# Bericht vom 37. Treffen des Kolloquiums Mathematik und Geisteswissenschaft 19.-21.Oktober 2018

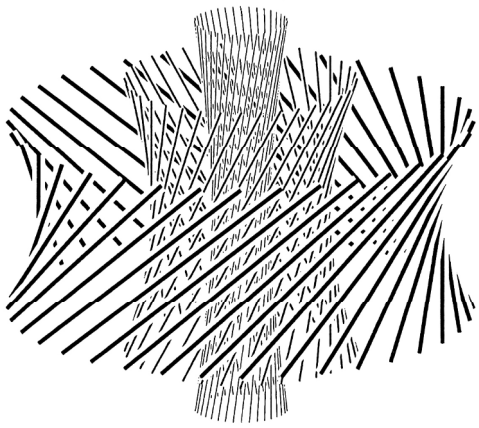
**Anwesende:** Astrid Baumann, Lou de Boer, Dieter Braun, Nadine Braxmeier-Even, Oliver Conradt, Immo Diener, Stephen Kicey, Matthias Lerchmüller, Thomas Neukirchner, Christina Pederiva, Adrian Raap, Jan Steenbruggen, Wim Viersen, Anton Winter

**Entschuldigt:** Charles Gunn, Frank Schäfer

Den Auftakt des Treffens bildete die Weiterarbeit an GA 201 (Entsprechung zwischen Mikrokosmos und Makrokosmos), 9.Vortrag, unter Leitung von **Jan Steenbruggen**.

**Matthias Lerchmüller** setzte in seinem Beitrag die beim letzten Treffen in Holland begonnene Darstellung imaginärerer Elemente nach von Staudt fort. Diesmal waren die imaginären Elemente im Raum Gegenstand der Betrachtung. Die Definition imaginärer Punkte lässt sich direkt aus der Ebene in den Raum übertragen: ein imaginärer Punkt setzt sich zusammen aus einer Punktreihe als Träger, einer Involution auf dieser Punktreihe und einer ausgezeichneten Orientierung der Punktreihe. Durch Dualisieren im Raum erhält man die imaginären Ebenen. Die zum Zweidimensionalen analoge Konstruktion imaginärer Geraden als gerichtete Involution auf einem Strahlenbüschel ergibt allerdings nur die sogenannten imaginären Geraden 1.Art: diese sind Verbindungsgeraden zweier imaginärer Punkte, deren Trägergeraden in einem gemeinsamen Büschel liegen. Sind die Trägergeraden hingegen windschief, wird man auf die imaginären Geraden 2.Art geführt, die nun tiefer in die Liniengeometrie führen.

Geometrisch anschaulich entspricht eine solche imaginäre Gerade einer Involution auf einer Regelschar, also ebenfalls einem eindimensionalen Gebilde. Allerdings ist diese Regelschar nicht eindeutig bestimmt. Vielmehr gibt es $\infty^3$ solcher Regelscharen, deren Leitgeraden alle einer elliptischen Kongruenz angehören (siehe Abbildung aus MPK Nr.224, S.46): das sind die $\infty^2$ Doppelgeraden einer speziellen Involution im Raum, die weder Doppelpunkte noch Doppelebenen hat, eine sogenannte elliptisch gescharte Involution. Diese ist die eindeutige Fortsetzung auf den gesamten Strahlenraum der Involution auf der Regelschar. Diese Betrachtungsweise ist notwendig, um eine für alle Regelscharen konsistente Orientierung definieren zu können.



Im Handout hat Matthias Lerchmüller die Originalformulierungen nach von Staudt zitiert und zeitgemäße Neuformulierungen dazu angegeben.

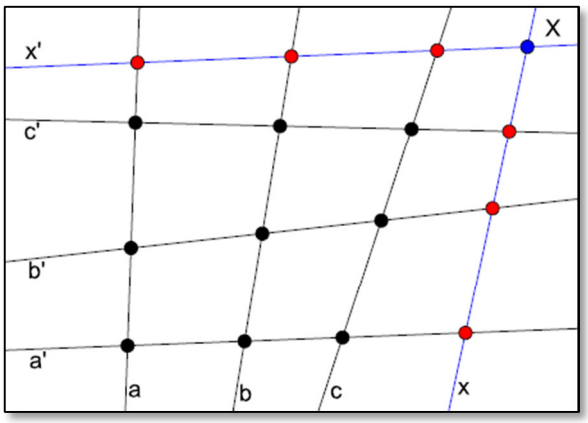
**Nadine Braxmeier-Even** stellte in ihrem Beitrag die Arbeit des Mathematikers H.F.Baker vor. Baker war zeitgleich mit P.Dirac in Cambridge tätig. Vermutlich wurde Dirac durch Baker inspiriert in projektiver Geometrie. Baker hat ein 6-bändiges Werk über Geometrie verfasst[1]. Er beginnt mit der Zugrundelegung folgender algebraischen Struktur: Punkte $P$ werden dargestellt als Produkt $mP$ mit einem Koeffizienten $m \in M$ in einem Ring $M$. $P$ wird dabei als Symbol gehandhabt. Geraden werden dann dargestellt als Linearkombinationen zweier Punkte: $mP + nQ = -kR$. Die daraus folgende Beziehung $mP + nQ + kR = 0$ nennt Baker ein „Syzygy". Ein $n$-dimensionales Element wird i.A. durch $n + 1$ unabhängige Punkte bestimmt. $n + 2$ darin enthaltene Punkte sind dann durch ein Syzygy verbunden. Weitere Eigenschaften werden nicht benötigt.

In diesem Formalismus lassen sich nun alle geometrischen Inzidenzsätze beweisen. Dies wurde anhand dreier Beispiele demonstriert:

1) Existenz einer eindeutigen Transversalen zweier windschiefer Geraden durch einen gegebenen Punkt.

2) Der Beweis des Satzes von Desargues ist in diesem Formalismus ein „Dreizeiler" und kann in der Ebene geführt werden im Unterschied zur synthetischen projektiven Geometrie, wo sich der Satz von Desargues nur unter Zuhilfenahme des Raumes beweisen lässt.

3) Beweis des Satzes von Pappos (Kreuzliniensatz): dieser ist in diesem Formalismus nur unter zusätzlichen Annahmen gültig. Eine mögliche Formulierung ist die folgende räumliche Bedingung: gegeben 2 Tripel von Geraden $(a, b, c)$ und $(a', b', c')$, von denen jede Gerade des einen Tripels alle Geraden des anderen Tripels schneidet. Dann soll gelten, dass sich jede Transversale $x'$ von $(a, b, c)$ mit jeder Transversalen $x$ von $(a', b', c')$ in einem Punkt $X$ schneidet. Geometrisch bedeutet dies, dass es zu jeder Regelschar eine Leitschar gibt. Algebraisch hat dies zur Konsequenz, dass der Koeffizientenring kommutativ sein muss.

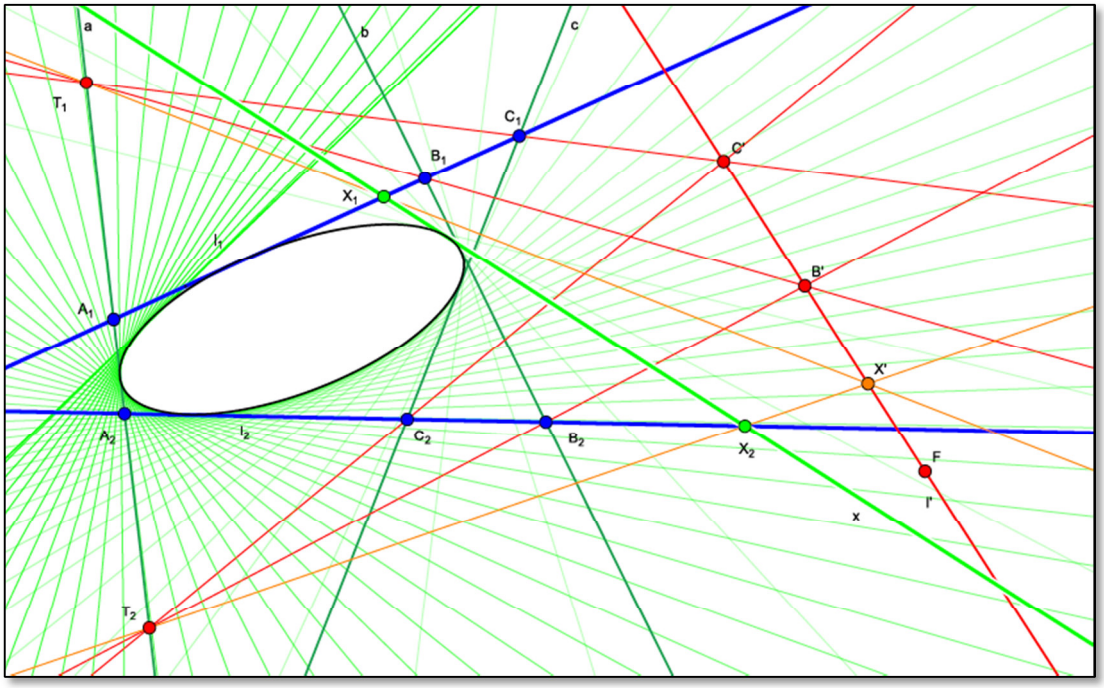



Unter dieser Voraussetzung ergab eine längere Rechnung schließlich den Satz von Pappos.

**Jan Steenbruggen** behandelte in seinem Beitrag, wie sich Sätze der ebenen projektiven Geometrie aus dem Raum heraus verstehen lassen. Als erstes Beispiel wurde die Tatsache betrachtet, dass sich eine Projektivität zwischen zwei Punktreihen – wie sie z.B. zum Zeichnen eines Strahlenbüschels 2.Ordung in der Schule verwendet wird – auf unendlich viele verschiedene Arten konstruktiv durch Schnitt und Schein realisieren lässt (siehe Locher-Ernst, Satz 28 im Buch „Projektive Geometrie"): gegeben zwei Geraden $l_1(A_1, B_2, C_3)$ und $l_2(A_2, B_2, C_2)$. Dadurch wird eindeutig eine Projektivität $l_1 \to l_2$ bestimmt mit $A_1 \to A_2$,

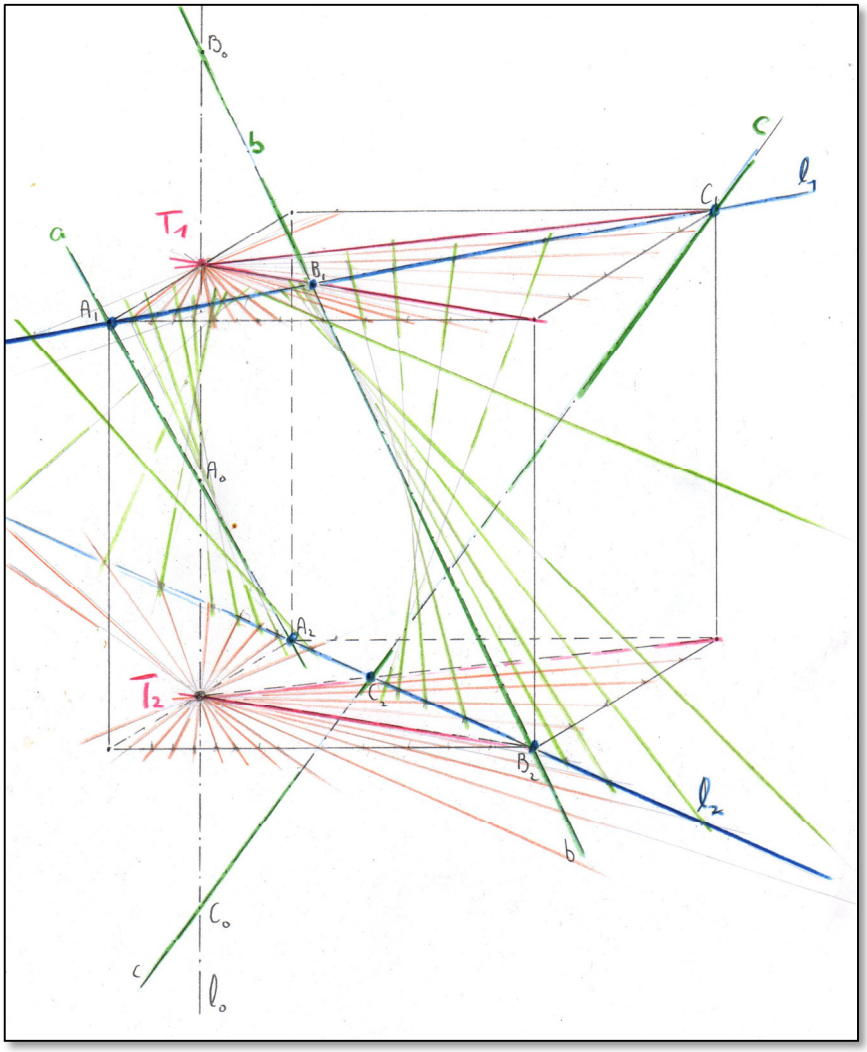
[1] Das Buch ist hier verfügbar: https://archive.org/details/principlesofgeom01bake

$B_1 \to B_2$ und $C_1 \to C_2$. Zu einem beliebigen Punkt $X_1 \in l_1$kann dann der Bildpunkt $X_2 \in l_2$ nach untenstehender Konstruktion gefunden werden: $T_1$ und $T_2$ sind beliebig gewählt auf $A_1A_2$. Die Strahlenbüschel $T_1$ und $T_2$ enstehen als Schein der Punktreihen $l_1$ und $l_2$. Die beiden Büschel sind dann perspektiv bzgl. der Geraden $l' = B'C'$ mit $B' = (T_1B_1) \cap (T_2B_2)$, $C'$ analog. Wie aber kann man nun verstehen, dass unabhängig von der Wahl der Punkte $T_1$ und $T_2$ immer dieselbe Projektivität, d.h. derselbe Kegelschnitt entsteht?

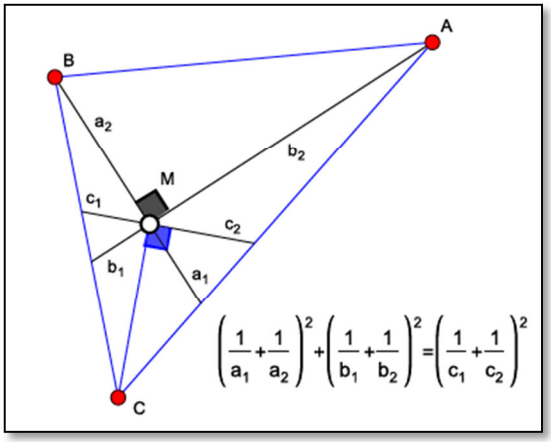



Hierzu werden die Geraden $l_1$ und $l_2$ als Projektion windschiefer Geraden im Raum betrachtet – siehe hierzu das Übungsblatt auf der nächsten Seite. $l_0(A_0, B_0, C_0)$ ist hierbei eine beliebige Transversale der Geraden $a, b, c$. Die Projektivität $l_1 \to l_2$ wird nun vermittelt durch das Ebenenbüschel $l_0$. Zur Konstruktion der Schnittpunkte der Ebenen des Büschels $l_0$ mit den beiden Geraden $l_1$ und $l_2$ können die Punkte $T_1$ und $T_2$ beliebig gewählt. Im vorliegenden Fall ist die Schnittgerade der beiden Ebenen $T_1l_1$ und $T_2l_2$ die horizontale Ferngerade, daher ist es besonders einfach, die beiden Strahlenbüschel $T_1$ und $T_2$ aufeinander zu beziehen (parallele Geraden). Die ebene Figur entsteht nun durch Projektion aus einem Punkt in der Ebene $l_0a$.

Der Satz von Brianchon zeigt sich in derselben Konstruktion: $al_1bl_2cl_0$ bilden ein räumliches Sechskant. Gegenüberliegende Kanten liegen jeweils in einer gemeinsamen Ebene, da jede der Geraden $l_i$ alle Geraden $a, b, c$ schneidet. Die Schnittgeraden dieser Ebenen sind gleichzeitig die Verbindungsgeraden gegenüberliegender Ecken im Sechseck $A_1B_1B_2C_2C_0A_0$. Der gemeinsame Punkt dieser 3 Schnittgeraden heißt Brianchon-Punkt. Nun wird diese Figur wieder in die Ebene projiziert. Da das räumliche Sechskant der von $(a, b, c)$ erzeugten Regelschar bzw. der zugehörigen Leitschar $(l_0, l_1, l_2)$ angehört, sind deren Projektionen Strahlen einer Geradenschar 2.Ordnung, d.h. Tangenten an einen Kegelschnitt. Der Satz von Pascal ergibt sich durch Dualisierung der obigen Vorgehensweise.




**Immo Diener** setzte seine Beitragsreihe zur polareuklidischen Geometrie fort. Diesmal wurde die Polarisierung des Satzes des Pythagoras thematisiert. Die übliche Formulierung $a^2 + b^2 = c^2$ legt geometrisch eine Interpretation als Beziehung zwischen Flächeninhalten nahe. In diesem Sinne wird der Pythagoras aber eigentlich nie angewendet. Sachgmäßer erscheint es, den Pythagoras als eine Beziehung zwischen den Seitenlängen des Dreiecks aufzufassen. Ein rechtwinkliges Dreieck lässt sich in diesem Sinne z.B. charakterisieren als ein Dreieck, dass durch eine Höhe in zwei ähnliche Dreiecke zerlegt wird. Daraus ergibt sich leicht der Satz des Pythagoras.




Für die Polarisierung des Pythagoras wurden die polareuklidischen Entsprechungen für einen rechten Winkel und für den Abstand zwischen zwei Punkten in Erinnerung gerufen. Daraus ergab sich die allgemeine Form des polareuklidischen Pythagoras (siehe Abbildung). $M$ ist dabei der Nahpunkt, also die in ihrer Lage frei wählbare Entsprechung der Ferngeraden. Es wurden dann die Spezialfälle besprochen, bei denen $AB$ bzw. $BC$ auf der

Ferngeraden liegen. Der letzte Fall führt auf eine besonders einfache Version des polareuklidischen Pythagoras, bei der die für die Euklidischen Abstände relevanten Teile der Konstruktion ebenfalls ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Mit der üblichen Bezeichnung im rechtwinkligen Dreieck gilt dann $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{{h_c}^2}$. Multiplikation dieser Gleichung mit $(ab)^2$ ergibt den üblichen Pythagoras. Die Multiplikation mit $ab$ ergibt die Identität

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{c}{h} \quad \text{mit} \quad ab=ch$$

Diese Gleichung vermittelt sozusagen zwischen dem Pythagoras (Multiplikation mit $ab$) und dem dualen Pythagoras (Division durch $ab$).

Zum Schluss hat Immo Diener eine spektakuläre Anwendung des polareuklidischen Pythagoras gezeigt, die er in einer Arbeit von Johan Wästlund[2] gefunden hat, allerdings ohne den Bezug zur polareuklidischen Geometrie. Die iterierte Anwendung von $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{\mathrm{h}^2}$ führt auf die Summe der unendlichen Reihen $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$, die zuerst von Leonard Euler gefunden wurde (das sogenannte Baseler Problem).

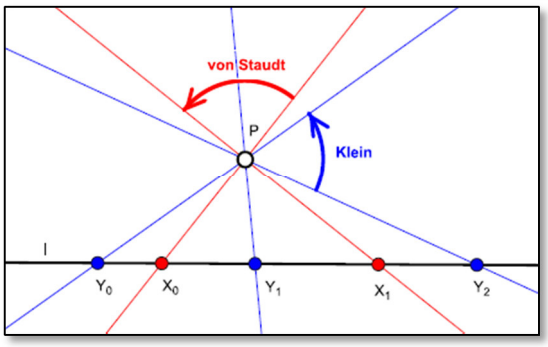
**Loe de Boer** zeigte zu Beginn seines Beitrags, wie die Inzidenzbeziehung im projektiven Raum zusammen mit dem Dimension als eine Halbordnung $x \prec y$ beschrieben werden kann. Insbesondere lassen sich damit die Grundgebilde als Intervalle $\langle x,y\rangle := \{z|x \prec z \prec y\}$ schreiben.

Im Anschluss setzte er die in Holland begonnene Darstellung der imaginären Elemente nach Klein fort. Wie im Beitrag von Matthias Lerchmüller wurde diesmal die Situation im Raum betrachtet. Der Unterschied zur Staudt'schen Beschreibung ist, dass nicht Involutionen, also Projektivitäten $f$ mit $f^2=Id$, sondern Projektivitäten mit $f^3=Id$ $(f\neq Id)$, sogenannte Kleinabbildungen verwendet werden. Diese Darstellung schließt die Orientierung mit ein, sie muss also nicht zusätzlich angegeben werden. Dem komplex konjugierten Element entspricht nämlich die Projektivität $f^{-1}=f^2\neq f$.

Für hochimaginären Geraden (Geraden 2.Art) als Verbindungsgeraden zweier imaginärer Punkte mit windschiefen Trägern $u,v$ wurde nun gezeigt, wie die zugehörige Kleinabbildung definiert werden kann und wie sich ihre Wirkung auf beliebige Elemente des Raumes darstellen lässt. Die Geraden $u,v$ sind dabei Leitgeraden einer Regelschar $(l,l',l'')$. Die Kleinabbildung erfüllt $f(l)=l'$, $f(l')=l''$ und $f(l'')=l$ (also $f^3=Id$) und lässt die Leitschar, in der $u$ und $v$ liegen, invariant. Details hierzu stehen in dem sehr ausführlichen Handout.
Abschließend ist Lou de Boer darauf eingegangen, in wie weit die Klein'sche und die Staudt'sche Darstellung als gleichwertig angesehen werden können. Sei beispielsweise $l$ eine Punktreihe und $P\notin l$ ein Punkt. Die Drehung um 90° mit Zentrum $P$ induziert auf $l$ eine

[2] Artikel: http://www.math.chalmers.se/~wastlund/Cosmic.pdf
Video: https://www.youtube.com/watch?v=d-o3eB9sfls

Involution, die Drehung um $60°$ hingegen eine Kleinabbildung. Unabhängig vom Drehwinkel haben alle solche Rotationen um $P$, aufgefasst als 1-dimensionale Projektivitäten auf $l$, die selben komplexen Eigenvektoren, repräsentieren also das gleiche Paar komplex konjugierter Punkte. Damit gehören sowohl die Kleinsche als auch die Staudt'sche Abbildung zu einer 1-parametrigen Gruppe elliptischer Projektivitäten.




Diese Sichtweise bringt zum Ausdruck, wie sich das Imaginäre im Reellen als Bewegung auffassen lässt.

**Rück- und Vorblick:** das Treffen hat einen sehr lebendigen Einblick in die vielfältige Forschungstätigkeit der Arbeitsgruppe gegeben. Es wäre wünschenswert, wenn etwas davon an die Öffentlichkeit oder zumindest an Interessierte gelangen würde. Es wurde überlegt, ob bestehende Manuskripte in einem kleineren Rahmen zur Verfügung gestellt werden können.

Charles Gunn hat zu seinem Beitrag im Januar 2018 (Pharmazeutische Prozesse in Raum und Gegenraum) einen Artikel geschrieben, der hier herunter geladen werden kann:

https://drive.google.com/file/d/1B3aGpsCVIWWhjtkv3ayBTjEKon7DoIIM/view?usp=sharing

Vorschläge für Beiträge für das Januar-Treffen – Lou de Boer erstellt daraus ein Programm:

- Dieter Braun: über eine Arbeit von Gerhard Haenzel
- Nadine Braxmeier-Even: Fortsetzung zur Arbeit von Baker
- Immo Diener: Fortsetzung zur Polar-Euklidischen Geometrie
- Frank Schäfer: der ausgefallene Beitrag dieses Treffens
- Adrian Raap: Überblick über die aktuelle Diskussion, ob die Mathematik in der theoretischen Physik an ihre Grenzen stößt (siehe Spektrum der Wissenschaft 11/18)
- Astrid Baumann: Bericht aus der aktuellen Entwicklung der Schulmathematik
- Jan Steenbruggen: die symbolische Bedeutung der Zahlen (im Sinne von Weinreb)
- Loe de Boer: Fortsetzung zur Imaginärentheorie

Die Textarbeit soll fortgesetzt werden. Auch der musikalischer Beitrag von Lou de Boer (Klavier) und Wim Viersen (Geige) wurde wieder sehr geschätzt. Christina Pederiva (Bratsche) könnte nächstes mal mit dazu beitragen.

**Termine der kommenden Treffen:**

- **25. - 27.1 2019 Dornach / CH**
- **30.5 - 2.6 2019 Driebergen / NL**
- **18. - 20.10 2019 Dornach / CH**

Protokoll vom 24.10.2018, Thomas Neukirchner