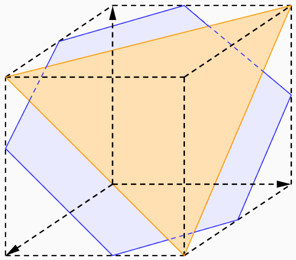
Es gibt für jedes ungerade $d \in \mathbb{N}$ mindestens eine gedrehte Orthonormalbasis mit ganzzahligen Koordinaten - Beweis

Gesine Geiselmann

Januar 2024

Motivation

Würfelschnitte liefern außer Quadraten und Rechtecken auch gleichseitige Dreiecke oder regelmäßige Sechsecke.
Mit gedrehten Würfeln mit ganzzahligen Koordinaten kann man relativ einfach glatt aufgehende Aufgaben zu Winkelberechnungen erstellen.



Die Frage

- Gibt es für jede ungerade Zahl d eine gedrehte Orthonormalbasis $(\vec{v_1},\ \vec{v_2},\ \vec{v_3})$, deren Koordinaten ganzzahlig sind?
- Kann man für jede ungerade, ganzzahlige Kantenlänge d eines Würfels im kartesischen Koordinatensystem eine Lage finden, so dass eine Ecke im Koordinatenursprung liegt, und nicht alle anderen Ecken in den Koordinatenebenen liegen, aber alle Ecken ganzzahlige Koordinaten haben?
- gesucht:

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\ \vec{v_2} = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix},\ \vec{v_3} = \begin{pmatrix} h \\ i \\ j \end{pmatrix}$$

mit

$$|\vec{v_1}| = |\vec{v_2}| = |\vec{v_3}| = d$$

und

$$\vec{v_1} \perp \vec{v_2} \perp \vec{v_3} \perp \vec{v_1}$$

die Formel

Behauptung:

Es gibt für jedes ungerade $d \in \mathbb{N}$ ein Tripel (k, s, t) mit $k, s, t \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$k^2 + s^2 + t^2 = 2d$$

und die dargestellte Matrix eine Orthonormalbasis liefert.

$k^2 - d$	$k \cdot s$	$k \cdot t$
$k \cdot s$	$s^2 - d$	$s \cdot t$
$k \cdot t$	$s \cdot t$	$t^2 - d$

Beweis $|v_1| = |v_2| = |v_3| = d$

(1): Der Beweis, dass es eine Orthonormalbasis liefert,
ist durch Nachrechnen zu führen:

- $|\vec{v_1}|^2 = d^2$?

$|\vec{v_1}|^2 = (k^2 - d)^2 + k^2 s^2 + k^2 t^2 = 0,25(k^2 - s^2 - t^2)^2 + k^2 s^2 + k^2 t^2 =$
$= 0,25(k^4 + s^4 + t^4 - 2k^2 s^2 - 2k^2 t^2 + 2s^2 t^2) + k^2 s^2 + k^2 t^2 =$

$$= 0,25(k^4 + s^4 + t^4) + 0,5(k^2 s^2 + k^2 t^2 + s^2 t^2)$$

und $d^2 = (\frac{k^2+s^2+t^2}{2})^2 = \frac{1}{4}(k^4 + s^4 + t^4 + 2s^2 k^2 + s^2 t^2 + sk^2 t^2)$

also $\vec{v} = d$, aus rotationssymmetrischen Gründen für alle drei Vektoren.

Beweis $\vec{v_1} \perp \vec{v_2} \perp \vec{v_3} \perp \vec{v_1}$

- $\vec{v_1} \perp \vec{v_2} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v_1} \circ \vec{v_2} = 0$?

$\frac{k^2-s^2-t^2}{2} \cdot ks + ks \cdot \frac{s^2-k^2-t^2}{2} + kt \cdot st =$

$= 0,5(k^3s - ks^3 - kst^2) + 0,5(ks^3 - k^3s - kst^2) + kst^2 = 0$

Aus rotationssymmetrischen Gründen

entsprechend für $\vec{v_2} \perp \vec{v_3}$ und $\vec{v_1} \perp \vec{v_3}$

Beweis der Existenz

(2) Es gibt für jedes ungerade $d \in \mathbb{N}$ ein Tripel $(k; s; t)$ mit $k; s; t \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$k^2 + s^2 + t^2 = 2d$$

Der **Drei-Quadrate-Satz von Gauß** besagt:

Es gibt für jede natürliche Zahl, die nicht die Form

$$m = 4^a b; \quad a \geq 0 \quad und \quad b \ \equiv 7 mod\ 8$$

hat, eine Zerlegung in drei Quadrate.

Die hier ausgeschlossenen Zahlen sind für $a > 0$ Vielfache von 4, für $a = 0$ sind sie ungerade.

Daraus folgt unmittelbar dass Zahlen der Form $2d = 4n + 2$ in drei Quadrate zerlegt werden können, da sie weder ungerade noch Vielfache von 4 sein können.

Schlussfolgerung

Damit ist gezeigt, dass es für jede ungerade natürliche Zahl d (mindestens) eine Orthonormalbasis mit ganzzahligen Koordinaten gibt.

Da die ungeraden Zahlen bei Verdopplung gerade Zahlen liefern, kann man sogar sagen:
Es existiert für jede natürliche Zahl mit Ausnahme der Potenzen von 2 eine nicht triviale Orthonormalbasis mit ganzzahligen Koordinaten.

q.e.d.

Stuttgart, Januar 2024
Gesine Geiselmann