Die Kegelschnitt-Epoche in der 9. Klasse:

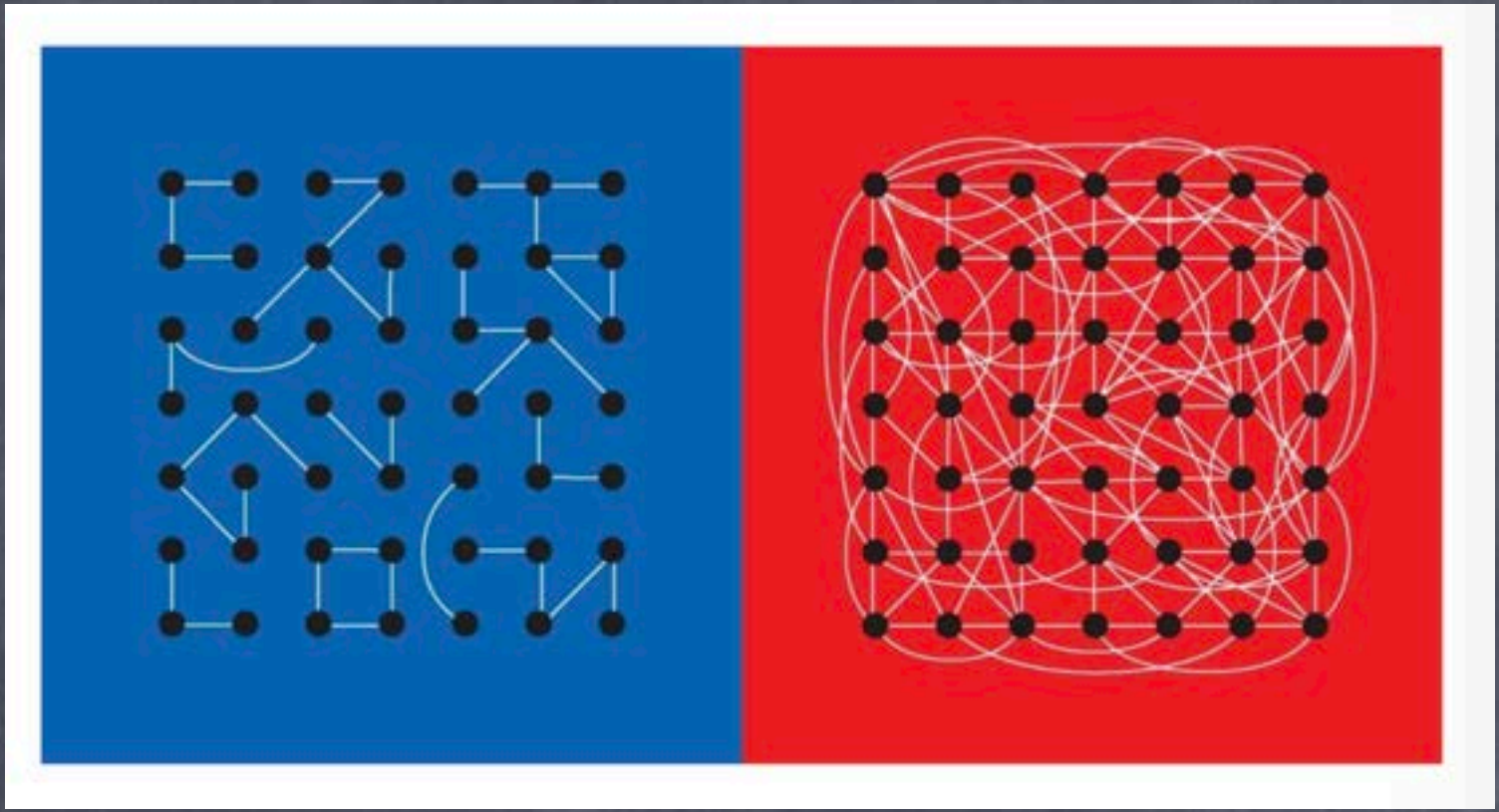
Dynamisches und vernetztes Denken lernen

Jessica Krause

Mathematiklehrertagung Januar 2025

„Manche Menschen haben einen Gesichtskreis vom Radius Null und nennen ihn ihren Standpunkt"

– David Hilbert



West vs. East

Quelle: Yang Liu - East meets West

9. Klasse Geometrie: Kegelschnitte

9. Klasse: Zwei 3-wöchige Mathe-Epochen
- 1. Epoche: Kombinatorik
- 2. Epoche: Kegelschnitte

  - Kegelschnitte im weitesten Sinne (ergänzt um Kreis des Apollonius, Cassini-Kurven)

  - Fokus auf Ortskurven

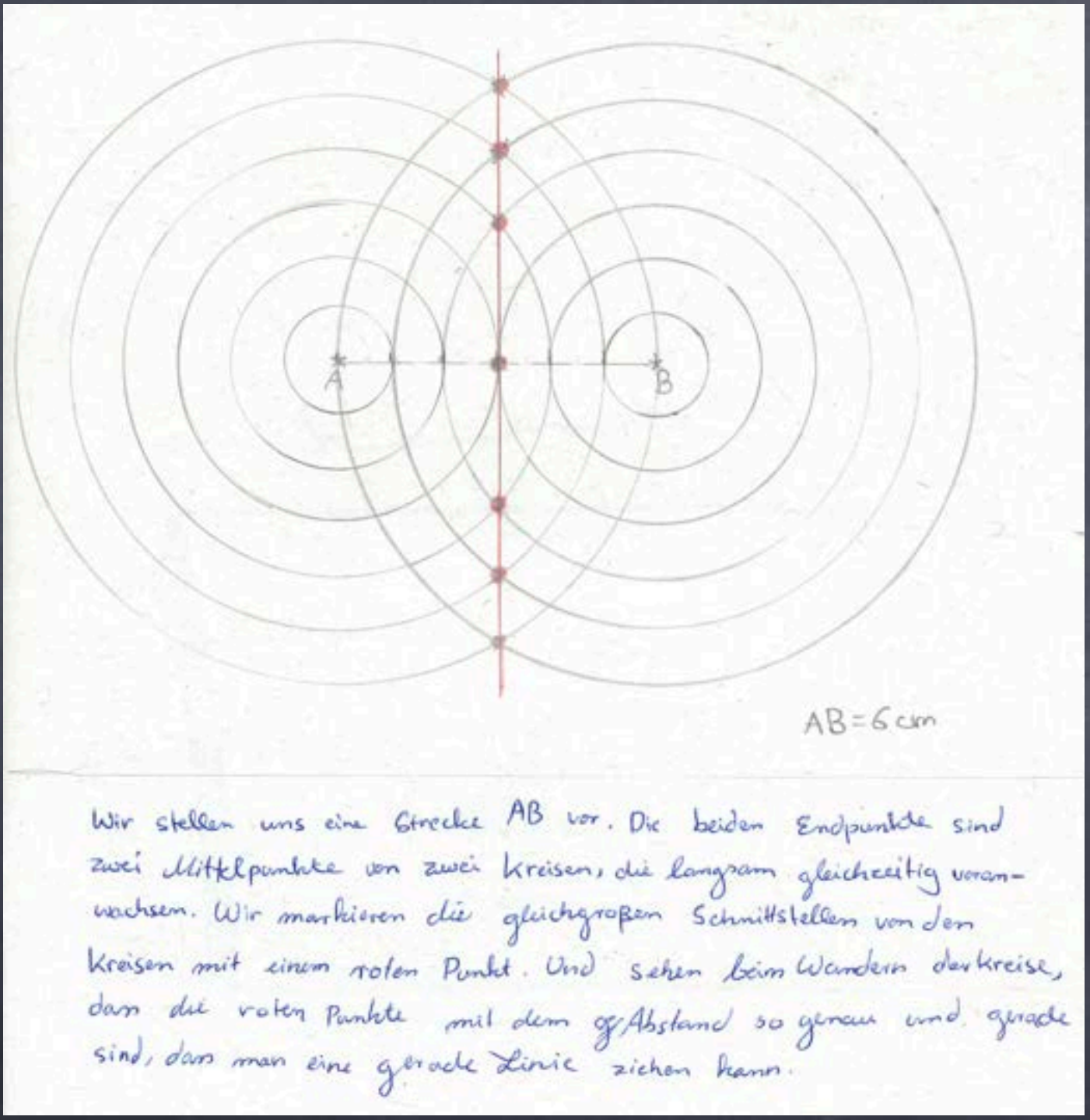
Dynamisches Denken: Vorstellungsübungen

Vorstellungsübung

Regeln:

- Vorstellen des beschriebenen Sachverhalts
- Rausgekommen? Melden!
- Fragen für sich selbst beantworten

Vorstellungs-Übung 1

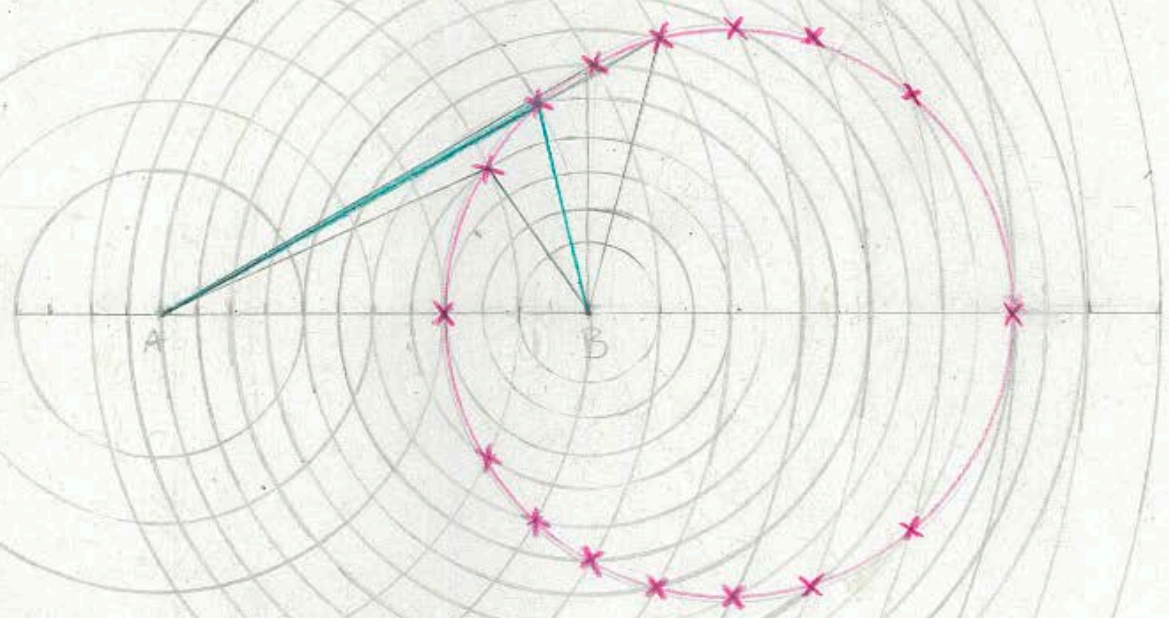


Wir stellen uns eine Strecke AB vor. Die beiden Endpunkte sind zwei Mittelpunkte von zwei Kreisen, die langsam gleichzeitig verwachsen. Wir markieren die gleichgroßen Schnittstellen von den Kreisen mit einem roten Punkt. Und sehen beim Wandern der Kreise, dass die roten Punkte mit dem gl. Abstand so genau und gerade sind, dass man eine gerade Linie ziehen kann.

Epochenheftauszug
(Leen)

VORSTELLUNGSÜBUNG 2

$\overline{AB}$=6cm
$r_A : r_B = 2:1$
+1 +0,5



BESCHREIBUNG:

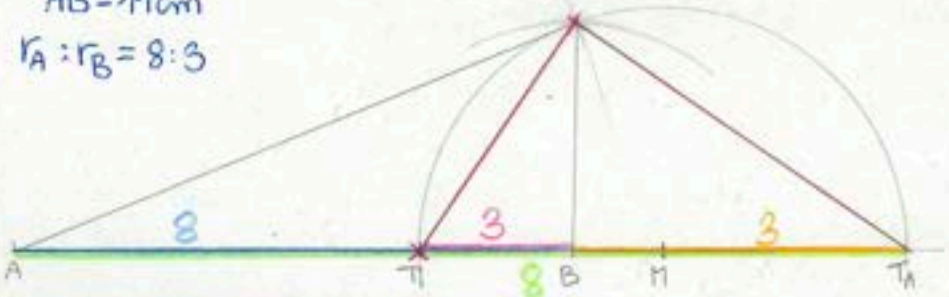
Wir zeichnen eine Strecke AB 6 cm. Die Kreise die wir um A ziehen, sind doppelt so groß wie die um B. Die Kreise um A werden immer 1 cm größer, die um B nur 0,5 cm größer. Die Schnittpunkte der jeweils 1, 2, 3 usw. Kreise markieren wir Rot. Verbinden wir die Punkte der Reihe nach entsteht ein Kreis

Epochenheftauszug
(Emily)

Übungsaufgabe

$\overline{AB} = 11\,cm$

$r_A : r_B = 8:3$



$\overline{AT_A} = \overline{AB} + \overline{BT_A}$

$\overline{BS} = 4{,}5\,cm$

$\overline{AS} = 12\,cm$

$\overline{BT_A} = 6{,}6\,cm$

$\frac{8}{3}x = 11 + x \quad | -x$

$\frac{8}{3}x - x = 11 \quad | \cdot 3$

$5x = 33 \quad | :5$

$x = \frac{33}{5} = 6{,}6\,cm$

Weitere Aufgaben zur Berechung des Apolloniuskreises

$\overline{AB} = 9\,cm \quad r_A : r_B = 5:4$

$\frac{5}{4}x = 9 + x \quad | -x$

$\frac{5}{4}x - x = 9 \quad | \cdot 4$

$1x = 36$

$x = \overline{BT_A} = 36\,cm$

$\overline{BT_1} = 4\,cm$

$r = T_1M = MT_A = \frac{1}{2}(T_1B + BT_A)$

$= \frac{1}{2}(4 + 36) = \frac{1}{2} \cdot 40 = 20$

Umso näher die Verhältnisse einander sind, desto größer wird der Kreis

$AB = 9\,cm \quad r_A : r_B = 7:2$

$\overline{BT_1} = 2$

$\overline{BT_A} = 5{,}6$

$\overline{T_1M} = 2{,}8$

T_1S und T_AS sind Winkelhalbierende von $\sphericalangle ASB$ und seinem Außenwinkel

$\frac{7}{2}x = 9 + x \quad | -x$

$\frac{7}{2}x - x = 9 \quad | \cdot 2$

$7x - 2x = 18 \quad |$ rechnen

$5x = 18 \quad | :5$

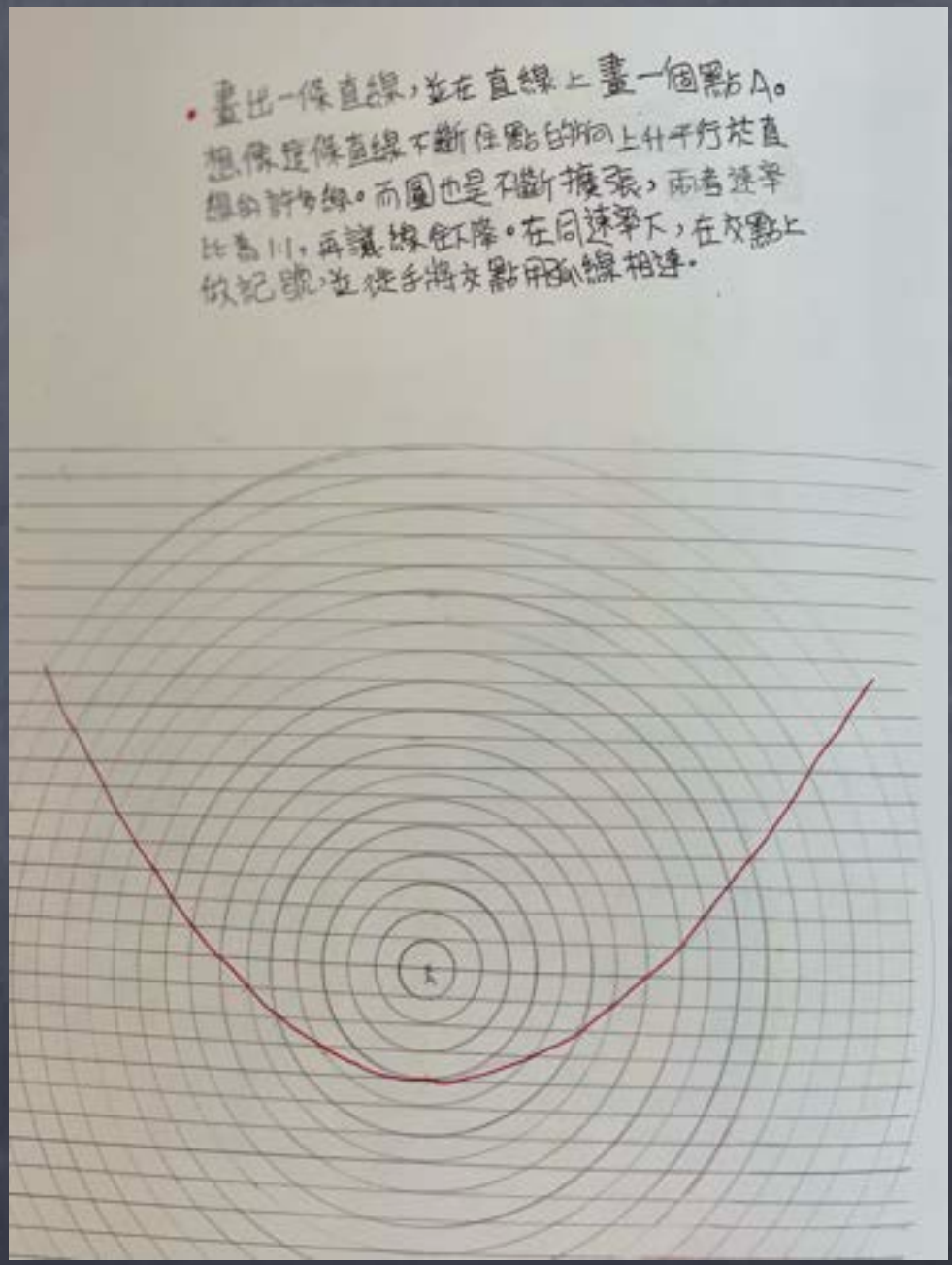
$x = 3{,}6 \rightarrow \overline{BT_A}$

Zwischenfazit - Vorstellungsübungen:

- Lernende erleben Selbstwirksamkeit
- Ergebnisoffene Diskussionen nehmen jeden ernst
- Fortschritt wird erlebt

Weitere Vorstellungs-übungen:

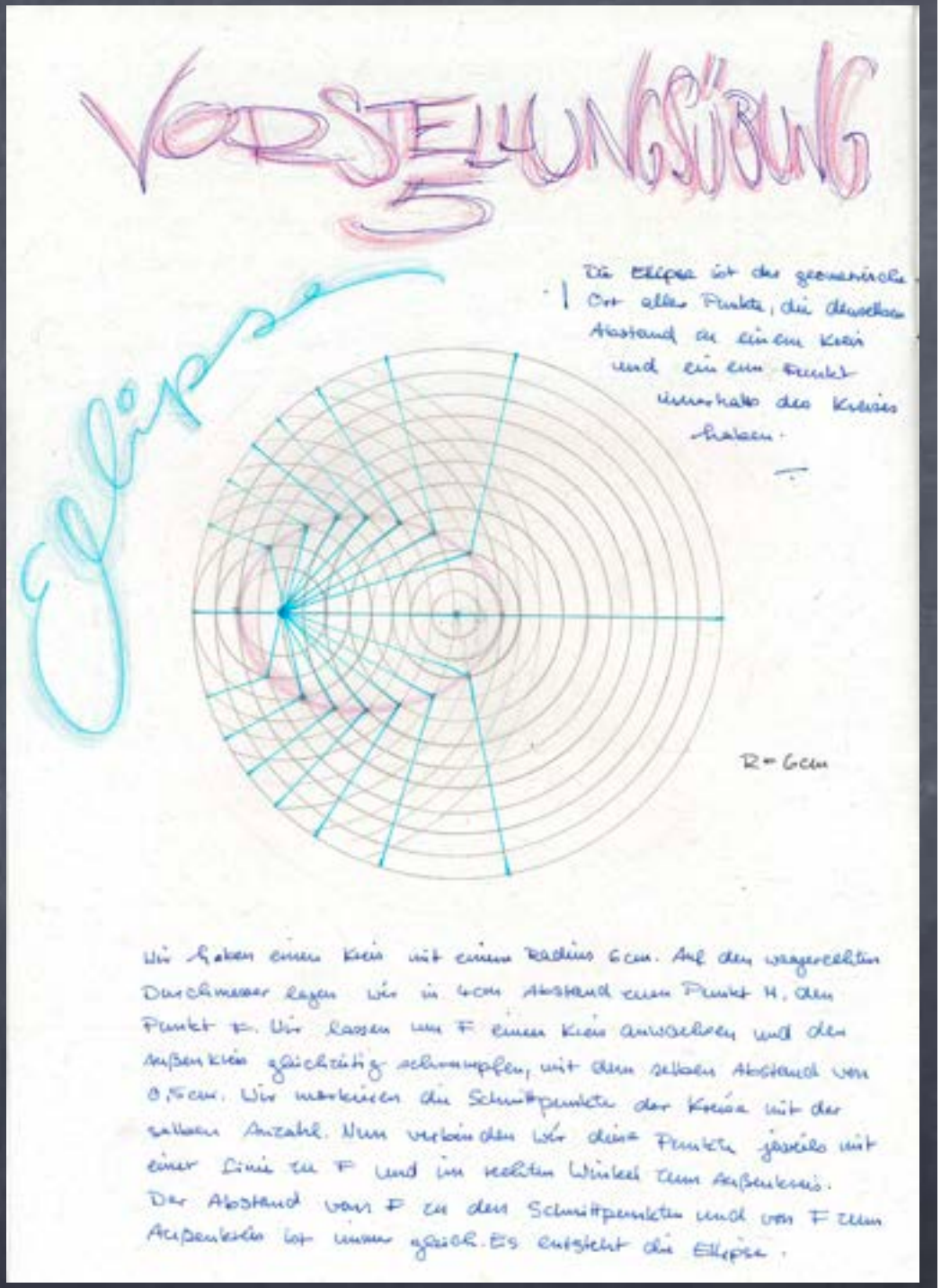
Parabel:
sich nach oben bewegende Gerade und um einen Mittelpunkt wachsender Kreis



Epochenheftauszug (Grace)

Weitere Vorstellungs-übungen:

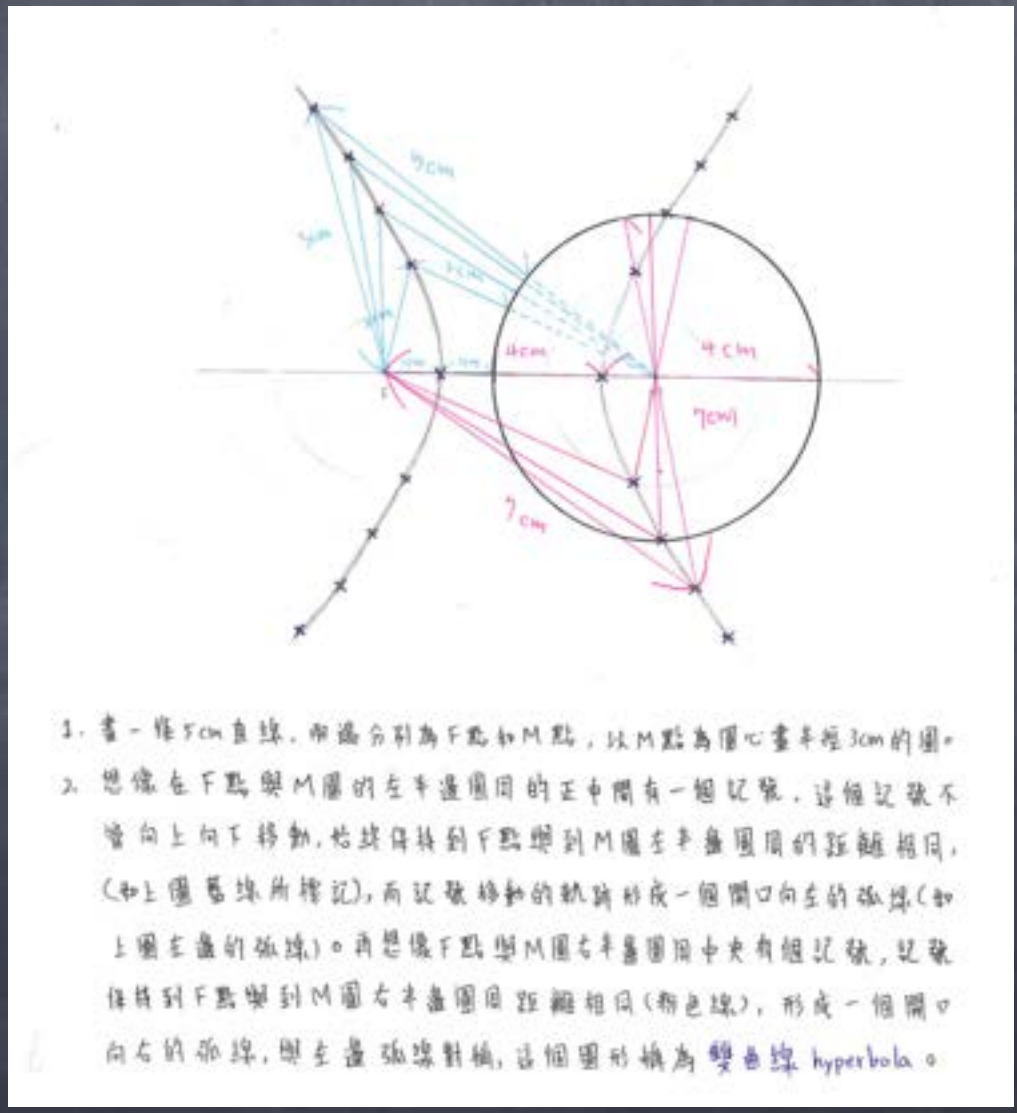
Ellipse:
Kreis, Punkt im Kreis; weiterer Punkt hat immer den gleichen Abstand zu Kreisperipherie und dem gegebenen Punkt



Epochenheftauszug (Helena)

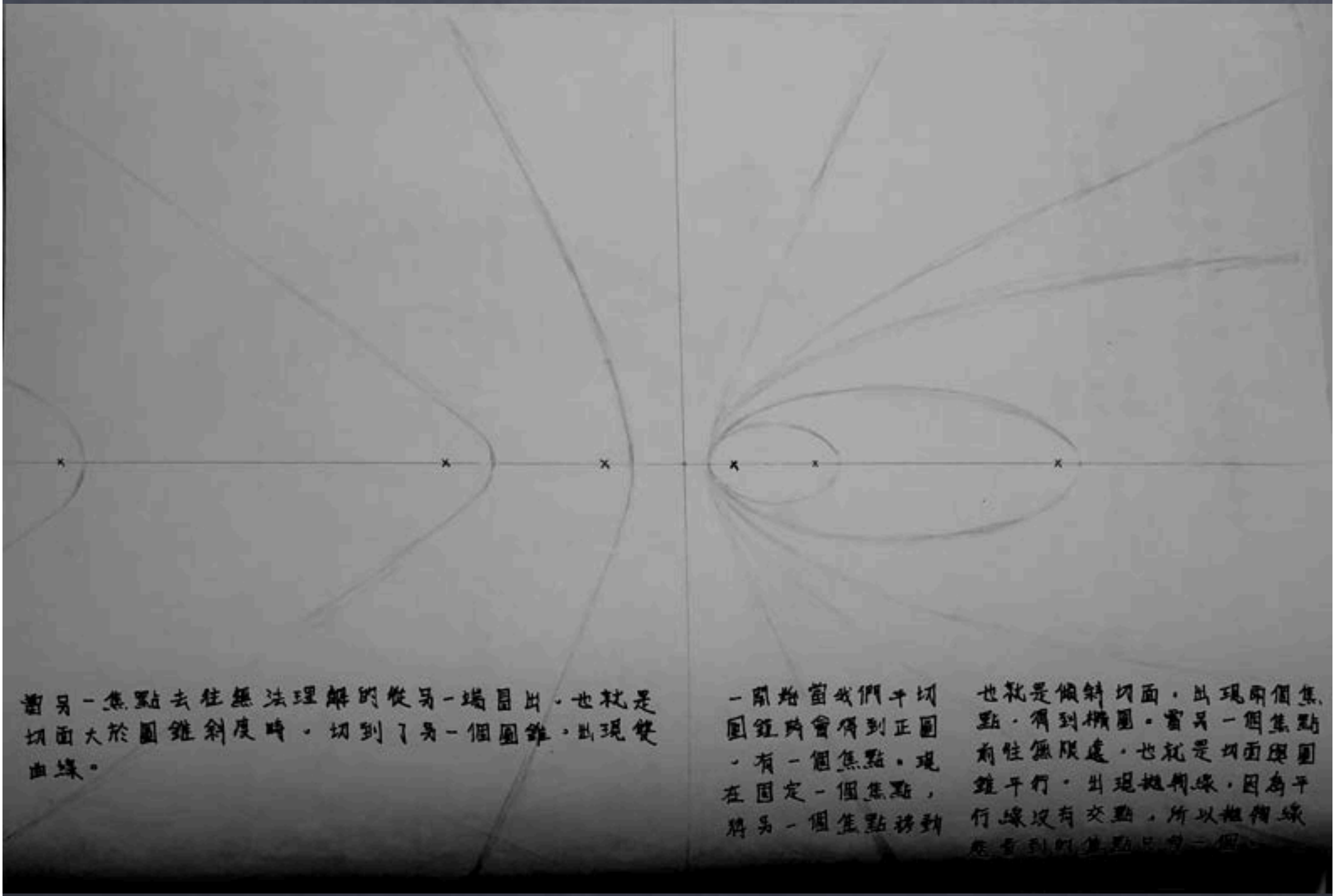
Weitere Vorstellungs-übungen:

Hyperbel:
Kreis, Punkt außerhalb des Kreises
weiterer Punkt hat immer den gleichen Abstand zu Kreisperipherie und dem gegebenen Punkt



Epochenheftauszug (Mia)

Vernetztes Denken:
Die Ortskurven-Definitionen



當另一焦點去往無法理解的從另一端冒出，也就是切面大於圓錐斜度時，切到了另一個圓錐，出現雙曲線。

一開始當我們平切圓錐時會得到正圓，有一個焦點，現在固定一個焦點，將另一個焦點移動

也就是傾斜切面，出現兩個焦點，得到橢圓，當另一個焦點朝往無限處，也就是切面跟圓錐平行，出現拋物線，因為平行線沒有交點，所以拋物線應看到的焦點只有一個。

(Merlin)

... IST DER GEOMETRISCHE ORT ALLER PUNKTE ...

DER APOLLONIUS KREIS ... deren Abstände zu zwei gegebenen Punkten A und B immer ein festes Verhältnis haben.

DIE PARABEL ... deren Abstände zu einem gegebenen Punkt P und einer festen Geraden g gleich sind.

DIE ELLIPSE ... deren Abstände zu zwei gegebenen Punkten F_1 und F_2 immer eine feste Summe haben.

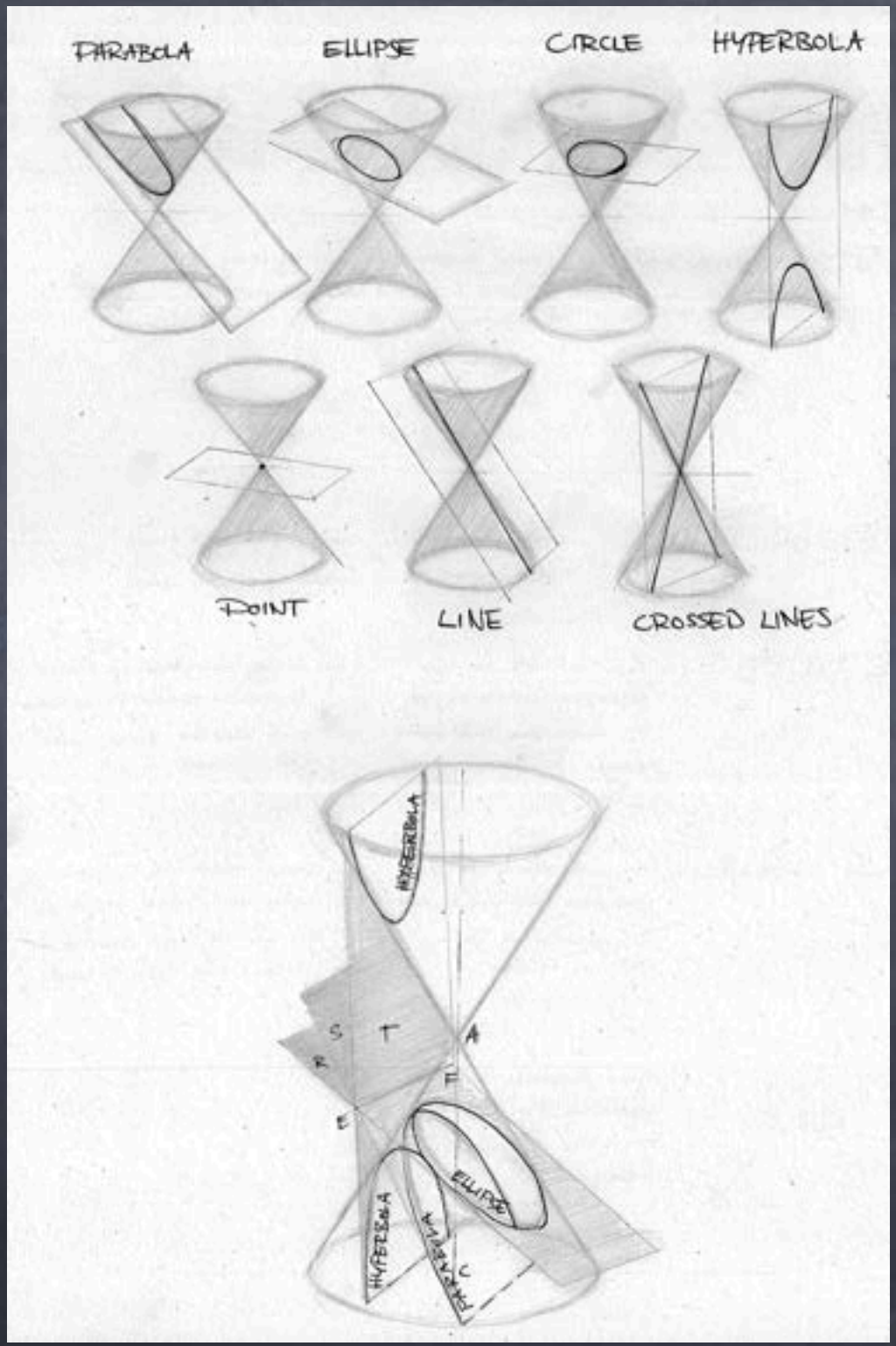
... deren Abstände zu einem gegebenen Punkt F im Kreis und diesem (festen) Kreis gleich sind

DIE HYPERBEL ... deren Abstände zu zwei gegebenen Punkten F_1 und F_2 immer eine feste Differenz haben.

... deren Abstände zu einem gegebenen Punkt außerhalb des Kreises und diesem (festen) Kreis gleich sind

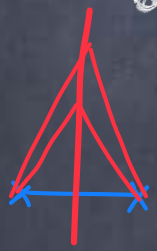
DIE CASSINI-KURVEN ... deren Abstände zu zwei gegebenen Punkten A und B immer ein festes Produkt haben.

(Helena)

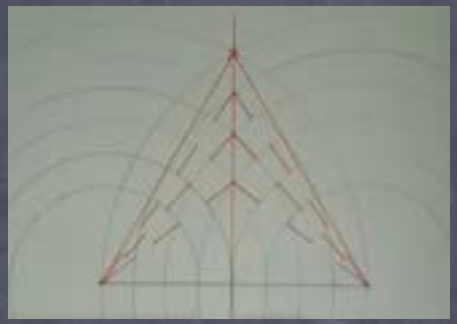

PARABOLA
ELLIPSE
CIRCLE
HYPERBOLA
POINT
LINE
CROSSED LINES
HYPERBOLA
S
T
A
R
E
ELLIPSE
HYPERBOLA
PARABOLA

(Helena)

Die Ortskurven-Definitionen: Mittelsenkrechte, Kreis des Apollonius

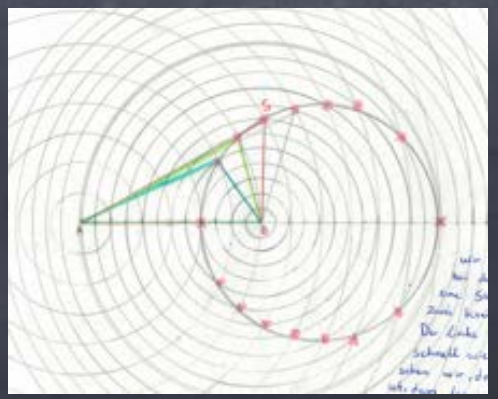


- Die Mittelsenkrechte
  ist der geometrische Ort aller Punkte, die denselben Abstand zu zwei gegebenen Punkten haben.



(Kalu)

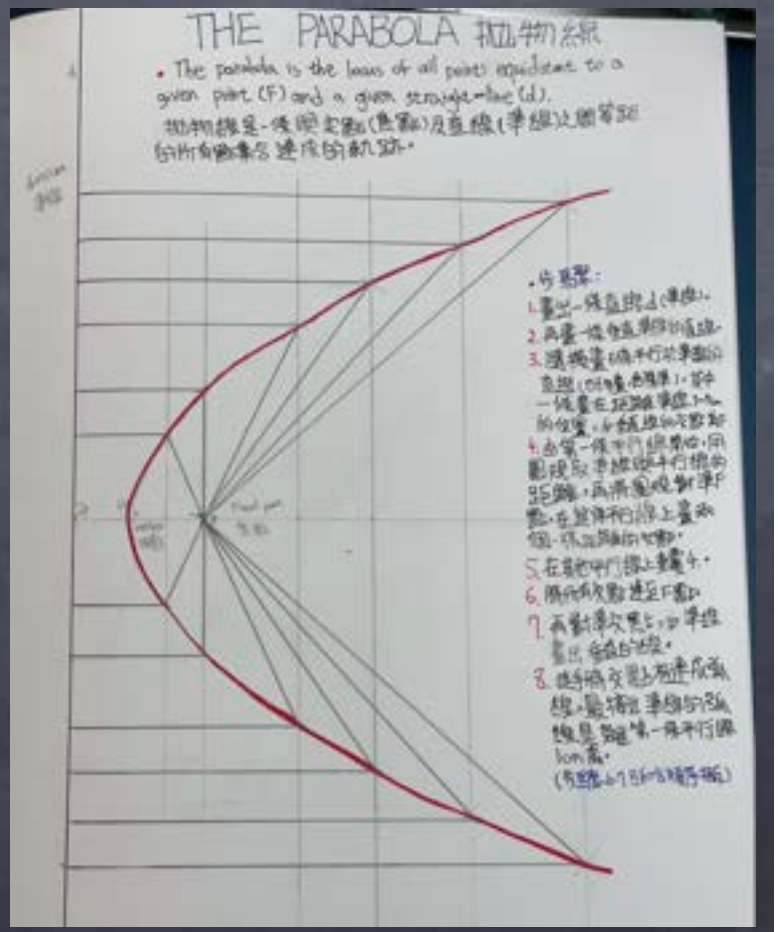
- Der Kreis des Apollonius
  ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände zu zwei gegebenen Punkten ein konstantes Verhältnis haben.



(Leen)

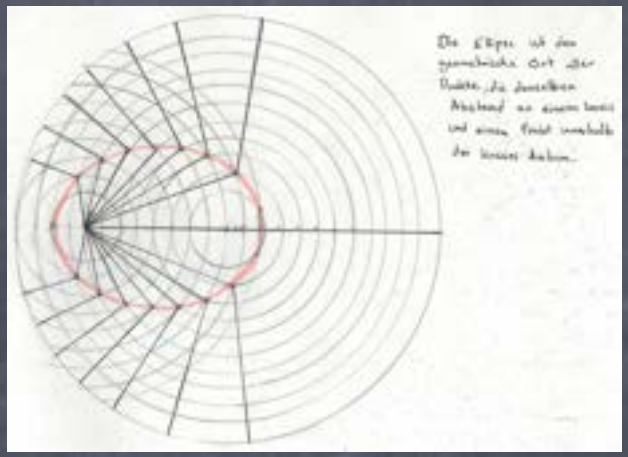
Die Ortskurven-Definitionen: Parabel

- Die Parabel
  ist der geometrische Ort aller Punkte, die denselben Abstand zu einer Geraden und einem Punkt haben.



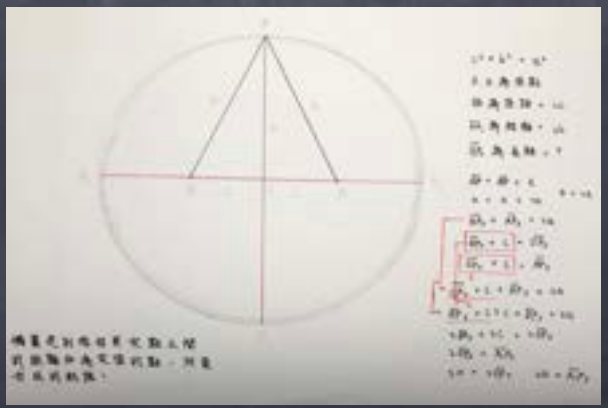
(Grace)

Die Ortskurven-Definitionen: Ellipse



(Leen)

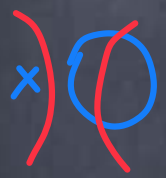
- Die Ellipse
  ist der geometrische Ort aller Punkte,
  die denselben Abstand zu einem Kreis
  und einem Punkt im Kreis haben.



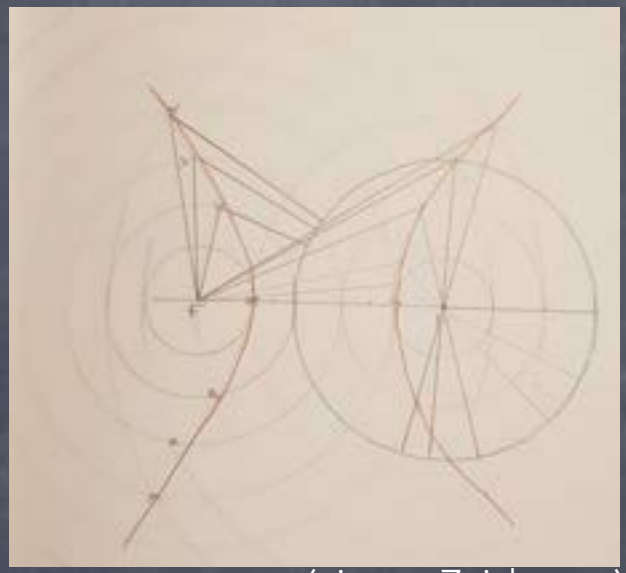
(Merlin)

- Die Ellipse
  ist der geometrische Ort aller Punkte,
  deren Abstände zu zwei gegebenen
  Punkten eine konstante Summe haben.

Die Ortskurven-Definitionen: Hyperbel

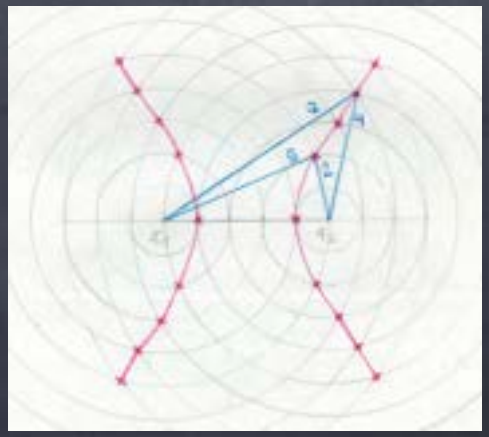


- Die Hyperbel
  ist der geometrische Ort aller Punkte, die denselben Abstand zu einem Kreis und einem Punkt außerhalb des Kreises haben.



(eigene Zeichnung)

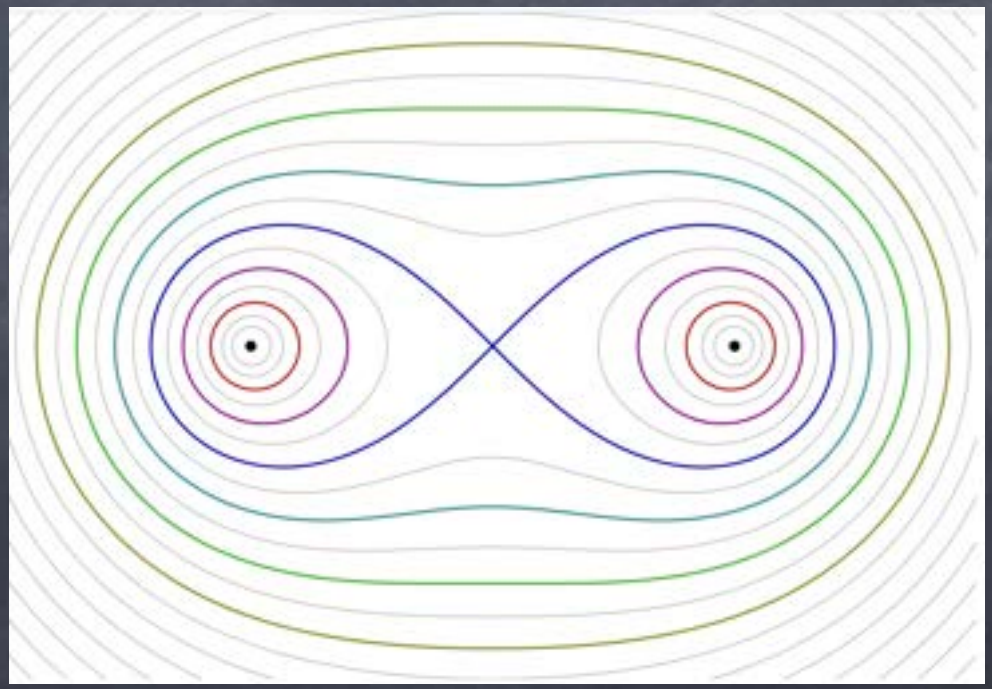
- Die Hyperbel
  ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände zu zwei gegebenen Punkten eine konstante Differenz haben.



(Emily)

Die Ortskurven-Definitionen: Cassini-Kurven

- Die Cassini-Kurven sind der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände zu zwei gegebenen Punkten ein konstantes Produkt haben.



Von Zorgit - Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4316447

...und vieles mehr

- Anwendung der Kegelschnitte im „echten Leben“ (Paraolantenne, Parabelflug, Planeten- und Kometenbahnen, Architektur, usw.)
- Alternative Konstruktionen (Gärtnerkonstruktion der Ellipse, Steiner-Konstruktion im Rechteck, Parabel-, Ellipsen-, Hyperbellineal usw.)
- Rechnen (Apolloniuskreis berechnen, Parabel als Multiplikationsmaschine)
- Schöne Zeichnungen (Schachbrettmuster)
- Aus Papier falten
- Konstruieren nach Konstruktionsbeschreibung
- Konstruktionsbeschreibung nach Konstruktion