

In jedem Oktanten kann man Kugeln unterschiedlicher Größe so platzieren, dass sie alle drei Koordinatenebenen berühren.

Ihre Mittelpunkte

$$(m|m|m), (m|m|-m), (m|-m|-m), (-m|m|-m)$$

liegen auf den 4 Raumdiagonalen.

Mittelpunkte $(m|m|m)$, $(m|m|-m)$, $(m|-m|-m)$, $(-m|m|-m)$

Eine weitere Ebene E in allgemeiner Lage durchschneidet sieben der acht Oktanten.

Sie schneidet alle vier Raumdiagonalen.

Es gibt Kugeln, die die Koordinatenebenen und diese allgemeine Ebene E berühren - auf jeder der vier Raumdiagonalen müssten zwei Kugelmittelpunkte zu finden sein.

In einem Oktanten keine Kugel, dafür im gegenüberliegenden Oktanten zwei, in den übrigen Oktanten jeweils eine Kugel.

Aufgabe mit überraschender Lösung

Gegeben sind die Koordinatenebenen und die Ebene E mit $E : 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 28$.

Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius aller Kugeln, die alle vier Ebenen berühren.

Wie viele Lösungen erwarten Sie?

Mittelpunkte auf der Raumdiagonalen r_1 : $M(m|m|m)$

Abstand des Mittelpunkts M von Ebene E : m

$$\frac{|3m + 2m + 6m - 28|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} = m \quad | \cdot 7$$

$$3m + 2m + 6m - 28 = 7m$$

$$11m - 28 = 7m$$

$$4m = 28$$

$$\underline{m_1 = 7}$$

$$3m + 2m + 6m - 28 = -7m$$

$$11m - 28 = -7m$$

$$18m = 28$$

$$\underline{m_2 = \frac{14}{9}}$$

Mittelpunkte auf der Raumdiagonalen r_2 : $M(m | -m | m)$

Abstand des Mittelpunkts M von Ebene E : m

$$\frac{|3m - 2m + 6m - 28|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} = m$$

$$3m - 2m + 6m - 28 = 7m$$

$$3m - 2m + 6m - 28 = -7m$$

$$7m - 28 = 7m$$

$$7m - 28 = -7m$$

$$-28 = 0$$

$$14m = 28$$

keine Lösung

$$\underline{m_3 = 2}$$

geheimnisvolle geometrische Eigenschaft

Ebenen in wirklich allgemeiner Lage liefern 8 Lösungen.

Manche Ebenen liefern nur 7 Lösungen, z. Bsp

$$E : x_1 + 2x_2 + 2x_3 = d \quad d \neq 0$$

$$E : 3x_1 + 4x_2 + 12x_3 = d \quad d \neq 0$$

$$E : 6x_1 + 10x_2 + 15x_3 = d \quad d \neq 0$$

Welches gemeinsame Merkmal besitzen diese Ebenen?

Was unterscheidet sie von der allgemeinen Lage?

geheimnisvolle geometrische Eigenschaft

$$E : x_1 + 2x_2 + 2x_3 = d \quad d \neq 0$$

$$E : 3x_1 + 4x_2 + 12x_3 = d \quad d \neq 0$$

$$E : 6x_1 + 10x_2 + 15x_3 = d \quad d \neq 0$$

Beobachtung: der Betrag des Normalenvektors lässt sich als Summe oder Differenz der Komponenten des Normalenvektors darstellen:

$$-1 + 2 + 2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

$$-2 + 3 + 6 = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$$

$$-3 + 4 + 12 = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13$$

$$-6 + 10 + 15 = \sqrt{6^2 + 10^2 + 15^2} = 19$$

.

.. und die geometrische Bedeutung?

Gedrehte Orthonormalbasen

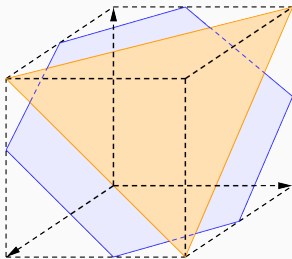
Gesine Geiselman

Januar 2024

Motivation

Würfelschnitte liefern außer Quadraten und Rechtecken auch gleichseitige Dreiecke oder regelmäßige Sechsecke.

Mit gedrehten Würfeln mit ganzzahligen Koordinaten kann man relativ einfach glatt aufgehende Aufgaben zu Winkelberechnungen erstellen.



Die Frage

- Gibt es für jede ungerade Zahl d eine gedrehte Orthonormalbasis $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, deren Koordinaten ganzzahlig sind?
- Kann man für jede ungerade, ganzzahlige Kantenlänge d eines Würfels im kartesischen Koordinatensystem eine Lage finden, so dass eine Ecke im Koordinatenursprung liegt, und nicht alle anderen Ecken in den Koordinatenebenen liegen, aber alle Ecken ganzzahlige Koordinaten haben?
- gesucht:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} h \\ i \\ k \end{pmatrix}$$

mit

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = |\vec{v}_3| = d$$

und

$$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \perp \vec{v}_3 \perp \vec{v}_1$$

(a, b, c, d) mit $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

für vollständig gekürzte pythagoräische Quadrupel gilt:

- d ungerade
- (a, b, c) teilerfremd
- von (a, b, c) sind zwei Werte gerade , der dritte ungerade

Orthonormalbasen: Beispiele - 1

Einheitsmatrix $|\vec{v}| = 1$

1	0	0
0	1	0
0	0	1

Zyklisch vertauschte Vektoren:

$|\vec{v}| = 3$

-1	2	2
2	-1	2
2	2	-1

$|\vec{v}| = 7$

-2	3	6
6	-2	3
3	6	-2

$|\vec{v}| = 13$

-3	4	12
12	-3	4
4	12	-3

Beispiele - 2

Einheitsmatrix $|\vec{v}| = 1$

1	0	0
0	1	0
0	0	1

Pseudoquadrupel:

$|\vec{v}| = 5$

3	0	4
0	5	0
-4	0	3

$|\vec{v}| = 13$

5	0	12
0	13	0
-12	0	5

$|\vec{v}| = 17$

8	0	15
0	17	0
-15	0	8

Beispiele - 3

Einheitsmatrix $|\vec{v}| = 1$

1	0	0
0	1	0
0	0	1

Kreuz

$|\vec{v}| = 9$

-1	4	8
4	-7	4
8	4	-1

$|\vec{v}| = 11$

-2	6	9
6	-7	6
9	6	-2

$|\vec{v}| = 17$

8	12	9
12	-1	12
9	12	-8

Beispiele - 4

weder zyklisch, noch Pseudo, noch Kreuz:

$$|\vec{v}| = 15$$

-11	2	10
2	-14	5
10	5	10

$$|\vec{v}| = 21$$

11	16	8
16	-13	4
8	4	-19

$$|\vec{v}| = 23$$

22	3	-6
3	14	18
-6	18	-13

... aber diagonalsymmetrisch:

a	b	c
b	e	f
c	f	g

Bedingungsgleichungen

a	b	c
b	e	f
c	f	g

$$(1) \quad a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

$$(4) \quad ab + be + cf = 0$$

$$(2) \quad b^2 + e^2 + f^2 = d^2$$

$$(5) \quad ac + bf + cg = 0$$

$$(3) \quad c^2 + f^2 + g^2 = d^2$$

$$(6) \quad bc + ef + fg = 0$$

6 Gleichungen, 6 Unbekannte in Abhängigkeit von d

Wie kommt man an die zugrunde liegenden Zusammenhänge?

Nach welchen Kriterien könnte man die Matrizen ordnen?

Welche Teilmenge könnte man zuerst untersuchen?

$$d = |\vec{v}|, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

Die Differenz zwischen $|\vec{v}| = d$ und einer Koordinate sei Δ

o.B.d.A: $\Delta = d - c$

$$\Delta = 1$$

Setze $\Delta = d - c = 1$:

a : $a \in \mathbb{N}$, frei wählbar

d : $d \in \mathbb{N}$, $d > a$, wählbar, mit Einschränkungen

c : $c = d - \Delta$, also $c = d - 1$

$$b = \sqrt{d^2 - c^2 - a^2} = \sqrt{(c+1)^2 - c^2 - a^2} = \sqrt{2c+1 - a^2}$$

$$b^2 = \underbrace{2c+1 - a^2}$$

$2c+1 - a^2$ muss eine Quadratzahl sein

$$\Delta = 1$$

Setze $\Delta = d - c = 1$:

a : $a \in \mathbb{N}$, frei wählbar

d : $d \in \mathbb{N}$, $d > a$, wählbar mit Einschränkungen

c : $c = d - \Delta$, also $c = d - 1$

$$b = \sqrt{d^2 - c^2 - a^2} = \sqrt{(c+1)^2 - c^2 - a^2} = \sqrt{2c+1 - a^2}$$

$$b^2 = \underbrace{2c+1 - a^2}$$

$2c+1 - a^2$ muss eine Quadratzahl sein

$$\Delta = 1$$

$$b^2 = \underbrace{2c + 1 - a^2}$$

$2c + 1 - a^2$ muss eine Quadratzahl sein: für $a = 1$: $b^2 = 2c$

$$b^2 = 0 \quad c_1 = 0$$

$$b^2 = 4 \quad c_2 = 2$$

$$b^2 = 16 \quad c_3 = 8$$

USW.

$$\Delta = 1 \quad a = 1$$

$$\Delta = 1 \quad a = 1$$

$ \vec{v}_i $	$\vec{v}_1$			$\vec{v}_2$			$\vec{v}_3$			n
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1
3	1	2	2	2	1	-2	2	-2	1	2
9	1	4	8	4	7	-4	8	-4	1	3
19	1	6	18	6	17	-6	18	-6	1	4

die Vorzeichen sind nicht das vorrangige Problem, sondern:

Welche Gemeinsamkeit haben die Zahlen einer Spalte?

$$\Delta = 1 \quad a = 1$$

$$\Delta = 1 \quad a = 1$$

$ \vec{v}_i $	$\vec{v}_1$			$\vec{v}_2$			$\vec{v}_3$			n
1	1	0	0	0	-1	0	0	0	1	0
3	1	2	2	2	1	-2	2	-2	1	1
9	1	4	8	4	7	-4	8	-4	1	2
19	1	6	18	6	17	-6	18	-6	1	3
...	...			...			...			...
	1	$2n$	$2n^2$	$2n$	$2n^2 - 1$	$-2n$	$2n^2$	$-2n$	1	

$$\Delta = 1 \quad a = 3$$

$$\Delta = 1 \quad a = 3$$

$ \vec{v}_i $	$\vec{v}_1$			$\vec{v}_2$			$\vec{v}_3$			n
5	3	0	4	0	-5	0	-4	0	3	0
7	3	2	6	6	-3	-2	-2	-6	3	1
13	3	4	12	12	3	-4	4	-12	3	2
23	3	6	22	18	13	-6	14	-18	3	3
...	...			...			...			...
	3	$2n$	$2n^2 + 4$	$3 \cdot 2n$	$2n^2 - 5$	$-2n$	$2n^2 - 4$	$3(-2n)$	3	

$$\Delta = 1 - a$$

Nach der Untersuchung von $a=1$, $a=3$, $a=5$, $a=7$
war die Rolle des **Parameters a** zu erkennen:

a a	$2an$	$-\frac{1}{2}(a^2 - 1) + 2n^2$
b $2n$	$-\frac{1}{2}(a^2 + 1) + 2n^2$	$-2an$
c $\frac{1}{2}(a^2 - 1) + 2n^2$	$-2n$	a

Mit $b = \sqrt{2c - a^2 + 1}$ und $b = 2n$ folgt $n = \frac{1}{2}\sqrt{2c - a^2 + 1}$

$$\Delta = 1 - a$$

Nach der Untersuchung von $a=1$, $a=3$, $a=5$, $a=7$
war die Rolle des **Parameters a** zu erkennen:

a a	$2an$	$-\frac{1}{2}(a^2 - 1) + 2n^2$
b $2n$	$-\frac{1}{2}(a^2 + 1) + 2n^2$	$-2an$
c $\frac{1}{2}(a^2 - 1) + 2n^2$	$-2n$	a

Mit $b = \sqrt{2c - a^2 + 1}$ und $b = 2n$ folgt $n = \frac{1}{2}\sqrt{2c - a^2 + 1}$

$$\Delta = 1 \quad a$$

a a	$a\sqrt{2c - a^2 + 1}$	$c - a^2 + 1$
b $\sqrt{2c - a^2 + 1}$	$c - a^2$	$-a\sqrt{2c - a^2 + 1}$
c c	$-\sqrt{2c - a^2 + 1}$	a

$$\Delta = 1 - a^2$$

umgeordnet erkennt man die Diagonalmatrix:

die Vorzeichen stimmen noch nicht ganz...

c	a	-b
c	a	$-\sqrt{2c - a^2 + 1}$
a		
a	$c - a^2 + 1$	$a\sqrt{2c - a^2 + 1}$
b		
$\sqrt{2c - a^2 + 1}$	$-a\sqrt{2c - a^2 + 1}$	$c - a^2$

$$\Delta = 2 \quad a$$

Auf die gleiche Art habe ich $\Delta = 2$ untersucht: $\Delta = d - c = 2$

$$b = \sqrt{d^2 - c^2 - a^2} = \sqrt{(2c + 2)^2 - c^2 - a^2} = \sqrt{4c + 4 - a^2}$$

c	a	$-\sqrt{4c - a^2 + 4}$
a	$\sqrt{c^2 + 4c - a^2c + \frac{1}{4}a^4 + 4 - 2a^2}$	$\frac{1}{2}a\sqrt{4c - a^2 + 4}$
$\sqrt{4c - a^2 + 4}$	$-\frac{1}{2}a\sqrt{4c - a^2 + 4}$	$c - \frac{1}{2}a^2$

Wann liefert die Wurzel im Mittelfeld natürliche Zahlen?

$$\Delta = 2 \quad a$$

Wann liefert $\sqrt{c^2 + 4c - a^2c + \frac{1}{4}a^4 + 4 - 2a^2}$ natürliche Zahlen?

$$c^2 + 4c - a^2c + \frac{1}{4}a^4 + 4 - 2a^2 = \dots?$$

$$c^2 + \underbrace{c(4 - a^2)} + \underbrace{\frac{1}{4}a^4 - 2a^2 + 4}$$

$$c^2 - \underbrace{c(a^2 - 4)} + \underbrace{\frac{1}{4}a^4 - 2a^2 + 4}$$

$$c^2 - 2c(\frac{1}{2}a^2 - 2) + (\frac{1}{2}a^2 - 2)^2 = (c - (\frac{1}{2}a^2 - 2))^2$$

also

$$\begin{aligned} \sqrt{c^2 + 4c - a^2c + \frac{1}{4}a^4 + 4 - 2a^2} &= \sqrt{(c - (\frac{1}{2}a^2 - 2))^2} = \\ &= c - \frac{1}{2}a^2 + 2 \end{aligned}$$

die Wurzel liefert für gerade Werte von a eine natürliche Zahl

$$\Delta = 2 \quad a$$

Wann liefert $\sqrt{c^2 + 4c - a^2c + \frac{1}{4}a^4 + 4 - 2a^2}$ natürliche Zahlen?

$c^2 + 4c - a^2c + \frac{1}{4}a^4 + 4 - 2a^2$ kann man umsortieren:

$$c^2 + \underbrace{c(4 - a^2)} + \underbrace{\frac{1}{4}a^4 - 2a^2 + 4}$$

$$c^2 - \underbrace{c(a^2 - 4)} + \underbrace{\frac{1}{4}a^4 - 2a^2 + 4}$$

$$c^2 - 2c(\frac{1}{2}a^2 - 2) + (\frac{1}{2}a^2 - 2)^2 = (c - (\frac{1}{2}a^2 - 2))^2$$

also

$$\begin{aligned}\sqrt{c^2 + 4c - a^2c + \frac{1}{4}a^4 + 4 - 2a^2} &= \sqrt{(c - (\frac{1}{2}a^2 - 2))^2} = \\ &= c - \frac{1}{2}a^2 + 2\end{aligned}$$

die Wurzel liefert für gerade Werte von a eine natürliche Zahl

$$\Delta = 2 \quad a$$

Damit vereinfacht sich die Formel für $\Delta = 2$: $\Delta = d - c = 2$

$$b = \sqrt{d^2 - c^2 - a^2} = \sqrt{(2c + 2)^2 - c^2 - a^2} = \sqrt{4c + 4 - a^2}$$

c	a	$\sqrt{4c - a^2 + 4}$
a	$c - \frac{1}{2}a^2 + 2$	$-\frac{1}{2}a\sqrt{4c - a^2 + 4}$
$\sqrt{4c - a^2 + 4}$	$-\frac{1}{2}a\sqrt{4c - a^2 + 4}$	$-c + \frac{1}{2}a^2$

allgemeines Δ

im Vergleich der Matrizen für $\Delta = 1$, $\Delta = 2$ und $\Delta = 5$

ließ sich eine Matrix für allgemeines Δ aufstellen:

..abgesehen von den Vorzeichen:

c	$-a$	b
$-a$	$-c + \frac{1}{\Delta}a^2 - \Delta$	$\frac{1}{\Delta}ab$
$b = \sqrt{2\Delta c - a^2 + \Delta^2}$	$\frac{1}{\Delta}ab$	$c - \frac{1}{\Delta}a^2$

Zwischenstand:

bisher gezeigt:

- Es gibt unendlich viele Orthonormalbasen mit ganzzahligen Koordinaten
- für frei gewähltes a , c und d kann man eine solche Basis aufstellen, wenn die Formel für b einen natürliche Zahl liefert.

noch zu zeigen:

Es gibt für jedes ungerade $d \in \mathbb{N}$ eine solche Orthonormalbasis

wünschenswert: eine einfachere Formel...

wünschenswert: eine einfachere Formel...

Zwischenstand:

bisher gezeigt:

- Es gibt unendlich viele Orthonormalbasen mit ganzzahligen Koordinaten
- für frei gewähltes a , c und d kann man eine solche Basis aufstellen, wenn die Formel für b eine natürliche Zahl liefert.

noch zu zeigen:

- Es gibt **für jedes** ungerade $d \in \mathbb{N}$ eine solche Orthonormalbasis

wünschenswert: eine einfachere Formel....

Δ unter der Lupe

c c	-a $-a$	b b
-a $-a$	$-c + \frac{1}{\Delta}a^2 - \Delta$	$\frac{1}{\Delta}ab$
b $b = \sqrt{2\Delta c - a^2 + \Delta^2}$	$\frac{1}{\Delta}ab$	$c - \frac{1}{\Delta}a^2$

Unser a steht in der Tabelle **nicht** auf der Diagonalen.

Alle Werte auf der Diagonalen hängen von c und von Δ ab!

Gibt es in jeder Matrix drei Δ -Werte? und $c = d - \Delta$!

Δ unter der Lupe

a	b	c
b	e	f
c	f	g
$\Delta_I = d - a $	$\Delta_{II} = d - e $	$\Delta_{III} = d - g $

Welche Werte nimmt Δ in den bekannten Matrizen an?

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 32, 34, 36, 40, ...?

Welche Gemeinsamkeit haben diese Zahlen?

Δ unter der Lupe

	$d = 7$	
2	6	3
6	-3	2
3	2	-6
$\Delta_I = 5$	$\Delta_{II} = 4$	$\Delta_{III} = 1$

5 4 1

	$d = 13$	
3	12	4
12	-4	3
4	3	-12
$\Delta_I = 10$	$\Delta_{II} = 9$	$\Delta_{III} = 1$

10 9 1

Δ unter der Lupe

	$d = 19$	
6	10	15
10	-15	6
15	6	-10
$\Delta_I = 13$	$\Delta_{II} = 4$	$\Delta_{III} = 9$

13 4 9

In allen gezeigten Fällen gilt $\Delta_{II} + \Delta_{III} = \Delta_I$

und alle bisher aufgetretenen Δ -Werte sind Quadratzahlen oder die Summe aus zwei Quadratzahlen!

.. aber die Vorzeichen sind immer noch nicht befriedigend gelöst

Δ unter der Lupe

Wenn man das Δ sowohl als Differenz als auch als Summe bildet, erhält man in jeder Spalte zwei Δ -Werte:

a	b	c
b	e	f
c	f	g
$\Delta_{I-} = d - a$ $\Delta_{I+} = d + a$	$\Delta_{II-} = d - e$ $\Delta_{II+} = d + e$	$\Delta_{III-} = d - g$ $\Delta_{III+} = d + g$

Δ unter der Lupe

$d = 7 :$

2	6	3
6	-3	2
3	2	-6
$\Delta_{I-} = 5$ $\Delta_{I+} = 9$	$\Delta_{II-} = 10$ $\Delta_{II+} = 4$	$\Delta_{III-} = 13$ $\Delta_{III+} = 1$

$1 + 4 = 5$
 $1 + 9 = 10$
 $9 + 4 = 13$

5 10 13
9 4 1

$d = 13$

3	12	4
12	-4	3
4	3	-12
$\Delta_{I-} = 10$ $\Delta_{I+} = 16$	$\Delta_{II-} = 17$ $\Delta_{II+} = 9$	$\Delta_{III-} = 25$ $\Delta_{III+} = 1$

$1 + 9 = 10$
 $1 + 16 = 17$
 $9 + 16 = 25$

10 17 25
16 9 1

Δ unter der Lupe

Beobachtungen*:

- In jeder Spalte erhält man einen Δ -Wert, der die Summe aus zwei anderen Δ -Werten ist.
- Die Summanden sind Quadratzahlen.

$$k = \sqrt{\Delta_I},$$

$$s = \sqrt{\Delta_{II}},$$

$$t = \sqrt{\Delta_{III}}$$

Was hat es mit diesen drei Quadraten und ihren Wurzeln auf sich?

*es gibt auch Orthonormalbasen mit anderen Δ -Werten, die werden hier nicht betrachtet

Δ unter der Lupe

$d = 7$

2	6	3
6	-3	2
3	2	-6
$\Delta_{I-} = 5$ $\Delta_{I+} = 9$	$\Delta_{II-} = 10$ $\Delta_{II+} = 4$	$\Delta_{III-} = 13$ $\Delta_{III+} = 1$

$1 + 4 = 5$
 $1 + 9 = 10$
 $9 + 4 = 13$

$5 \quad 10 \quad 13$
 $9 \quad 4 \quad 1$

$$k = \sqrt{\Delta_I}$$

$$s = \sqrt{\Delta_{II}}$$

$$t = \sqrt{\Delta_{III}}$$

$$k = \sqrt{9} = 3$$

$$s = \sqrt{4} = 2$$

$$t = \sqrt{1} = 1$$

Nach ungezählten Versuchen taucht die Vermutung auf:

$$k^2 + s^2 + t^2 = \Delta_I + \Delta_{II} + \Delta_{III} = 2d$$

und führt über Umwege, Sackgassen und beglückende Entdeckungen zu folgender Formel:

die Formel

$\frac{k^2 - s^2 - t^2}{2} = k^2 - d$	$k \cdot s$	$k \cdot t$
$k \cdot s$	$\frac{s^2 - k^2 - t^2}{2} = s^2 - d$	$s \cdot t$
$k \cdot t$	$s \cdot t$	$\frac{t^2 - s^2 - k^2}{2} = t^2 - d$

Der Beweis, dass es eine Orthonormalbasis liefert, ist durch Nachrechnen zu führen.

Noch immer zu zeigen: Es gibt **für alle** ungeraden $d \in \mathbb{N}$...

Behauptung:

Es gibt für jedes ungerade $d \in \mathbb{N}$ ein Tripel (k, s, t) mit $k, s, t \in \mathbb{N}$,
so dass gilt:

$$k^2 + s^2 + t^2 = 2d$$

Der Drei-Quadrate-Satz von Gauß besagt: Es gibt für jede natürliche Zahl, die nicht die Form

$$m = 4^a b, \quad a \geq 0 \quad \text{und} \quad b \equiv 7 \pmod{8}$$

hat, eine Zerlegung in drei Quadrate.

Behauptung:

Es gibt für jedes ungerade $d \in \mathbb{N}$ ein Tripel $(k; s; t)$ mit $k; s; t \in \mathbb{N}$,
so dass gilt:

$$k^2 + s^2 + t^2 = 2d$$

Der **Drei-Quadrate-Satz von Gauß** besagt:

Es gibt für jede natürliche Zahl, die nicht die Form

$$m = 4^a b; \quad a \geq 0 \quad \text{und} \quad b \equiv 7 \bmod 8$$

hat, eine Zerlegung in drei Quadrate.

Es gibt für jede natürliche Zahl, die nicht die Form

$$m = 4^a b; \quad a \geq 0 \quad \text{und} \quad b \equiv 7 \pmod{8}$$

hat, eine Zerlegung in drei Quadrate.

Die hier ausgeschlossenen Zahlen sind für $a > 0$ Vielfache von 4, für $a = 0$ sind sie ungerade.

Daraus folgt unmittelbar dass Zahlen der Form $2d = 4n + 2$ in drei Quadrate zerlegt werden können, da sie weder ungerade noch Vielfache von 4 sein können.

Damit ist gezeigt, dass es für jede ungerade natürliche Zahl d (mindestens) eine Orthonormalbasis mit ganzzahligen Koordinaten gibt.

Da die ungeraden Zahlen bei Verdopplung gerade Zahlen liefern, kann man sogar sagen:

Es für jede natürliche Zahl mit Ausnahme der Potenzen von 2 eine nicht triviale Orthonormalbasis mit ganzzahligen Koordinaten.

Viel Freude beim Suchen und Finden - es wirkt wie Zauberei!

so einfach!

$$k^2 + s^2 + t^2 = 2d$$

$k^2 - d$	$k \cdot s$	$k \cdot t$
$k \cdot s$	$s^2 - d$	$s \cdot t$
$k \cdot t$	$s \cdot t$	$t^2 - d$

- Aber zurück zum Anfang: Wo ist die 8.Lösung geblieben? S.54ff

Addendum

Ein Beispiel für eine Basis, bei der die Deltawerte Doppelquadrate (18,32,72) sind, die Summenregel stimmt.

$$32 + 72 = 104 \quad 18 + 32 = 50 \quad 18 + 72 = 90$$

	$d = 61$	
-43	36	24
36	-11	48
24	48	-29
$\Delta_{I-} = 104$	$\Delta_{II-} = 72$	$\Delta_{III-} = 90$
$\Delta_{I+} = 18$	$\Delta_{II+} = 50$	$\Delta_{III+} = 32$

Formel II für Doppelquadrate

Mit $\Delta = 2n^2$

für alle d , die direkt in 3 Quadrate zerlegt werden können
(die also nicht die Form $4^a \cdot b$ mit $b \bmod 8 \equiv 7$ haben)
kann auch die folgende Formel verwendet werden:

Formel II:

$2k^2 - d$	$2k \cdot s$	$2k \cdot t$
$2k \cdot s$	$2s^2 - d$	$2s \cdot t$
$2k \cdot t$	$2s \cdot t$	$2t^2 - d$

Formeln

$k^2 - d$	$k \cdot s$	$k \cdot t$
$k \cdot s$	$s^2 - d$	$s \cdot t$
$k \cdot t$	$s \cdot t$	$t^2 - d$

$2k^2 - d$	$2k \cdot s$	$2k \cdot t$
$2k \cdot s$	$2s^2 - d$	$2s \cdot t$
$2k \cdot t$	$2s \cdot t$	$2t^2 - d$

beide Formeln können mit unterschiedlicher Zerlegung auf äquivalente Basen führen.

Es gibt jedoch auch Basen, die nur mit der zweiten Formel aufgestellt werden können.

zyklische Basen, rotationssymmetrisch

Für $s + t + k = 0$ erhält man eine zyklische (rotationssymmetrische) Orthogonalbasis.

Gemeint ist, dass man die Einheitsbasis um die Raumdiagonale

$r : \vec{x} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dreht (und streckt), um eine

rotationssymmetrische Orthogonalbasis zu erhalten.

Beweis durch Nachrechnen:

In der Formel wird k durch $k = -(s + t)$ ersetzt.

Formel für rotationssym. Orthogonalbasen

Für rotationssymmetrische Orthogonalbasen,
d.h. für Orthogonalbasen, für die $\mathbf{k}+\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{0}$ gilt,
lässt sich Formel I wie folgt vereinfachen:

$s \cdot t = k^2 - d$	$k \cdot s$	$k \cdot t$
$k \cdot s$	$k \cdot t = s^2 - d$	$s \cdot t$
$k \cdot t$	$s \cdot t$	$k \cdot s = t^2 - d$

Für $k = t$ erhält man eine kreuzsymmetrische Basis

Für $s = 0$ erhält man eine Pseudoquadrupel-Basis

die kleinste allgemeine Orthogonalbasis

$$|\vec{v}| = 39$$

13	-34	14
26	19	22
-26	2	29

13	26	-26
-34	19	2
14	22	29

Keine Diagonalsymmetrie, aber sowohl die Spaltenvektoren als auch die Zeilenvektoren bilden jeweils eine Orthonormalbasis.

Aufgabe mit überraschender Lösung

Zurück zur fehlenden achten Lösung:

Gegeben sind die Koordinatenebenen und
die Ebene E mit $E : 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 28$.

Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius aller Kugeln,
die alle vier Ebenen berühren.

Mittelpunkte auf der Raumdiagonalen r_1 : $M(m|m|m)$

Abstand des Mittelpunkts M von Ebene E : m

$$\frac{|3m + 2m + 6m - 28|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} = m$$

$$3m + 2m + 6m - 28 = 7m$$

$$11m - 28 = 7m$$

$$4m = 28$$

$$\underline{m_1 = 7}$$

$$3m + 2m + 6m - 28 = -7m$$

$$11m - 28 = -7m$$

$$18m = 28$$

$$\underline{m_2 = \frac{14}{9}}$$

Mittelpunkte auf der Raumdiagonalen r_2 : $M(m | -m | m)$

Abstand des Mittelpunkts M von Ebene E : m

$$\frac{|3m - 2m + 6m - 28|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} = m \quad | \cdot 7$$

$$\underbrace{3m - 2m + 6m} - 28 = 7m$$

$$7m - 28 = 7m$$

$$-28 = 0$$

keine Lösung

$$3m - 2m + 6m - 28 = -7m$$

$$7m - 28 = -7m$$

$$14m = 28$$

$$\underline{m_3 = 2}$$

Erklärung:

Der Normalenvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ der Ebene gehört zu einer rotationssymmetrischen Basis.

Die Ebene schließt also mit der Raumdiagonalen den gleichen Winkel ein wie die Koordinatenebenen.

Die drei Koordinatenebenen berühren in jedem Oktanten einen Kegel in einer Mantellinie, den Winkelhalbierenden.

Die Ursprungsebene $U : 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0$ ist auch eine Ebene, die diesen Kegel berührt.

Jede Kugel um $M(m | -m | m)$ mit Radius m berührt also die Koordinatenebenen und U .

Die Ebenenschar $U_k : 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = k$

besteht aus Parallelebenen zu U .

Diese Parallelebenen schneiden vom Kegel eine Art Scheibe

- bei Baumstämmen würde man Schwarte sagen -

konstanter maximaler Dicke ab.

In die Kegelspitze passt eine Berührkugel, aber weder in die Schwarte noch im Restkegel ist eine 2. Lösung möglich, denn im Restkörper werden die Kugeln zur Seite geschoben und können nicht mehr alle Ebenen berühren -

und die andere Seite des Doppelkegels wird von der Schnittebene nicht mehr erreicht.

Es gibt keine 2. Lösung auf dieser Raumdiagonalen.

für rotationssymmetrische Orthogonalbasen gilt:

$$k + s + t = 0 \quad k = -s - t$$

$$\vec{v} = (a; b; c) = (st; sk; tk)$$

damit

$$\begin{aligned} |\vec{v}|^2 &= d^2 = (st)^2 + (sk)^2 + (tk)^2 = \\ &= s^2 t^2 + s(-s - t)^2 + (t(-s - t))^2 \end{aligned}$$

$$d^2 = s^4 + 2s^3 t + 3s^2 t^2 + st^3 + t^4$$

Lösungen - geheimnisvolle Eigenschaft

für rotationssymmetrische Orthogonalbasen gilt:

$$k + s + t = 0 \quad k = -s - t$$

$$\vec{v} = (a; b; c) = (st; sk; tk)$$

$$d^2 = s^4 + 2s^3t + 3s^2t^2 + st^3 + t^4$$

$$\begin{aligned} \text{gleichzeitig gilt: } (st + s(-s - t) + (t(-s - t)))^2 &= \\ &= (st - s^2 - st - t^2 - st)^2 = (s^2 + st + t^2)^2 = \end{aligned}$$

$$= s^4 + 2s^3t + 3s^2t^2 + st^3 + t^4$$

Also lässt sich bei rotationssymmetrischen Basen, bzw. bei Ebenen, die parallel zu Mantelebenen liegen, der Betrag des (Normalen-)Vektors auch als Summe seiner Koordinaten darstellen

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Quadratsummen

Quadratsummen Blatt 1a		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1	8																							
2	5	4	18																						
3	10	13	9	32																					
4	17	20	25	16	50																				
5	26	29	34	41	25	76																			
6	37	40	45	52	61	36	98																		
7	50	53	58	65	74	85	49	128																	
8	65	68	73	80	89	100	113	64	192																
9	82	85	90	97	106	117	130	145	81	10 ² =															
10	101	104	109	116	125	136	149	164	181	100	242														
11	122	125	130	137	146	157	170	185	202	221	121	288					15								
12	145	148	153	160	169	180	193	208	225	244	265	144	338				16								
13	170	173	178	185	194	205	218	233	250	269	290	313	169	392			450	17							
14	197	200	205	212	221	232	245	260	277	296	317	340	365	196	15 ² =				18						
15	226	229	234	241	250	261	274	289	306	325	346	369	394	421	225	512				19					
16	257	260	265	272	281	292	305	320	337	356	377	400	425	452	481	256	578				20				
17	290	293	299	305	314	325	338	353	370	389	410	433	458	485	514	545	289	648					21		
18	325	328	333	340	349	360	373	388	405	424	445	468	493	520	549	580	613	324	722				800	22	
19	362	365	370	377	386	397	410	425	442	461	482	505	530	557	586	617	650	685	361	20 ² =					23
20	401	404	409	416	425	436	449	464	481	500	521	544	569	596	625	656	689	724	761	400	882				24
21	442	445	450	457	466	477	492	507	524	543	564	587	612	639	673	704	737	765	802	841	441	968			
22	485	488	493	500	509	520	533	548	565	584	605	628	653	680	709	740	773	808	845	884	925	484	1058		
23	530	533	538	545	554	565	578	593	610	627	650	673	698	725	754	785	818	851	888	929	970	1013	529	1152	
24	577	580	585	592	601	612	625	640	657	676	697	720	745	772	801	832	865	900	937	976	1017	1060	1105	576	
25	626	629	634	641	650	661	674	689	706	725	746	769	794	821	850	881	914	949	986	1025	1066	1109	1154	1201	
26	677	680	685	692	701	712	725	740	757	776	797	820	845	872	901	932	965	1000	1037	1076	1117	1160	1205	1252	
27	730	733	738	745	754	765	778	793	810	829	850	873	898	925	954	985	1018	1053	1090	1129	1170	1213	1258	1305	
28	785	788	793	800	809	820	833	848	865	884	905	928	953	980	1009	1040	1073	1108	1145	1184	1225	1268	1303	1360	
29	842	845	850	857	866	877	890	905	922	941	962	985	1010	1037	1066	1097	1130	1165	1202	1241	1282	1325	1370	1417	
30	901	904	909	916	925	936	949	964	981	1000	1021	1044	1069	1096	1125	1156	1189	1224	1261	1300	1341	1384	1429	1476	

zwischen 1 und 499 gibt es

192 Quadratsummen abzügl. Dubletten

kursiv: doppelt

unterstrichen: dreifach

kursiv und unterstrichen: vierfach oder mehr

200

Quadratsummen

	Quadratsummen BI 2a										kursiv: doppelt					unterstrichen: dreifach					kursiv unterstrichen: vierfach und mehr							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24				
31	967	965	970	977	985	997	1010	1025	1042	1061	1082	1105	1130	1157	1188	1217	1250	1285	1322	1361	1402	1445	1490	1537				
32	1025	1028	1033	1040	1049	1060	1073	1088	1105	1124	1145	1168	1193	1220	1249	1280	1313	1348	1385	1424	1465	1508	1553	1600				
33	1090	1093	1098	1105	1114	1125	1138	1153	1170	1189	1210	1233	1258	1285	1314	1345	1378	1413	1450	1489	1530	1573	1618	1665				
34	1157	1160	1165	1172	1181	1192	1205	1220	1237	1256	1277	1300	1325	1352	1381	1412	1445	1480	1517	1556	1597	1640	1685	1732				
35	1226	1229	1234	1241	1250	1261	1274	1289	1306	1325	1346	1369	1394	1421	1450	1481	1514	1549	1586	1625	1666	1709	1754	1801				
36	1297	1300	1305	1312	1321	1332	1345	1360	1377	1396	1417	1440	1465	1492	1521	1552	1585	1620	1657	1696	1737	1780	1825	1872				
37	1370	1373	1378	1385	1394	1405	1418	1433	1450	1469	1490	1513	1538	1565	1594	1625	1658	1693	1730	1769	1810	1853	1898	1945				
38	1445	1448	1453	1460	1469	1480	1493	1508	1525	1544	1565	1588	1613	1640	1669	1700	1733	1768	1805	1844	1885	1928	1973	2020				
39	1522	1525	1530	1537	1546	1557	1570	1585	1602	1621	1642	1665	1690	1717	1746	1777	1810	1845	1882	1921	1962	2005	2050	2097				
40	1601	1604	1609	1616	1625	1636	1649	1664	1681	1700	1721	1744	1769	1796	1825	1856	1889	1924	1961	2000	2041	2084	2129	2176				
41	1682	1685	1690	1697	1706	1717	1730	1745	1762	1781	1802	1825	1850	1877	1906	1937	1970	2005	2042	2081	2122	2165	2210	2257				
42	1765	1768	1773	1780	1789	1800	1813	1828	1845	1864	1885	1908	1933	1960	1989	2020	2053	2088	2125	2164	2205	2248	2293	2340				
43	1853	1853	1858	1865	1874	1885	1898	1913	1930	1949	1970	1993	2018	2045	2074	2105	2138	2173	2210	2249	2290	2333	2378	2425				
44	1937	1940	1945	1952	1961	1972	1985	2000	2017	2036	2057	2080	2105	2132	2161	2192	2225	2260	2297	2336	2377	2420	2465	2512				
45	2026	2029	2034	2041	2050	2061	2074	2089	2106	2125	2146	2169	2194	2221	2250	2281	2314	2349	2386	2425	2466	2509	2554	2601				
46	2117	2120	2125	2132	2141	2152	2165	2180	2197	2216	2237	2260	2285	2312	2341	2372	2405	2440	2477	2516	2557	2600	2645	2692				
47	2210	2213	2218	2225	2234	2245	2258	2273	2290	2309	2330	2353	2378	2405	2434	2465	2498	2533	2570	2609	2650	2693	2738	2785				
48	2305	2308	2313	2320	2329	2340	2353	2368	2385	2404	2425	2448	2473	2500	2531	2560	2593	2628	2665	2704	2745	2788	2833	2880				
49	2402	2405	2410	2417	2426	2437	2450	2465	2482	2501	2522	2545	2570	2597	2628	2657	2690	2725	2762	2801	2842	2885	2930	2977				
50	2501	2504	2509	2516	2525	2536	2549	2564	2581	2600	2621	2644	2669	2698	2727	2756	2789	2824	2861	2900	2941	2984	3029	3076				
51	2602	2605	2610	2617	2626	2637	2650	2665	2682	2701	2722	2745	2770	2799	2828	2857	2889	2925	2963	3001	3042	3085	3130	3177				
52	2705	2708	2713	2720	2729	2740	2753	2768	2785	2804	2825	2848	2873	2902	2931	2960	2993	3028	3065	3104	3145	3188	3233	3280				
53	2810	2813	2818	2825	2834	2845	2858	2873	2890	2909	2930	2953	2977	3005	3036	3065	3098	3133	3170	3209	3250	3293	3338	3385				
54	2917	2920	2925	2932	2941	2952	2965	2980	2997	3016	3037	3060	3085	3112	3143	3172	3205	3240	3277	3316	3367	3400	3445	3492				
55	3026	3029	3034	3041	3050	3061	3074	3089	3106	3125	3146	3169	3194	3221	3252	3281	3314	3349	3386	3425	3476	3509	3554	3601				
56	3137	3140	3145	3152	3161	3172	3185	3200	3217	3236	3257	3280	3305	3332	3363	3392	3425	3460	3497	3536	3587	3620	3665	3712				
57	3250	3253	3258	3265	3274	3285	3298	3313	3330	3349	3370	3393	3418	3445	3471	3505	3538	3573	3610	3649	3690	3733	3778	3825				
58	3365	3368	3373	3380	3389	3400	3413	3428	3445	3464	3485	3508	3533	3560	3591	3620	3653	3688	3725	3764	3815	3848	3893	3940				
59	3482	3485	3490	3497	3506	3517	3530	3545	3562	3581	3602	3625	3650	3677	3708	3737	3770	3805	3842	3881	3922	3965	4010	4057				
60	3601	3604	3609	3616	3625	3636	3649	3664	3681	3700	3721	3744	3769	3796	3827	3856	3889	3924	3961	4000	4041	4084	4129	4176				

Quadratsummen

Quadratsummen						Blatt 1b																								
	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40														
1																														
2																														
3																														
4																														
5																														
6																														
7																														
8																														
9																														
10																														
11																														
12																														
13																														
14																														
15																														
16																														
17																														
18																														
19																														
20																														
21																														
22																														
23																														
24																														
25																														
26																														
27																														
28																														
29																														
30																														

25

26

1250 27

28

29

30

31

32

33

34

zwischen 3000 und 3499

gibt es 198 Quadratsummen abzügl Dubletten

68

zwischen 3000 und 3499
gibt es 198 Quadratsummen abzügl Dubletten

Quadratsummen

		Quadratsummen Bl 2b																									
	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48			
31	1586	1637	1745	1852	1961	2072	961	2048			35																
32	1649	1700	1753	1808	1865	1924	1985	1024	2178			36															
33	1714	1765	1818	1873	1930	1989	2050	2113	1089	2312				37													
34	1781	1832	1885	1940	1997	2056	2117	2180	2245	1156	1352=			38													
35	1850	1901	1954	2009	2066	2125	2186	2249	2314	2381	1225	2592			39												
36	1921	1972	2025	2080	2137	2194	2255	2318	2385	2452	2521	1296	2738			40											
37	1994	2045	2098	2153	2210	2267	2328	2391	2456	2525	2594	2665	1369	2888													
38	2069	2120	2173	2228	2285	2344	2405	2468	2533	2600	2669	2740	2813	1444	3042	402=	41										
39	2146	2197	2250	2305	2362	2421	2480	2543	2610	2677	2746	2817	2890	2965	1521	3200											
40	2225	2276	2329	2384	2441	2500	2561	2624	2689	2756	2825	2796	2869	3044	3121	1600											
41	2306	2357	2410	2465	2522	2581	2642	2705	2770	2837	2906	2977	3050	3125	3202	3281	1681										
42	2389	2440	2493	2548	2605	2664	2725	2788	2853	2920	2989	3060	3133	3208	3285	3364	3445	1764									
43	2474	2525	2578	2633	2690	2749	2810	2873	2938	3005	3074	3145	3218	3293	3370	3449	3530	3613	1849								
44	2561	2612	2665	2720	2777	2836	2897	2960	3025	3092	3161	3232	3305	3380	3457	3536	3617	3700	3785	1936	455=						
45	2650	2701	2754	2809	2866	2925	2986	3049	3114	3181	3250	3321	3394	3469	3546	3625	3706	3789	3874	3961	2025						
46	2741	2792	2845	2900	2957	3016	3077	3140	3205	3272	3341	3412	3485	3560	3637	3716	3797	3880	3965	4052	4141	2116					
47	2834	2885	2938	2993	3050	3109	3170	3233	3298	3365	3434	3505	3578	3653	3730	3809	3890	3973	4058	4145	4234	4325	2209				
48	2929	2980	3033	3088	3145	3204	3265	3328	3393	3460	3529	3600	3673	3748	3825	3904	3985	4068	4153	4240	4329	4420	4513	2304			
49	3026	3077	3130	3185	3242	3301	3362	3425	3490	3557	3626	3697	3770	3845	3922	4001	4082	4165	4250	4337	4426	4517	4610	4705			
50	3125	3176	3229	3284	3341	3400	3461	3524	3589	3656	3725	3796	3869	3944	4021	4100	4181	4264	4349	4436	4525	4616	4709	4804			
51	3226	3277	3330	3385	3442	3501	3562	3625	3690	3757	3826	3897	3970	4045	4122	4201	4282	4365	4450	4537	4626	4717	4810	4905			
52	3329	3380	3433	3488	3545	3604	3665	3728	3793	3860	3929	4000	4073	4148	4225	4304	4385	4468	4553	4640	4729	4820	4913	5008			
53	3434	3486	3538	3593	3650	3709	3770	3833	3898	3965	4034	4105	4178	4253	4330	4409	4490	4573	4658	4745	4834	4925	5018	5113			
54	3541	3593	3645	3700	3757	3816	3877	3940	4005	4072	4141	4212	4285	4360	4437	4516	4597	4680	4765	4852	4941	5032	5125	5220			
55	3650	3702	3754	3809	3866	3925	3986	4049	4116	4181	4250	4321	4394	4469	4546	4625	4706	4789	4874	4961	5050	5141	5234	5329			
56	3761	3813	3865	3920	3977	4036	4097	4160	4227	4292	4361	4432	4505	4580	4657	4736	4817	4900	4985	5072	5161	5252	5345	5440			
57	3874	3926	3978	4033	4090	4149	4210	4273	4340	4405	4474	4545	4618	4693	4770	4849	4931	5013	5098	5185	5274	5365	5458	5553			
58	3989	4041	4093	4148	4205	4264	4325	4388	4455	4520	4589	4660	4733	4808	4885	4964	5045	5118	5213	5300	5389	5480	5573	5668			
59	4106	4158	4210	4265	4322	4381	4442	4505	4572	4637	4706	4777	4850	4925	5002	5081	5162	5235	5330	5417	5506	5597	5690	5785			
60	4225	4277	4329	4384	4441	4500	4561	4624	4691	4756	4825	4896	4969	5044	5121	5200	5281	5354	5449	5536	5625	5716	5809	5904			