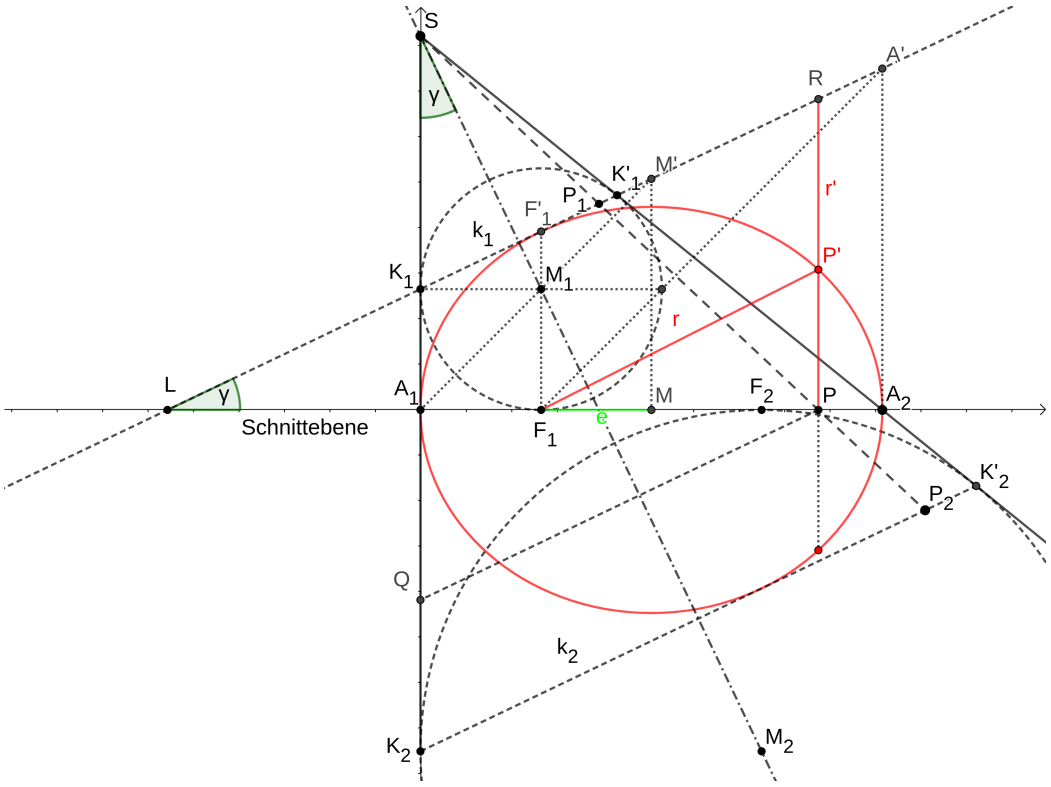

Abbildung 1: Kegel mit Schnittebene und Inkugeln

nach hinten und die z-Achse nach oben. Die z-Achse sei Mantellinie eines Doppelkegels, dessen Spitze S also auf der z-Achse liegt. Die xy-Ebene sei die Schnittebene, in ihr liegt der Kegelschnitt. Die beiden Inkugeln des Kegels berühren den Kegelmantel in den beiden Berührkreisen k_1 und k_2 und die Schnittebene in den Punkten F_1 und F_2 auf der x-Achse. Ihre Mittelpunkte M_1 bzw. M_2 liegen in der xz-Ebene auf der Kegelachse und auf den Halbierenden der rechten Winkel zwischen der x-Achse und der z-Achse. In der Zeichenebene erscheinen die beiden Inkugeln als Kreise und die beiden Berührkreise k_1 und k_2 als Strecken K_1K_1' bzw. K_2K_2' (Abb. 1).

Es sei γ der halbe Öffnungswinkel des Kegels (Winkel zwischen der Kegelachse und der z-Achse). Für $\gamma \neq 45°$ gibt es genau zwei auch die Schnittebene berührende Inkugeln, und die zur z-Achse diametrale Mantellinie schneidet die x-Achse in A_2. Der Ursprung A_1 ist ebenfalls ein Punkt des Kegelschnitts.

Die Ebene des Berührkreises k_1 schneidet die xy-Ebene in einer zur y-Achse parallelen Geraden l, der Leitgeraden des Kegelschnitts, und schließt mit der xy-Ebene ebenfalls den Winkel γ ein. Denn die Kegelachse und die z-Achse sind die Normalen dieser beiden Ebenen.

2 Konstruktion der Kurve

Aus den Überlegungen von Dandelin folgt bekantlich:

- im Fall $\gamma < 45^\circ$ entsteht eine Ellipse als Ortslinie aller Punkte der Schnittebene mit der Eigenschaft: Die Summe der beiden Abstände von F_1 und F_2 (Brennstrahlen) ist konstant (siehe Abbildung 1).
- im Fall $\gamma = 45^\circ$ entsteht eine Parabel als Ortslinie aller Punkte der Schnittebene mit der Eigenschaft: Die beiden Abstände von F_1 und einer Geraden sind gleich.
- im Fall $\gamma > 45^\circ$ entsteht eine Hyperbel als Ortslinie aller Punkte der Schnittebene mit der Eigenschaft: Die Differenz der beiden Abstände von F_1 und F_2 (Brennstrahlen) ist konstant.

Für alle drei Fälle ergibt sich nun aus der räumlichen Figur der Abbildung 1 folgende Konstruktion:

> Wir denken uns eine beliebige Mantellinie m . Sie berührt den in allen drei Fällen vorhandenen Berührkreis k_1 in einem Punkt P_1 und schneidet die Schnittebene in einem Punkt P. Die beiden Strecken $\overline{PP_1}$ und $\overline{PF_1}$ sind jeweils Abschnitte von durch P verlaufenden Kugeltangenten und als solche daher gleich lang: $\overline{PP_1} = \overline{PF_1}$. In der Zeichnung erscheinen sie als Projektionen verkürzt.
>
> Drehen wir die Mantellinie m aus ihrer ersten beliebig gewählten Position um die Kegelachse in die z-Achse und halten dabei den Punkt P auf ihr fest, so wandert P auf einem zu k_1 (und gegebenenfalls k_2) parallelem Kreis in den Punkt Q , seine Projektion in der Zeichenebene wandert dabei also auf einer Parallelen zur Geraden $K_1K_1' = t$. Die wahre Länge der Strecke $\overline{PP_1} = \overline{PF_1}$ ist also die Strecke $\overline{QK_1}$.
>
> Um ein wahres Bild der Schnittkurve zu bekommen, drehen wir nun die xy-Ebene um die x-Achse in die xz-Ebene, Dabei wandert der Punkt P aus seiner ursprünglichen Position in einer zur x-Achse senkrechten Ebene auf einem Viertelkreis in einen Punkt P'. Seine Projektion wandert auf einer Parallelen zur z-Achse, die die Gerade $K_1K_1' = t$ in einem Punkt R schneidet. Der Punkt F_1 bleibt auf der Drehachse (x-Achse) liegen. Die Entfernung $\overline{PF_1} = \overline{QK_1}$ ändert sich bei dieser Drehung nicht, daher ist räumlich gesehen $\overline{PF_1} = \overline{P'F_1}$ (in der Projektion erscheint die Strecke $\overline{PF_1}$ verkürzt). Da die vier Punkte PQK_1R ein Parallelogramm bilden, ist $\overline{P'F_1} = \overline{QK_1} = \overline{PR}$. Wir erhalten also den Kurvenpunkt P' als Schnittpunkt der Geraden PR und des Kreises um F_1 mit dem Radius $r = \overline{PR}$.

Diese Konstruktion ist offenbar unabhängig vom Öffnungswinkel γ des Kegels.

Wie üblich sei $tan\gamma = \varepsilon$.

Im Fall $\gamma < 45^\circ$ oder $\varepsilon < 1$ erhalten wir eine Ellipse mit den Hauptscheitelpunkten A_1 und A_2 (Abb. 3).

Für $\gamma = 45°$ oder $\varepsilon = 1$ ist die zur z-Achse diametrale Mantellinie parallel zur x-Achse, der zweite Scheitelpunkt A_2 ist also ein Fernpunkt und wir erhalten als Schnittkurve eine Parabel (Abb. 2).

Im Fall $\gamma > 45°$ oder $\varepsilon > 1$ ist die Schnittkurve eine Hyperbel, und die zur z-Achse diametrale Mantellinie schneidet die negative x-Achse in einem Punkt A_2, der sich als Scheitelpunkt des zweiten Hyperbelastes erweist (Abb. 4).

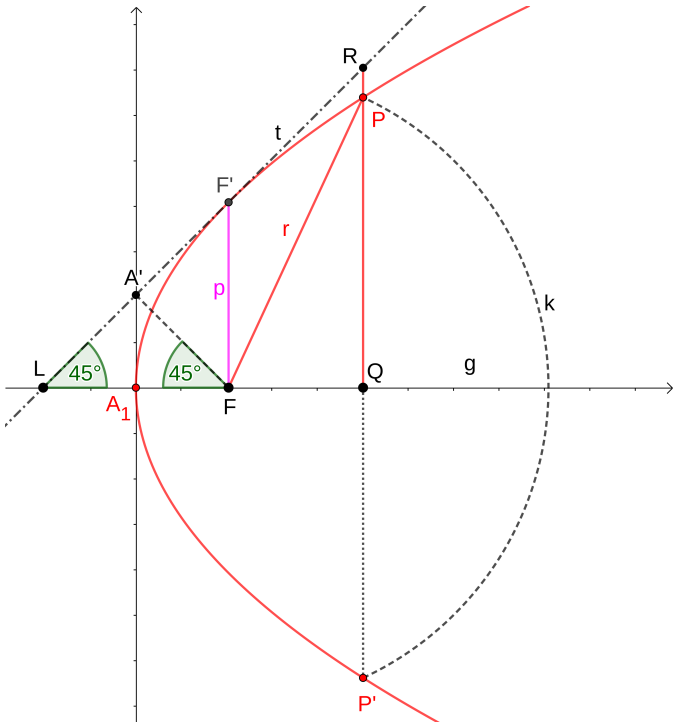

Abbildung 2: Parabel

3 Eigenschaften der Konstruktionselemente

Diese ebene Kegelschnittskonstruktion kann - unabhängig von der räumlichen Einbettung - folgendermaßen beschrieben werden:

Definition. *Gegeben sind zwei Geraden t und g , die sich im Punkt L unter dem Winkel γ schneiden, und ein Punkt $F \neq L$ auf g. Die Senkrechte p in F auf g schneidet t in F'. Eine geeignete Parallele q zu p schneidet t in R und g in Q. Der Kreis k um F mit dem Radius $r = \overline{QR}$ schneidet die Parallele q in zwei Punkten P und P' eines Kegelschnitts.*

Wir wollen nun die bekannten Eigenschaften der Kegelschnitte aus dieser Definition herleiten. Wie üblich verwenden wir folgende Bezeichnungen:

$$\overline{FF'} = p \qquad \overline{MF} = e \qquad \overline{MA_1} = \overline{MA_2} = a$$

Zunächst stellen wir fest:

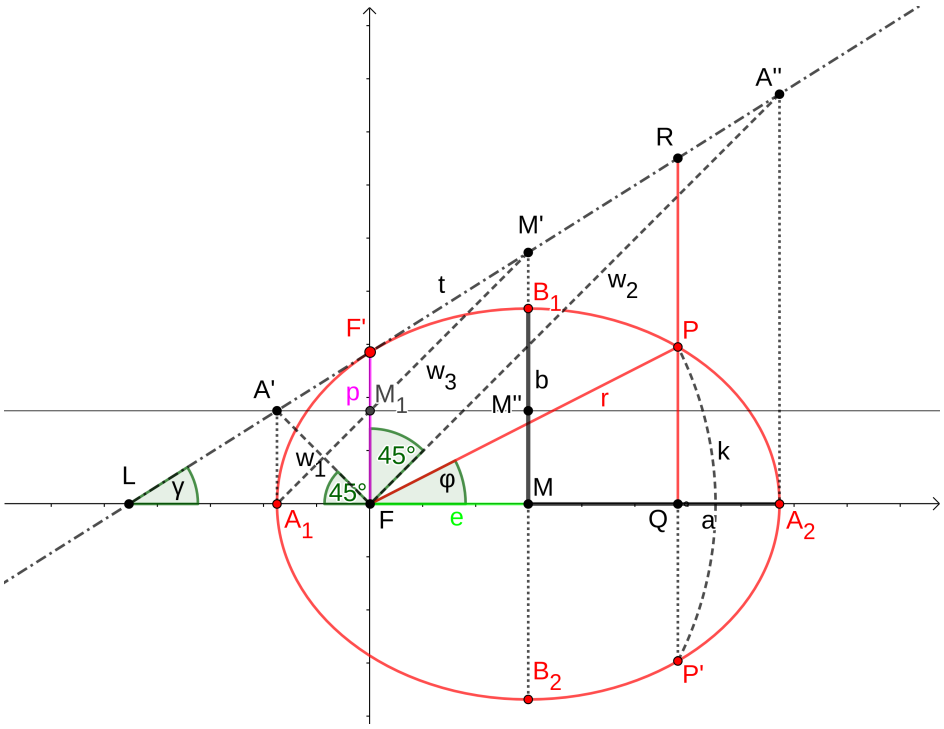

Abbildung 3: Ellipsenkonstruktion

Satz. Die Gerade g ist Symmetrieachse der Kegelschnitte.

Beweis. Die Gerade g geht durch den Kreismittelpunkt F und ist Mittelsenkrechte der Strecke PP'. □

Satz. Die Gerade t ist Tangente des Kegelschnitts und berührt ihn im Punkt F'.

Beweis. Für $q = p$ ist $Q = F$ und $R = F'$ und der Kreis um F mit dem Radius $r = \overline{QR} = \overline{FF'}$ schneidet p in F', also ist F' ein Kurvenpunkt. Für jeden anderen Punkt R auf t ist aber $\overline{FR} > \overline{QR} = r$, also ist F' der einzige Kurvenpunkt auf t, d.h. die Gerade t ist Tangente der Kurve. □

Nicht jede Parallele q liefert zwei Kurvenpunkte P und P'. Es gibt eine erste und eine letzte Parallele, die jeweils nur einen Kurvenpunkt A_1 bzw. A_2 auf der Achse g generiert. Im Fall der Parabel ist die letzte Parallele die Ferngerade und A_2 der Fernpunkt der Achse g.

Für die Punkte A_i gilt: $\overline{FA_1} = \overline{A_1R}$ und $\overline{FA_2} = \overline{A_2R}$. Man erhält sie also durch die beiden Winkelhalbierenden w_1 und w_2 der rechten Winkel bei F, welche die Achse g im Punkt F im Winkel von $-45°$ und $+45°$ schneiden. In den Schnittpunkten A' und A'' dieser beiden Geraden mit der Tangente t fällt man das Lot auf g und erhält die beiden Scheitelpunkte A_1und A_2.[2]

[2]Im Fall der Parabel sind A'' und A_2 Fernpunkte.

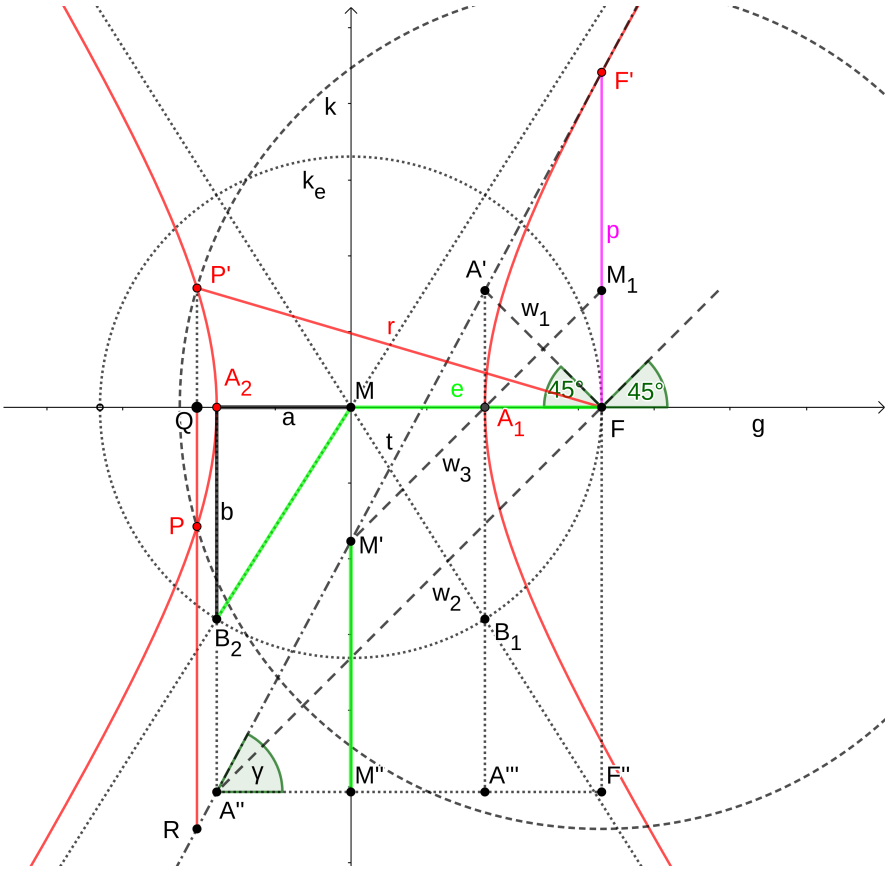

Abbildung 4: Hyperbel

Im Fall der Ellipse und Hyperbel schneidet eine zu w_2 parallele Gerade w_3 durch A_1 die Tangente t in M' und FF′ in M_1. Das Lot von M' auf die Achse g schneidet diese im Mittelpunkt M der Ellipse bzw. Hyperbel. Denn da w_3 als Parallele zu w_2 die Strecke $\overline{A'F}$ halbiert, ist auch $\overline{A'M'} = \overline{M'A''}$. Die Mittelparallele der beiden Lote von A' und A'' auf die Achse g geht durch M' , folglich ist M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{A_1A_2}$. Die Parallele zur Achse g durch A' im Fall der Ellipse (Abb. 3) und durch A″ im Fall der Hyperbel (Abb. 4) trifft das Lot MM' in M''. Daher ist im Fall der

Ellipse:	Hyperbel:
$\overline{MM'} = A'M'' = \overline{MA_1} = a$	$\overline{MM'} = \overline{MA_1} = a$
$\overline{M'M''} = \overline{M''M_1} = \overline{MF} = e$	$\overline{MM''} = \overline{A_2A''} = \overline{FA_2} = a + e$
$\overline{M_1M''} = \overline{MA_2} = a$	$\overline{M'M''} = e$
$\tan\gamma = \dfrac{\overline{M'M''}}{\overline{M_1M''}} = \dfrac{e}{a}$	$\tan\gamma = \dfrac{\overline{M'M''}}{\overline{A''M''}} = \dfrac{e}{a}$

Für die Nebenscheitel B_1 und B_2 der Ellipse gilt nach dem Satz des Pythagoras im

Dreieck FMB_1

$$\overline{FB_1} = \overline{FB_2} = \overline{MM'} = a \qquad \overline{MB_1} = b \qquad \overline{MF} = e \qquad a^2 - e^2 = b^2$$

Da im Fall der Hyperbel $a < e$ ist, ist dort durch $e^2 - a^2 = b^2$ ein Abschnitt $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} = b$ auf den Scheiteltangenten definiert (siehe Abb. 4).

Für den Parameter p erhält man

- im Fall der Ellipse aus dem Dreieck $A'M_1F'$ wegen $\frac{\overline{F'M_1}}{\overline{A'M_1}} = \tan\gamma = \frac{e}{a}$ und $\overline{F'M_1} = p - (a - e)$ und $\overline{A'M_1} = a - e$

$$\frac{p - (a - e)}{a - e} = \frac{e}{a}$$
$$p = \frac{a^2 - e^2}{a}$$
$$p = \frac{b^2}{a}$$

- im Fall der Hyperbel aus dem Dreieck $A''F'F''$ wegen $\frac{\overline{F'F''}}{\overline{A''F''}} = \tan\gamma = \frac{e}{a}$ und $\overline{F'F''} = p + e + a$ und $\overline{A''F''} = e + a$

$$\frac{p + e + a}{e + a} = \frac{e}{a}$$
$$p = \frac{e^2 - a^2}{a}$$
$$p = \frac{b^2}{a}$$

3.1 Die Polargleichung der Kegelschnitte

Wegen $tan\gamma = \varepsilon$ ist laut Konstruktion im Abschnitt 3

$$\varepsilon = \frac{\overline{QR}}{\overline{QL}} = \frac{\overline{PF}}{\overline{QL}}$$

d.h. das Verhältnis der beiden Abstände des Kurvenpunktes P von einem festen Punkt F und der Orthogonalen l zu g durch den Punkt L ist konstant. Dies ist die Leitlinieneigenschaft der Kegelschnitte.

Es sei nun $F\,(0/0)$ der Ursprung, g die x-Achse und FF' die y-Achse. Der Punkt $P(x/y)$ hat die Polarkoordinaten $r = \overline{FP}$ und $\varphi = \sphericalangle QFP$. Es ist also $x = r \cdot cos\varphi$ und $y = r \cdot sin\varphi$.

Die kartesischen Koordinaten von R seien $R(x_R/y_R)$. Mit $tan\gamma = \varepsilon$ und $\overline{FF'} = p$ hat die Gerade t die Gleichung

$$y = \varepsilon \cdot x + p \tag{1}$$

Da der Punkt R auf t liegt, erfüllen seine Koordinaten die Gleichung von t:

$$y_R = \varepsilon \cdot x_R + p \tag{2}$$

Aus der Konstruktion ergibt sich: $x_R = x = r \cdot cos\varphi$ und $y_R = r$. Einsetzen in Gleichung (2) liefert:

$$\begin{aligned} r &= \varepsilon \cdot r \cdot cos\varphi + p \\ r \cdot (1 - \varepsilon \cdot cos\varphi) &= p \\ r &= \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot cos\varphi} \end{aligned} \tag{3}$$

als Polargleichung der Kegelschnitte mit dem Brennpunkt F als Pol.

Im Fall der Ellipse ist $\epsilon < 1$, also $1 - \epsilon < 1 - \varepsilon \cdot cos\varphi < 1 + \epsilon$ und $\frac{p}{1+\epsilon} < r < \frac{p}{1-\epsilon}$.
Im Fall der Parabel ist $\epsilon = 1$ und es ist $\frac{p}{2} < r \leq \infty$.
Im Fall der Hyperbel ist $\epsilon > 1$ und $1 - \varepsilon \cdot cos\varphi = 0$, also $r = \infty$ für $cos\varphi = \frac{1}{\epsilon} = \frac{a}{e}$. Dies ist der Fall, wenn $\varphi = \sphericalangle A_2MB_2$ (Dreieck A_2MB_2 in Abb. (4)). Somit sind die Geraden MB_1 und MB_2 die beiden Asymptoten der Hyperbel.

3.2 Die Gleichungen in kartesischen Koordinaten

Aus der Konstruktion des Punktes $P\,(x/y)$ folgt $r = \overline{RQ} = y_R$ und weiter wegen (1)

$$r = \epsilon \cdot x + p$$

. Wegen $r = \overline{FP}$ ist $r^2 = x^2 + y^2$ und man erhält

$$x^2 + y^2 = (\epsilon \cdot x + p)^2 \tag{4}$$

Im Fall der Parabel folgt aus $\epsilon = 1$

$$y^2 = 2px + p^2 \tag{5}$$

Im Fall der Ellipse und Hyperbel folgt aus (4)

$$x^2 \left(1 - \epsilon^2\right) - 2p\epsilon x + y^2 = p^2$$

Einsetzen von $\epsilon = \frac{e}{a}$ und $p = \frac{b^2}{a}$ liefert

$$\begin{aligned} x^2 \left(1 - \frac{e^2}{a^2}\right) - 2\frac{b^2 e}{a^2} x + y^2 &= \frac{b^4}{a^2} \\ x^2 \left(a^2 - e^2\right) - 2b^2 ex + a^2 y^2 &= b^4 \end{aligned}$$

also im Fall der

Ellipse:	Hyperbel:
$x^2b^2 - 2b^2ex + a^2y^2 = b^4$	$-x^2b^2 - 2b^2ex + a^2y^2 = b^4$
$x^2 - 2ex + \frac{a^2}{b^2}y^2 = b^2$	$-x^2 - 2ex + \frac{a^2}{b^2}y^2 = b^2$
$(x-e)^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = b^2 + e^2$	$(x+e)^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2 = e^2 - b^2$
$\frac{(x-e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x+e)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Es ist also $M\,(e/0)$ der Mittelpunkt der Ellipse und $M\,(-e/0)$ der Mittelpunkt der Hyperbel.