

Polareuklidische Geometrie

Zeichen für die imaginären Elemente in der ebenen Polareuklidischen Geometrie

Immo Diener

Vorläufige
Ausarbeitung zum Vortrag im
Kolloquium
Mathematik und Geisteswissenschaft

26. Januar 2019

1 Das Imaginäre in der Polareuklidischen Geometrie

In den nachfolgenden Ausführungen halten wir uns eng an die Darstellung in Louis Locher-Ernsts in [3]. Siehe dazu auch [1]. Locher-Ernst schreibt in seiner Einleitung:

Imaginäre Gebilde lassen sich auf wesentlich verschiedene Arten durch reelle Bilder veranschaulichen. Die übliche Abbildung der komplexen Zahlen $z = x + iy$ im rechtwinkligen (x, y) -Koordinatensystem oder auf der Riemannschen Zahlenkugel eignet sich insbesondere zur anschaulichen Darstellung dafür, welche Bereiche eine analytische Funktion $w = f(z)$ irgend einem Bereich der unabhängigen Variablen z zuordnet. Wie nützlich auch diese Darstellung für viel Untersuchungen ist, so lässt sie den Geometer in einer Hinsicht doch unbefriedigt. Die ∞^2 komplexen Punkte einer Geraden, z.B. die Punkte $x = a + ia'$ (a, a' reell) der x -Achse, werden durch die reellen Punkte einer Ebene versinnbildlicht, wodurch die nichtreellen Punkte der Geraden von dieser als ihrem Träger losgelöst erscheinen. Will man Geometrie in der Ebene mit Einschluss des Komplexen pflegen, so müsste man beim Festhalten der in der Funktionentheorie üblichen Darstellung jeder Geraden der Ebene eine besondere Ebene zuordnen, um die reellen Bilder der komplexen Punkte der betreffenden Geraden unterzubringen.

Bekanntlich hat *von Staudt* diejenige reelle Darstellung der komplexen Elemente des Raumes (Punkt, Gerade, Ebene) gefunden, welche unmittelbar dem Wesen der Sache entspricht. Der Grund dafür, dass eine selbstverständliche Handhabung dieser Darstellung noch verhältnismäßig wenig verbreitet ist, liegt wohl darin, dass man die von Staudtsche Theorie gewöhnlich sogleich rein projektiv entwickelt. Natürlich bildet die projektive Theorie der Involutionen den Kern der Sache. Zur Einführung fragt es sich jedoch, ob man dem Anschauungsvermögen nicht entgegenkommen kann durch eine handgreifliche Verbildlichung der Involutionen. Die folgenden Ausführungen sollen zeigen, dass dies wohl möglich ist. Um nur wenige Kenntnisse vorauszusetzen wollen wir hierbei von vornherein auch metrische Begriffe verwenden.

Wir wollen im Folgenden die Entwicklungen Locher-Ernsts nachvollziehen, soweit sie die komplexen Elemente einer reellen Ebene betreffen. Locher-Ernst verwendet einseitig das Punktfeld, wenn er die Pfeildarstellung für imaginäre Punkte entwickelt und dabei Elemente der euklidischen Geometrie verwendet. Wir wollen die Angelegenheit hier gleich auch dual für die Geraden durch-

führen und dabei sehen, wie die ebene Polareuklidische Geometrie dafür den angemessenen Rahmen bietet. Die direkt von Locher-Ernst zitierten Textpassagen drucken wir in einer anderen Schriftart.

2 Imaginäre Punkte und Geraden und ihre Zeichen

Zunächst führen wir den Grundbegriff ein, mit dem wir ständig arbeiten.

Die Punkte einer Geraden g seien zu Paaren A, A_1 und B, B_1 und C, C_1 usw. derart zusammengefasst, dass für einen gewissen festen Punkt M von g und ein beliebiges Paar P, P_1 die Beziehung

$$d(M, P) \cdot d(M, P_1) = k = \text{konst.}$$

besteht. Eine solche Paarung heißt *Involution*. M ist der Mittelpunkt, k die Potenz der Involution. Der dem Mittelpunkt zugeordnete Punkt ist der Fernpunkt von g .

Hierbei werden die Längen der Strecken $[MP], [MP_1]$ mit demselben Vorzeichen in Rechnung gesetzt, sofern die Richtung von M nach P mit der Richtung von M nach P_1 übereinstimmt.

(Schnitt und Schein einer Strahlen- bzw. Punktinvolution sind wiederum Punkt- bzw. Strahleninvolutionsen. Die Möglichkeit der obigen dualen Gegenüberstellung ergibt sich aus dem im bereits früher dargelegten Zusammenhang zwischen den d - und dem d^* -Maß.)

Je nachdem die Konstante k , die Potenz der Involution, positiv oder negativ ist, haben

die Strecken $[MP], [MP_1]$ irgend eines Paares dieselben oder entgegengesetzte Richtungen.

Wählen wir auf der Geraden g den Nullpunkt und Einheitspunkt, bzw. im Punkt G den Nullstrahl und Einheitsstrahl eines Koordinatensystems (wobei der Fernpunkt von g bzw. der Nahstrahl von G das Element ∞ bezeichnet) und sind

Die Strahlen eines Punktes G seien zu Paaren a, a_1 und b, b_1 und c, c_1 usw. derart zusammengefasst, dass für eine gewisse feste Gerade m von G und ein beliebiges Paar p, p_1 die Beziehung

$$d^*(m, p) \cdot d^*(m, p_1) = k = \text{konst.}$$

besteht. Eine solche Paarung heißt *Involution*. m ist der Mittelstrahl, k die Potenz der Involution. Der dem Mittelstrahl zugeordnete Strahl ist der Nahstrahl von G .

Hierbei werden die Weiten der Fächer $[mp], [mp_1]$ mit demselben Vorzeichen in Rechnung gesetzt, sofern der Drehsinn von m nach p mit dem Drehsinn von m nach p_1 übereinstimmt.

bzw. Punktinvolution sind wiederum

die Fächer $[mp], [mp_1]$ irgend eines Paares dieselben oder entgegengesetzte Drehsinne.

a, x, x_1 die Koordinaten von M, P und P_1 , bzw. von m, p und p_1 so wird die Involution also durch die Beziehung $(x - a)(x_1 - a) = k$ (a, k reell) festgelegt.

Bei positivem k heißt die Involution *hyperbolisch*, für negatives k *elliptisch*. Für $k = 0$ ergibt sich die „ausgeartete Involution“ in der jedes Paar zugeordneter Punkte bzw. Strahlen den Mittelpunkt bzw. Mittelstrahl enthält.

Wir erinnern noch an einige sich aus der Erklärung leicht ergebende Eigenschaften der Involutionen:

Jede Involution geht durch Projizieren in eine gleichartige Involution über.

Eine Involution ist bestimmt durch zwei Paare A, A_1 und B, B_1 zugeordneter Punkte.

In einer elliptischen Involution trennen sich zwei Paare zugeordneter Punkte.

Ist A, A_1 ein Paar zugeordneter Punkte einer elliptischen Involution, so gibt es genau ein Paar B, B_1 dieser Involution, das A, A_1 *harmonisch* trennt.

Jede Involution geht durch Schneiden in eine gleichartige Involution über.

Eine Involution ist bestimmt durch zwei Paare a, a_1 und b, b_1 zugeordneter Strahlen.

In einer elliptischen Involution trennen sich zwei Paare zugeordneter Strahlen.

Ist a, a_1 ein Paar zugeordneter Strahlen einer elliptischen Involution, so gibt es genau ein Paar b, b_1 dieser Involution, das a, a_1 *harmonisch* trennt.

Die Konstruktion von B, B_1 zu gegebenem A , bzw. von b, b_1 zu gegebenem a geben wir an späterer Stelle.

Eine nicht ausgeartete Involution enthält genau zwei Doppelemente, d.h. zwei Punkte, bzw. Geraden, die sich selbst zugeordnet sind. In der Tat liefert die Gleichung $(x - a)(x - a) = k$ die beiden Lösungen $x = a \pm \sqrt{k}$. Die Doppelpunkte bzw. Geraden sind reell für eine hyperbolische, komplex für eine elliptische Involution. Jedes Paar P, P_1 zugeordneter Punkte bzw. p, p_1 zugeordneter Strahlen trennt in beiden Fällen die Doppelemente harmonisch.

Durchläuft P die Punktreihe, bzw. p das Strahlenbüschel in einem bestimmten Sinne, so durchläuft der in einer elliptischen Involution zugeordnete Punkt P_1 die Punktreihe bzw. Strahl p_1 das Strahlenbüschel im gleichen Sinne, bei einer hyperbolischen Involution hingegen im entgegengesetzten Sinne. Wir können die Doppelemente einer hyperbolischen Involution als *die Trefferpunkte bzw. Trefferstrahlen dieser entgegengesetzten Bewegungen* auffassen. Bei einer elliptischen Involution treffen sich die zugeordneten Elemente P, P_1 bzw. p, p_1 im Reellen nicht. Die elliptische Involution bestimmt aber eindeutig zwei imaginäre Punkte bzw. Strahlen als Doppelemente.

Durchläuft P die Punktreihe in einem bestimmten Sinne, so wird durch die

Durchläuft p das Strahlenbüschel in einem bestimmten Sinne, so wird

elliptische Involution dieser Bewegung von P eine gleichsinnige Bewegung des entsprechenden Punktes P_1 zugeordnet.

durch die elliptische Involution dieser Bewegung von p eine gleichsinnige Bewegung des entsprechenden Strahles p_1 zugeordnet.

Diese koordinierten Bewegungen betrachten wir als reelles Bild des einen imaginären Doppelpunktes bzw. Doppelstrahles; der andere imaginäre Doppelpunkt bzw. Doppelstrahl wird gegeben durch die koordinierten Bewegungen in entgegengesetzter Richtung. Kurz:

Eine *gerichtete* elliptische Involution in einer Punktreihe stellt einen imaginären Punkt dar, und umgekehrt kann jeder imaginäre Punkt der betrachteten Geraden durch eine gerichtete elliptische Involution gegeben werden.

Eine *gerichtete* elliptische Involution in einem Strahlenbüschel stellt eine imaginäre Gerade dar, und umgekehrt kann jede imaginäre Gerade des betrachteten Punktes durch eine gerichtete elliptische Involution gegeben werden.

Da es *im Raum* imaginäre Geraden gibt, die sich nicht auf diese Weise geben lassen, heißen die eben eingeführten imaginären Geraden auch *spezielle* imaginäre Geraden. Da wir hier aber nur von der ebenen Geometrie handeln, sprechen wir meist einfach von imaginären Geraden.

Für eine lebendige Anschauung sind diese koordinierten Bewegungen das Wesentliche. Die Bewegungen lassen sich aber in *einem* Bilde nicht festhalten. Wir wollen deshalb ein *Zeichen* einführen, das diese Bewegungen (d.h. die gerichtete elliptische Involution) eindeutig festlegt.

Wir geben den Mittelpunkt M der Involution und einen der beiden Hauptpunkte N, N_1 . Das sind die beiden einander zugeordneten Punkte, die von M denselben e -Abstand haben. Ist h dieser Abstand, und hat M die Koordinate a , so lautet die Gleichung der elliptischen Involution

$$(x - a)(x_1 - a) = -h^2.$$

Der von M nach N oder N_1 weisende *Pfeil* (gerichtete Strecke) sei das geometrische Zeichen für die gerichtete elliptische Involution. Der Pfeil NM bestimmt den einen, der Pfeil MN_1 den anderen (konjugiert komplexen)

Wir geben den Mittelstrahl m der Involution und einen der beiden Hauptstrahlen n, n_1 . Das sind die beiden einander zugeordneten Strahlen, die von m denselben d -Abstand haben. Ist h dieser Abstand, und hat m die Koordinate a , so lautet die Gleichung der elliptischen Involution

$$(x - a)(x_1 - a) = -h^2.$$

Der von m nach n oder n_1 weisende *Twist* (gerichteter Fächer) sei das geometrische Zeichen für die gerichtete elliptische Involution. Der Pfeil mn bestimmt den einen, der Pfeil mn_1 den anderen (konjugiert komplexen)

Doppelpunkt der elliptischen Involution.

Doppelstrahl der elliptischen Involution.

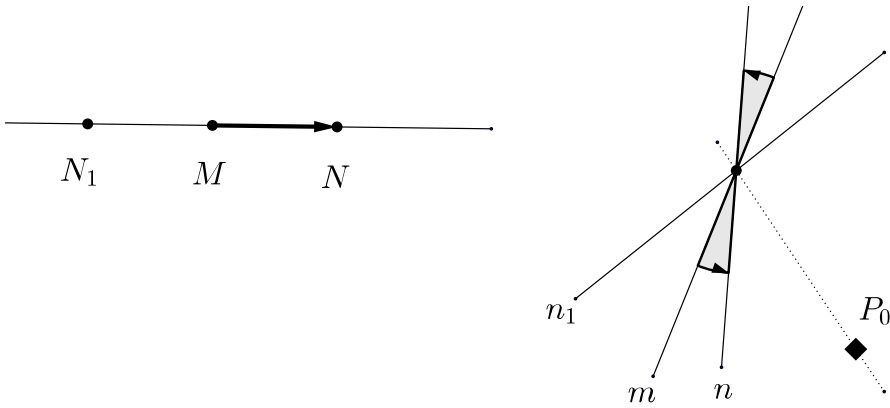


Abb. 1: Pfeil und Twist als Zeichen für eine elliptische Punkt- bzw. Strahleninvolution (Fig. 1 in[3])

Um eine Involution festzulegen bedarf es der Angabe zweier Elemente mit ihren Bildern. Die durch einen Pfeil MN gegebene Involution ist gegeben durch $MNG_\infty N_1$, wobei G_∞ der Fernpunkt der Trägergeraden ist, und die durch den Twist mn gegebene Involution ist gegeben durch $mn g_0 n_1$, mit dem Nahstrahl g_0 des Trägerpunktes. Dies ist eine harmonische Darstellung der Involution von M bzw. m aus. Man könnte auch sagen, *Pfeil und Twist „sind“ gerichtete harmonische Darstellungen der zugrundeliegenden gerichteten Involutionen vom Fernpunkt G_∞ bzw. dem Nahstrahl g_0 aus.*

Durchläuft der Punkt P die Strecke $[MN]$, so bewegt sich der entsprechende Punkt P_1 im gleichen Sinne vom Fernpunkt nach N_1 ; bewegt sich P von N aus weiter, so läuft P_1 von N_1 gegen M hin.

Durchläuft der Strahl p den Fächer $[mn]$, so bewegt sich der entsprechende Strahl p_1 im gleichen Sinne vom Nahstrahl nach n_1 ; bewegt sich p von n aus weiter, so läuft p_1 von n_1 gegen m hin.

Jedem imaginären Punkt auf der betrachteten Geraden bzw. jeder imaginären Geraden durch den betrachteten Punkt ist auf diese Weise ein Pfeil bzw. ein Twist zugeordnet. Wird der Imaginärteil der Koordinate $a + ih$ Null, so strebt auch die Länge des Pfeiles, bzw. die Weite des Twists gegen Null. Wir sagen deshalb auch, dass den reellen Punkten Pfeile der Länge Null, bzw. den reellen Geraden Twists der Weite Null entsprechen.

Die imaginären Punkte auf der Ferngeraden der Ebene und die imaginären Geraden durch den Nahpunkt lassen sich allerdings nicht so darstellen. Wir werden darauf noch zurück kommen.

Für den geometrischen Umgang mit imaginären Elementen ist es von Vorteil, wenn man sich eine möglichst lebendige Vorstellung von den zugehörigen gerichteten elliptischen Punkt- und Strahleninvolutionsen als koordinierten Bewegungen macht. Man kann sich etwa vorstellen:

Der Mittelpunkt M einer elliptischen Punktinvolution ist die Stelle, an der die zusammengehörigen Punkte N und N_1 am engsten bei einander sind, den geringsten e -Abstand haben. M ist der Mittelpunkt zwischen N und N_1 .

Wenn $d(M, N)$ klein, der zugehörige Pfeil also kurz ist, ist die Bewegung sehr ungleichmäßig: Wenn X, X' koordinierte Punkte sind, bewegt sich etwa X in der Nähe von M langsam nach rechts auf N zu, während X' sich von links schnell heran kommend und dabei langsamer werdend, auf X zu bewegt. Wenn X' soweit links von M liegt, wie X rechts von M , wenn also $X' = N_1$ und $X = N$ ist, bewegen sich beide Punkte gleichartig und am langsamsten. Dann nimmt die Geschwindigkeit der Bewegung von X nach rechts schnell zu und indem X' die kleine Strecke von N_1 bis M durchläuft, schnellt X nach rechts heraus zum Fernpunkt der Trägergeraden. Dann kommt X von links wieder, während X' sich von M nach N bewegt und der Vorgang sich mit vertauschten Rollen von X' und X wiederholt.

Wenn $d(M, N)$ groß ist, der zugehörige Pfeil also lang, dann verläuft die Bewegung im Prinzip genau so, aber im Verhältnis zu eben „gleichmäßiger“. Punkt und Bildpunkt kommen sich nicht so nahe, die Bewegung verläuft „ruhiger“.

Strebt die Pfeillänge gegen Null, so entartet die Involution zu einer parabolischen, bei der dem Mittelpunkt alle Punkte der Geraden zuzuordnen wären. Man müsste sich dann denken, dass die Bewegung des einen Punktes ganz er stirbt, während die des anderen unendlich schnell wird. Als den anderen Grenzfall, wenn die Pfeillänge gegen unendlich strebt, hätte man sich die Ferngerade zu denken, auf der zwei Punkte im Abstand $\pi/2$ gleichmäßig umlaufen.

Analog wären die Verhältnisse bei der Strahleninvolution: Ein Twist mit kleiner Weite, der also einen kleinen euklidischen Winkel umfasst, steht für eine ungleichmäßige, mehr „ruckhafte“ koordinierte Bewegung. Ein Twist mit einem e -Öffnungswinkel von $\pi/2$, dessen Anfangsstrahl senkrecht zum Nahstrahl seines Trägers ist, steht für die Rechtwinkelinvolution, bei der zugeordnete Strahlen e -rechtwinklig zueinander sind und sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen.

Wir wollen jetzt noch angeben, wie die harmonische Darstellung einer durch einen Pfeil oder Twist gegebenen gerichteten elliptischen Involution konstruiert werden kann.

Ist eine gerichtete elliptische Involution durch den Pfeil MN auf der Geraden g gegeben und soll die harmonische Dar-	Ist eine gerichtete elliptische Involution durch den Twist mn in dem Punkt G gegeben und soll die harmonische
---	---

stellung ABA_1B_1 dieser Involution von dem gegebenen Punkte A aus konstruiert werden, so kann man wie folgt vorgehen (Abb. 2):

Darstellung aba_1b_1 dieser Involution von dem gegebenen Strahl a aus konstruiert werden, so kann man wie folgt vorgehen (Abb. 2):

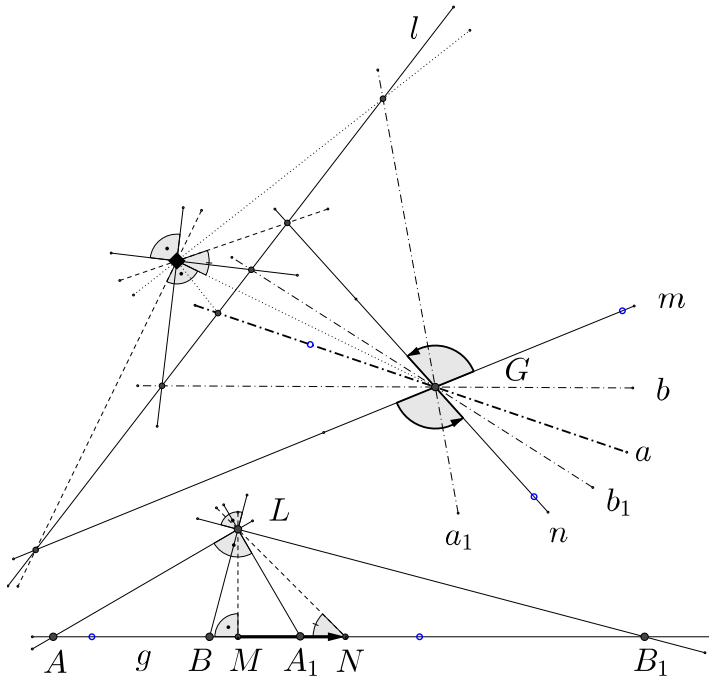


Abb. 2: Konstruktion einer harmonischen Darstellung zu einer durch einen Pfeil oder einen Twist gegebenen elliptischen Punkt- bzw. Strahleninvolution (Fig. 2 in[3])

Durch M zeichne man die Lotgerade zu g und in N zeichne man eine Gerade, die mit g einen Winkel von $45^\circ = \pi/4$ bildet. Sei L der Schnittpunkt dieser beiden Geraden. Dann ist LMN ein rechter Winkel. A_1 ist der Schnittpunkt der zu AL senkrechten Geraden durch L mit g . Die Schnittpunkte der winkelhalbierenden Geraden des rechten Winkels

In m zeichne man den Lotpunkt zu G und in n zeichne man einen Punkt, der mit G einen Winkel von $45^\circ = \pi/4$ bildet. Sei l die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte. Dann ist lmn ein rechter Winkel. a_1 ist die Verbindungsgerade des zu al senkrechten Punktes in l mit G . Die Verbindungsgeraden der winkelhalbierenden Punkte des rechten

ALA_1 mit g liefern B, B_1 . Hierbei ist darauf zu achten, dass die Punktfolge ABA_1B_1 die Richtung des Pfeiles besitzt.

Winkels ala_1 mit G liefern b, b_1 . Hierbei ist darauf zu achten, dass die Strahlenfolge aba_1b_1 die Richtung des Twists besitzt.

Links (unten in Abb. 2) ist dann L Punkt des e -Kreises mit Mittelpunkt M , auf dem auch N liegt, und rechts (in der Abb. 2 oben) ist l Strahl eines d -Kreises mit Mittelstrahl m , zu dem auch n gehört. Die Konstruktion mit dem Winkel dient nur der leichteren Zeichenbarkeit.

3 Die Geraden und Punkte einer Ebene

Liegt eine gerichtete elliptische (Punkt-)Involution (etwa gegeben durch einen Pfeil) auf der Geraden l vor, und projiziert man deren Punkte von einem beliebigen außerhalb l liegenden Punkte S aus, so wird im Strahlenbüschel (S) eine gerichtete elliptische Strahleninvolution festgelegt.

Liegt eine gerichtete elliptische (Strahlen-)Involution (etwa gegeben durch einen Twist) in dem Punkt L vor, und schneidet man deren Strahlen mit einer beliebigen außerhalb L liegenden Geraden s , so wird in der Punktreihe (s) eine gerichtete elliptische Punktinvolution festgelegt.

Eine besondere elliptische Strahleninvolution in (S) ist die *Rechtwinkelinvolution*, in der jeder Geraden durch S die zu ihr normale Gerade durch S zugeordnet ist. Dual dazu meinen wir mit der *Rechtwinkelinvolution in einer Punktreihe* (s) jene, bei der jedem Punkt in s der zu ihm senkrechte Punkt in s zugeordnet ist. Wir erinnern daran, dass zwei rechtwinklig zueinander stehende Geraden oder Punkte und deren (ebenfalls rechtwinklige) Winkelhalbierende (Geraden oder Punkte) einander *harmonisch* trennen.

Jede elliptische Involution auf einer e -Geraden ist Schnitt der Rechtwinkelinvolution in einem gewissen Punkt S , der leicht zu konstruieren ist:

Abb. 3 zeigt, wie einer der Pfeile, MN , zu einer durch zwei Paare zugeordneter Punkte gegebenen elliptischen Involution konstruiert werden kann. S ist Schnittpunkt zweier Thaleskreise mit Durchmessern AA_1 und BB_1 , d.h. die Involution wird aus S durch die Rechtwinkelinvolution projiziert. Wenn einer der Punkte der Fernpunkt des Trägers ist, wird der zugehörige Thaleskreis zur Lotgeraden auf den Träger in dem Punkt, der dem Fernpunkt durch die Involution zugeordnet ist. Der Pfeil MN_1 entspricht dem konjugiert komplexen Doppelpunkt der Involution.

Abb. 4 zeigt, wie einer der Twists, mn , zu einer durch zwei Paare zugeordneter Strahlen gegebenen elliptischen Involution konstruiert werden kann. Der Twist mn_1 entspricht dem konjugiert komplexen Doppelstrahl der Involution.

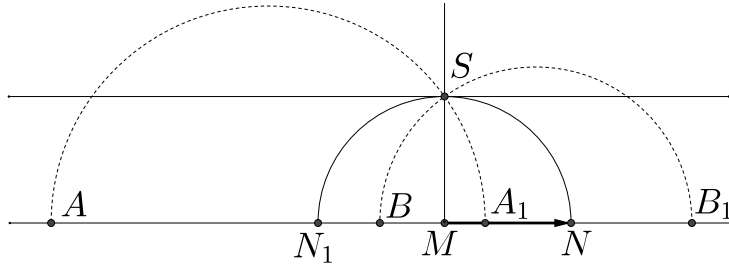


Abb. 3: Konstruktion des Pfeiles zu einer durch zwei Paare zugeordneter Punkte gegebenen elliptischen Involution

Die Konstruktion ist aufwendiger als die vorige für den Pfeil, weil wir bei dualer Umformung der letzten Konstruktion d-Kreise benötigten, die sich nicht leicht zeichnen lassen. Wir projizieren daher die gegebene Involution zunächst in eine Gerade s und bestimmen dann nach der Konstruktion in 2 eine vom Schnittpunkt von s mit dem Nahstrahl von S ausgehende harmonische Darstellung der Involution in s , die wir dann in das Büschel S zurückübertragen. So erhalten wir im Büschel eine vom Nahstrahl von S ausgehende harmonische Darstellung der gegebenen Involution, aus der sich der Twist leicht konstruieren lässt.

Es seien perspektive elliptische Involutionen in einem Punkt S und einer Geraden s gegeben, die also via Schnitt bzw. Schein zusammenhängen. Wenn dann der Nahstrahl von S und der Fernpunkt von s inzidieren, sind der Twist der Involution in S und der Pfeil der Involution in s perspektiv und lassen sich leicht auseinander konstruieren.

Nun soll angegeben werden, wann imaginäre Punkte und Geraden mit reellen oder imaginären Geraden und Punkten inzidieren:

Der imaginäre Punkt $P(ABA_1B_1)$ liegt in der reellen Geraden g , wenn die Elemente der Involution ABA_1B_1 , das heißt der Pfeil von P in g liegt. (Wir sagen im Folgenden auch abgekürzt „der Pfeil P “.) Durch einen imaginären Punkt geht somit in der Ebene genau eine reelle Gerade, nämlich der Träger g der den Punkt darstellenden gerichteten elliptischen Punktinvolution. Der imaginäre Punkt $P(ABA_1B_1)$ liegt in der imaginären Geraden $g(aba_1b_1)$, wenn die darstel-

Die imaginäre Gerade $p(aba_1b_1)$ geht durch den reellen Punkt G , wenn die Elemente der Involution aba_1b_1 , das heißt der Twist von p in G liegt. (Wir sagen im Folgenden auch abgekürzt „der Twist P “.) In einer imaginären Gerade geht somit in der Ebene genau ein reeller Punkt, nämlich der Träger S der die Gerade darstellenden gerichtete elliptischen Strahleninvolution. Die imaginäre Gerade $g(aba_1b_1)$ geht durch den imaginären Punkt $P(ABA_1B_1)$, wenn die darstell-

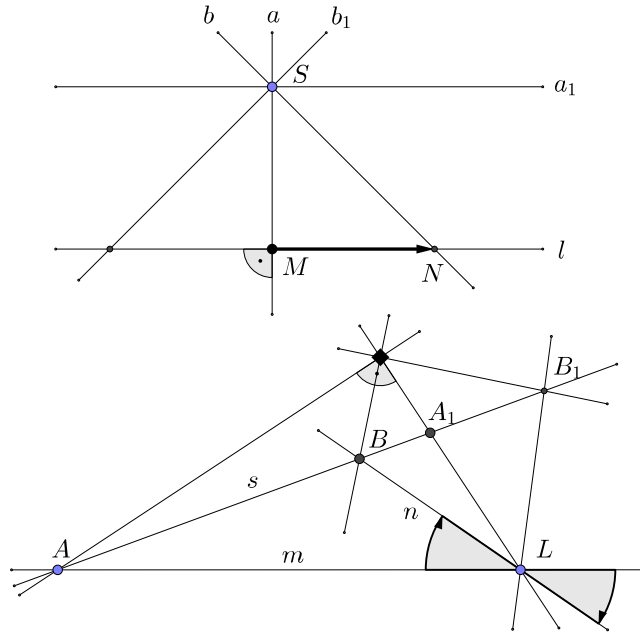


Abb. 5: Pfeil des imaginären Schnittpunktes einer isotropen Gerade mit einer reellen (Fig. 4 in[3]) und, dual, Twist der imaginären Verbindungsgerade eines isotropen mit einem reellen Punkt.

Ist a, a_1 ein Rechtwinkelpaar (Abb. 5) und b, b_1 das zu a, a_1 harmonisch liegende Rechtwinkelpaar, so schneidet die zu a senkrechte Gerade l die gerichtete Rechtwinkelinvolution in einer gerichteten elliptischen Punktinvolution, deren Pfeildarstellung MN sofort anzugeben ist: M ist der Schnitt von l mit a , N der Schnitt von l mit b .

Ist A, A_1 ein Rechtwinkelpaar (Abb. 5) und B, B_1 das zu A, A_1 harmonisch liegende Rechtwinkelpaar, so projiziert der zu A senkrechte Punkt L die gerichtete Rechtwinkelinvolution in einer gerichteten elliptischen Strahleninvolution, deren Twistdarstellung mn sofort anzugeben ist: m ist der Schein von L mit A , n der Schein von L mit B .

Hiernach lassen sich die sämtlichen Punkte einer isotropen Geraden, also die Punkte einer Punktreihe mit imaginärem Träger, überschauen. Abb. 6 deutet die entsprechenden Pfeile an. Kurz: *Eine isotrope Gerade liefert einen rotatorischen ebenen Wirbel*. Der einzige reelle Punkt der isotropen Geraden ist der Wirbelmittelpunkt.

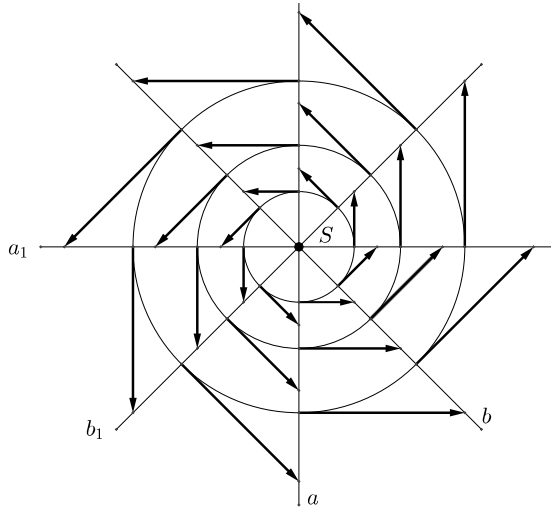


Abb. 6: Pfeile der imaginären Punkte einer isotropen imaginären Gerade (Fig. 5 in [3])

Jede Strahleninvolution kann offenbar durch eine Affinität¹, sogar durch eine orthogonale Affinität in eine Rechtwinkelinvolution überführt werden. Hieraus kann man das entsprechende Bild (Bild 6 in [3]) für die imaginären Punkte irgendeiner beliebigen imaginären Geraden der Ebene konstruieren. Es ergibt sich: *Eine (spezielle) imaginäre Gerade liefert als Bild ihrerer imaginären Punkte einen ebenen Wirbel.*

In Abb. 7 wurde versucht, auch die sämtlichen Geraden eines isotropen Punktes, also eines Strahlenbüschels mit imaginärem Träger, in einer Zeichnung zu verdeutlichen. Die Abbildung deutet die entsprechenden Twist an und ist genau dual zu Abb. 6 aufgebaut.

Die Kurven sind Ordnungskurven zu koaxialen d-Kreisen mit Mittelstrahl s . Anhand der dünn angedeuteten Hilfslinien lässt sich nachvollziehen, wie das Bild konstruiert wurde. Die einzige reelle Gerade des isotropen Punktes ist der Träger s .

Abb. 6 zeigt $3 \cdot 8 = 24$ Pfeile, deren Anfangspunkte in den Schnittpunkten der $2 \cdot 2$ Strahlen der Rechtwinkelinvolution in S mit drei konzentrischen e-Kreisen mit Mittel-

Abb. 7 zeigt $3 \cdot 8 - 2 \cdot 2 = 20$ Twists, deren Anfangsstrahlen in den Verbindungsgeraden der $2 \cdot 2$ Punkte der Rechtwinkelinvolution in s mit drei koaxialen d-Kreisen mit Mittelstrahl

¹Eine Kollineation, bei der die u.G. als ganze fest bleibt.

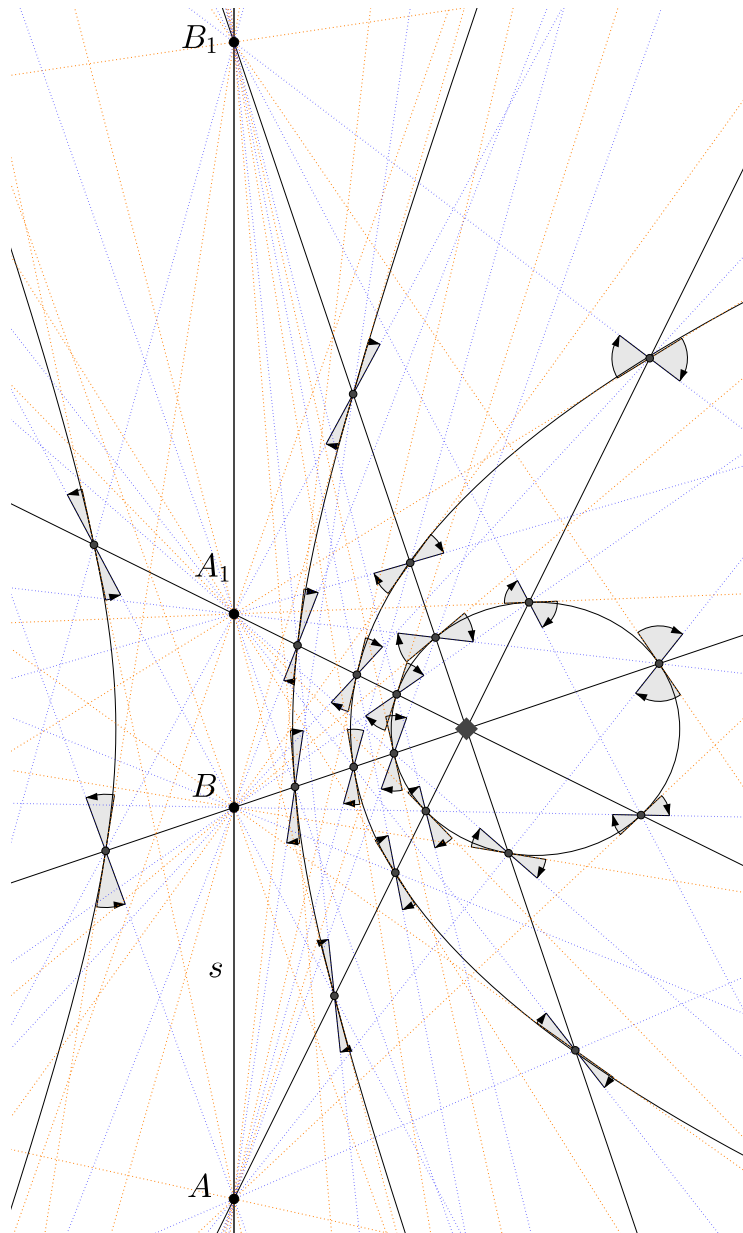


Abb. 7: Twists der imaginären Geraden eines isotropen imaginären Punktes (dual zu Abb. 6, bzw. zu Fig. 5 in[3])

punkt S gehören.

Die Endpunkte liegen in den jeweils nächsten Strahl der Rechtwinkelinvolution.

Um in Abb. 6 *alle* Pfeile zu erhalten, muss man sich die gezeigte Anordnung noch um S gedreht denken. In Abb. 7 erhält man *alle* Twist, indem man die gezeigten Twists einer „Schabung“² entlang s unterwirft.

Wir geben weiter das Bild für alle diejenigen Punkte einer imaginären Geraden, für welche die Anfangspunkte ihrer Pfeile einer Geraden l angehören.

Abb. 8 zeigt dies links für eine isotrope Gerade, rechts für einen isotropen Punkt. Die Endpunkte der Pfeile liegen in einer Geraden. (Dies schließt man etwa mit Hilfe des folgenden Satzes: Verändert sich ein Quadrat derart, dass eine Ecke S festliegt und eine Nachbarecke von S eine Gerade beschreibt, so beschreiben auch die übrigen zwei Ecken Geraden). Die Endstrahlen der Twist gehen durch einen Punkt.

Allgemein gilt (siehe [3]):

Gehören die Anfangspunkte von Pfeilen, die Punkte einer imaginären Geraden g darstellen, einer Geraden l an, so bilden die Endpunkte eine zur Reihe ähnliche Punktreihe.

s gehören. (Vier Twists können im Bildausschnitt nicht dargestellt werden.)

Die Endstrahlen gehen durch den jeweils nächsten Punkt der Rechtwinkelinvolution.

Wir geben weiter das Bild für alle diejenigen Geraden eines imaginären Punktes, für welche die Anfangsstrahlen ihrer Twists einem Punkt L angehören?

Gehören die Anfangsstrahlen von Twists, die Strahlen eines imaginären Punktes G darstellen, einem Punkt L an, so bilden die Endstrahlen ein zum Büschel fernähnliches Strahlenbüschel.

Dabei ist „fernähnlich“ dual zum Begriff „ähnlich“. Zwei Gebilde heißen *ähnlich* bzw. *fernähnlich* (wir sollten sie vielleicht besser e- und d-ähnlich heißen), wenn sie durch eine Kollineation ineinander überführt werden können, welche die absoluten Punkte I_1, I_2 , bzw. die absoluten Strahlen i_1, i_2 einzeln festhält oder untereinander vertauscht. Näheres dazu siehe [2], Seite 275ff. Dort findet man (Satz 95):

Zwei ähnliche Gebilde lassen sich ineinander überführen entweder durch

1. Eine Parallelverschiebung, oder
2. eine Dehnung, oder
3. Eine Drehung und eventuell nach-

Zwei fernähnliche Gebilde lassen sich ineinander überführen entweder durch

1. Eine Scherung, oder
2. eine Pressung, oder
3. Eine Schabung und eventuell nach-

²Locher-Ernsts Ausdruck für eine d-Drehung

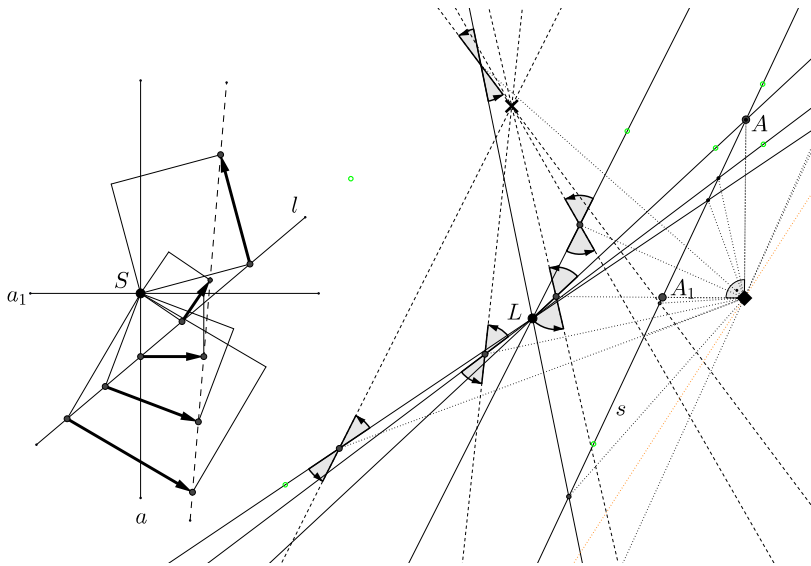


Abb. 8: Punkte einer imaginären Geraden, für welche die Anfangspunkte ihrer Pfeile einer Geraden l angehören (Fig. 7 in[3]) und das duale Bild für die Twists eines imaginären Punktes

folgende Dehnung, oder

4. eine Spiegelung und eventuell nachfolgende Dehnung.

folgende Pressung, oder

4. eine Fernspiegelung und eventuell nachfolgende Pressung.

Dieses Zitat soll hier nur eine Ahnung vermitteln, worum es sich handelt. Die genaue Bedeutung der Begriffe schlage man in [2] nach.

Sind zwei Punkte P, Q (d.h. ihre Pfeile) einer (speziellen) imaginären Geraden gegeben, so lassen sich auf Grund des hervorgehobenen Satzes leicht weitere Punkte dieser Geraden konstruieren (Abb. 9, links). Entsprechend kann man zu zwei Geraden (d.h. ihren Twists) eines imaginären Punktes weitere Strahlen dieses Punktes konstruieren (Abb. 9, rechts).

In der Abbildung wurden die zusätzlichen Pfeile, bzw. Twists, durch Bildung von Mitten erzeugt: Mittelpunkten rechts und Mittelstrahlen links. Die vorgegebenen Pfeile bzw. Twists sind hervorgehoben.

Zwei Pfeile oder Twists nennen wir *zusammenhängend*, wenn der Endpunkt des einen der beiden Pfeile zugleich der Anfangspunkt des anderen ist. Zwei zusammenhängende Pfeile haben zum Träger S (zum reellen

der Endstrahl des einen der beiden Twists zugleich der Anfangsstrahl des anderen ist. Zwei zusammenhängende Twists haben zum Träger s (zur reel-

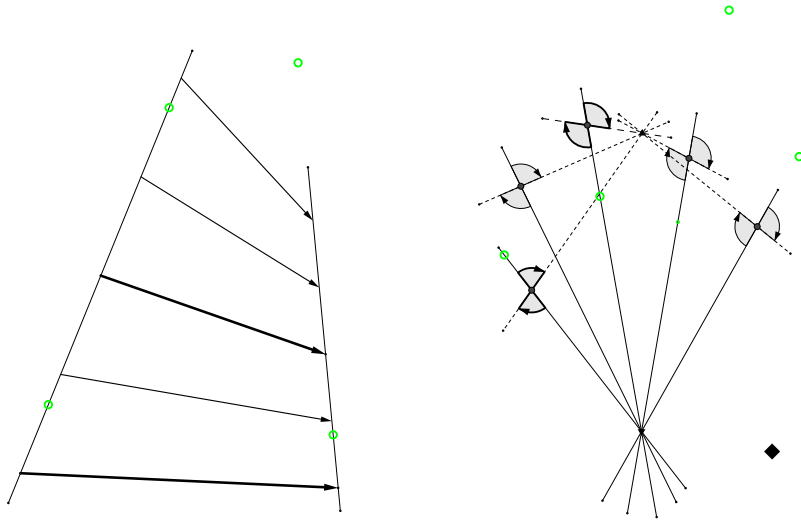


Abb. 9: Konstruktion weiterer Punkte einer imaginären Geraden bzw. Geraden eines imaginären Punktes, zu zwei gegebenen (links entspricht Fig. 8 in[3]).

Punkt) der Geraden | len Geraden) des Punktes
 eine besondere Lage. Abb. 10 zeigt zwei solche Pfeile, bzw. Twists 12, 23, die einer isotropen Gerade, bzw einem isotropen Punkt angehören (d.h. Punkte dieser Geraden bzw. Geraden dieses Punktes darstellen).

Hieraus folgt durch Affinität die in Abb. 11 links gegebene Konstruktion des Trägers S der Geraden, von der zwei zusammenhängende Pfeile 12, 23 gegeben sind: 1234 und 124 S sind Parallelogramme. Die duale Konstruktion ist rechts in der Abbildung zu sehen. Sie zeigt die Konstruktion des Trägers s des Punktes, von dem zwei zusammenhängende Twists 12, 23 gegeben sind: 1234 und 124 s sind Zentriagramme (d-Parallelogramme).

Bild 12 zeigt schließlich links noch diejenigen Pfeile einer (speziellen) imaginären Geraden, die in den reellen Geraden eines Büschels (T) liegen und rechts diejenigen Twists eines imaginären Punktes, die durch die reellen Punkte einer Reihe (t) gehen. (In den Abbildungen ist eine isotrope Gerade und ein isotroper Punkt angenommen.)

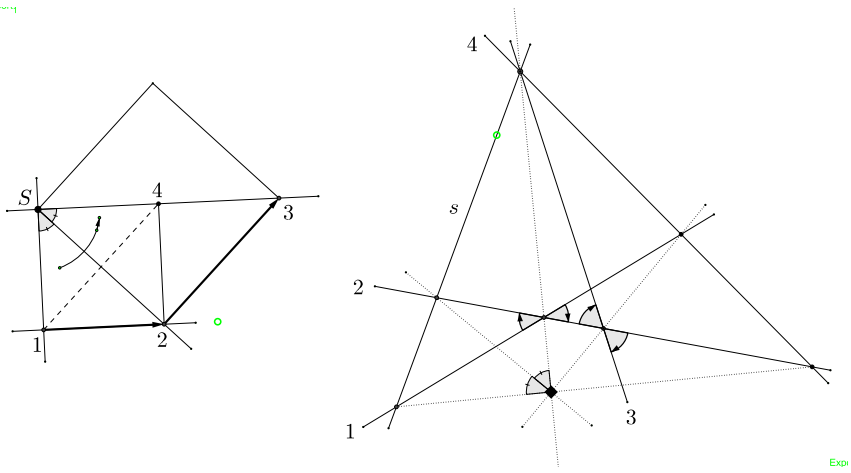


Abb. 10: Zwei zusammenhängende Pfeile (entsprechend Fig. 9 in[3]), bzw. Twists, die einer isotropen Gerade bzw. einem isotropen Punkt angehören. Die markierten Winkel haben eine Größe von $\pi/4 = 45^\circ$

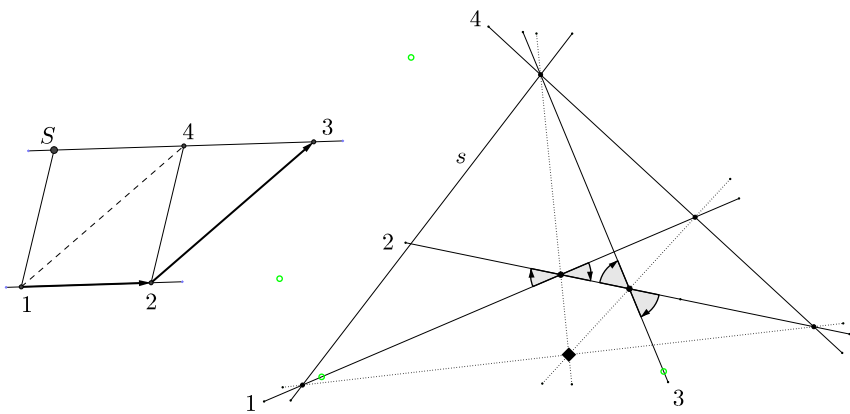


Abb. 11: Ermittlung der Träger S bzw. s zu zwei zusammenhängenden Pfeilen (entsprechend Fig. 10 in[3]), bzw. Twists.

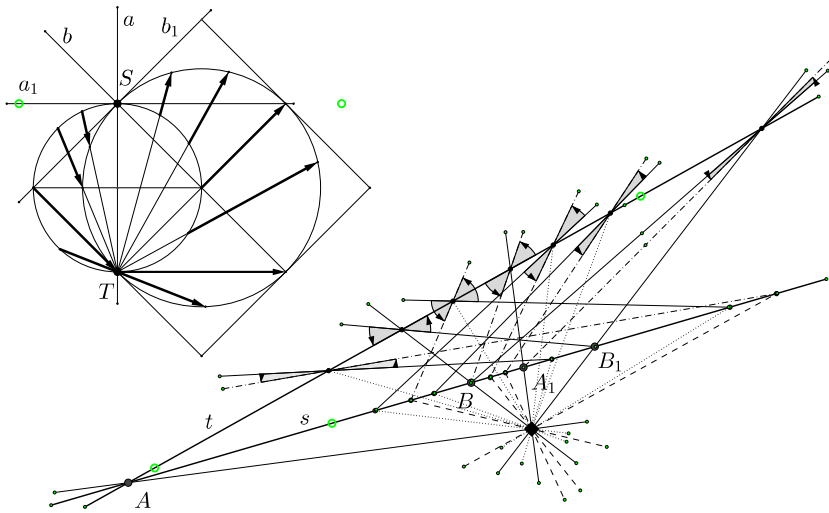


Abb. 12: Pfeile einer imaginären Geraden, die in den reellen Geraden eines Büschels liegen (entsprechend Fig. 11 in[3]), und Twists eines imaginären Punktes in den reellen Punkten einer Reihe.

Es ist noch ein Spezialfall zu erwähnen:

Eine gerichtete elliptische Strahleninvolution aba_1b_1 in einem Büschel paralleler Geraden gibt eine imaginäre Gerade mit einem Fernpunkt S als Träger. Die Anfangspunkte aller Pfeile dieser Geraden, also der Punkte dieser Geraden, liegen in der Geraden a des Büschels, der in der Involution die unendlichferne Gerade a_1 zugeordnet ist, die Endpunkte liegen in einer Geraden b , deren zugeordnete b_1 von a denselben e -Abstand hat wie b (Abb. 13).

Schneidet man eine gerichtete elliptische Strahleninvolution mit der Ferngeraden der Ebene, so ergibt sich als Schnitt eine gerichtete elliptische Punktinvolution, die einen imaginären Punkt dieser Geraden darstellt.

Eine gerichtete elliptische Punktinvolution ABA_1B_1 in einer Reihe zentrierter Punkte gibt einen imaginären Punkt mit einem Nahstrahl s als Träger. Die Anfangsstrahlen aller Twists dieses Punktes, also der Geraden dieses Punktes, gehen durch den Punkt A der Geraden, dem in der Involution der absolute Mittelpunkt A_1 zugeordnet ist, die Endstrahlen gehen durch einen Punkt B , dessen zugeordneter B_1 von A denselben d -Abstand hat wie B (Abb. 13).

Projiziert man eine gerichtete elliptische Punktinvolution aus dem Nahpunkt der Ebene, so ergibt sich als Schein eine gerichtete elliptische Punktinvolution, die eine imaginäre Gerade dieses Punktes darstellt.

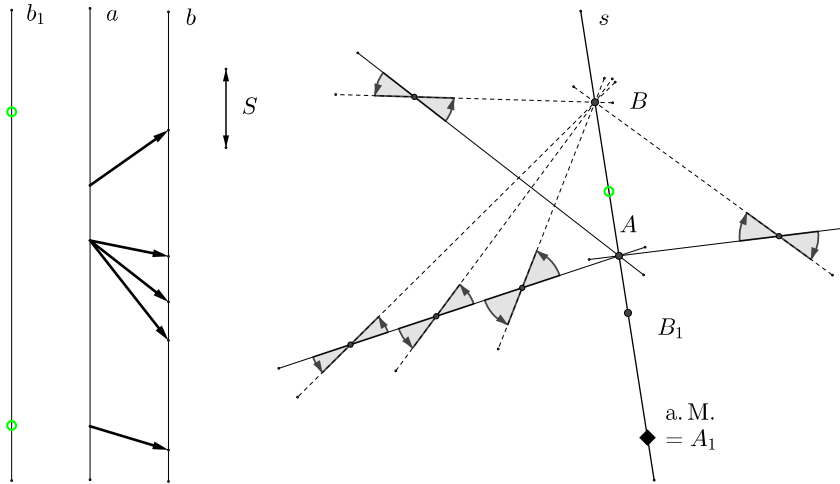


Abb. 13: Eine gerichtete elliptische Strahleninvolution in einem Bündel mit einem Fernpunkt als Träger (entsprechend Fig. 12 in[3]), und eine ebensolche Punktinvolution mit einem Nahstrahl als Träger.

Die imaginären Punkte der Ferngeraden und die imaginären Geraden des Nahpunktes lassen sich nicht als Pfeile oder Twists darstellen.

4 Zu klärende Fragen

Hier wollen wir einmal auflisten, welche Fragen zu klären wären, damit man mit den Pfeil- und Twist-Darstellungen imaginärer Punkte und Geraden geometrisch sinnvoll arbeiten kann. Einige davon haben wir schon geklärt, andere werden später noch bearbeitet.

Da manche Konstruktionen bei bestimmten Lagen des a.M. einfacher auszuführen sind, muss studiert werden, wie sich die Twists einer Veränderung der Lage des a.M. anpassen, d.h. wie aus einem Twist, der zu einer bestimmten Lage des a.M. gehört, derjenige konstruiert werden kann, der durch eine anderen Lage des a.M. bestimmt wird. Siehe dazu Abb. 24 und den zugehörigen Text.

1) Konstruktion des Pfeiles zu einem imaginären Punkt, d.h. zu einer durch zwei Paare zugeordneter Punkte ge-

1') Konstruktion des Twists zu einer imaginären Geraden, d.h. zu einer durch zwei Paare zugeordneter Strah-

gebenen gerichteten Involution.

Siehe Abb. 3 und den zugehörigen Text.

2) Konstruktion von zwei Paaren zugeordneter Punkte, welche den durch einen Pfeil symbolisierten imaginären Punkt darstellen.

Der Anfangspunkt des Pfeiles ist dem Fernpunkt der Trägergeraden zugeordnet und die Pfeilspitze dem am Anfangspunkt e -gespiegelten Endpunkt des Pfeiles.

3) Konstruktion der von einem gegebenen Punkt ausgehenden harmonischen Darstellung eines durch einen Pfeil gegebenen imaginären Punktes. *Siehe Abb. 2 und den zugehörigen Text.*

4) Konstruktion der Pfeile aller imaginären Punkte, die in einer reellen Geraden liegen.

Das sind alle Pfeile in der Geraden.

5) Konstruktion der Pfeile einer Punktreihe mit imaginärem Träger, d.h. aller imaginären Punkte, die in einer imaginären Geraden liegen. *Siehe Abb. 6 und den Text dazu, für eine isotrope Gerade.*

6) Pfeile der imaginären Schnittpunkte einer imaginären Geraden mit den Strahlen eines reellen Strahlenbüschels. *Siehe Abb. 12.*

7) Konstruktion des Twists der imaginären Verbindungsgerade eines isotropen mit einem reellen Punkt.

Siehe Abb. 5 samt dem Text dazu.

8) Konstruktion des Twists der imaginären Verbindungsgeraden eines durch seinen Pfeil dargestellten imaginären mit einem reellen Punkt.

len gegebenen gerichteten Involution.

Siehe die Abbildung 4 samt zugehörigem Text.

2') Konstruktion von zwei Paaren zugeordneter Strahlen, welche die durch einen Twist symbolisierte imaginäre Gerade darstellen.

Der Anfangsstrahl des Twists ist dem Nahstrahl des Trägerpunktes zugeordnet und der Endstrahl dem am Anfangsstrahl d -gespiegelten Endstrahl des Twists.

3') Konstruktion der von einem gegebenen Strahl ausgehenden harmonischen Darstellung einer durch einen Twist gegebenen imaginären Geraden. *Siehe Abb. 2 und den zugehörigen Text.*

4') Konstruktion der Twists aller imaginären Geraden, die durch einen reellen Punkt gehen.

Das sind alle Twists in dem Punkt.

5') Konstruktion der Twists eines Strahlenbüschels mit imaginärem Träger, d.h. aller imaginären Geraden, die durch einen imaginären Punkt gehen. *Siehe Abb. 7 und den Text dazu, für einen isotropen Punkt*

6') Twists der imaginären Verbindungsgeraden eines imaginären Punktes mit den Punkten einer reellen Punktreihe. *Siehe Abb. 12.*

7') Konstruktion des Pfeils des imaginären Schnittpunktes einer isotropen mit einer reellen Geraden.

Siehe Abb. 5 samt dem Text dazu.

8') Konstruktion des Pfeils des imaginären Schnittpunktes einer durch ihren Twist dargestellten imaginären mit einer reellen Geraden.

Siehe Abb. 14 weiter unten, samt Text dazu.

9) Konstruktion des Twists der imaginären Verbindungsgeraden zu zwei durch ihre Pfeile dargestellte imaginäre Punkte. Siehe Abb. 17 und Text dazu weiter unten.

10) Konstruktion der Pfeile der beiden imaginären Schnittpunkte einer reellen inneren Geraden eines einteiligen Kegelschnitt mit demselben.

Siehe die Abb. 19 und 20 weiter unten sowie die Texte dazu.

15 weiter unten und den Text dazu.

9') Konstruktion des Pfeiles des imaginären Schnittpunktes zu zwei durch ihre Twists dargestellte imaginäre Geraden. Siehe Bild 18 und Text dazu weiter unten.

10') Konstruktion der Twists der beiden imaginären Tangenten durch einen reellen inneren Punkte eines einteiligen Kegelschnitts an demselben.

Siehe Fig. 21 weiter unten und den Text dazu.

5 Verbinden und Schneiden in der Ebene

Zwei Punkte P, Q bestimmen genau eine Gerade g , die P und Q enthält.

Beweis und Konstruktionen:

Sind P und Q reell, so ist nichts zu beweisen und die Konstruktion ist klar.

Ist P reell und Q imaginär, so ist g imaginär, sofern P nicht auf der Trägergeraden des Pfeiles Q liegt. P ist der Träger der g darstellenden, zur Involution von Q perspektiven Strahleninvolution.

Zur Konstruktion des Verbindungstwists zwischen einem Pfeil Q und einem reellen Punkt P konstruieren wir zunächst, wie in Abb. 2, die harmonische Darstellung der durch Q gegebenen Involution, welche vom Schnittpunkt des Nahstrahls von P mit dem Träger von Q ausgeht. Die dazu perspektive Strahleninvolution in P liefert uns sofort den gesuchten Twist (siehe Abb. 14).

Dual dazu bestimmen wir zur Konstruktion des Schnittpfeils zwischen einem Twist q und einer reellen Gerade p zunächst, wie in Abb. 2 die harmonische Darstellung der durch q gegebenen Involution, welche von der Verbindungsgeraden des Fernpunktes von p mit dem Träger von q ausgeht. Die dazu perspektive Punktinvolution in p liefert uns sofort den gesuchten Pfeil (siehe Abb. 15).

In einigen Fällen können die genannten Konstruktionen vereinfacht werden:

Zwei Geraden p, q bestimmen genau einen Punkt G , der in p und q liegt.

Sind p und q reell, so ist nichts zu beweisen und die Konstruktion ist klar.

Ist p reell und q imaginär, so ist G imaginär, sofern p nicht durch den Trägerpunkt des Twists q geht. p ist der Träger der G darstellenden, zur Involution von q perspektiven Punktinvolution.

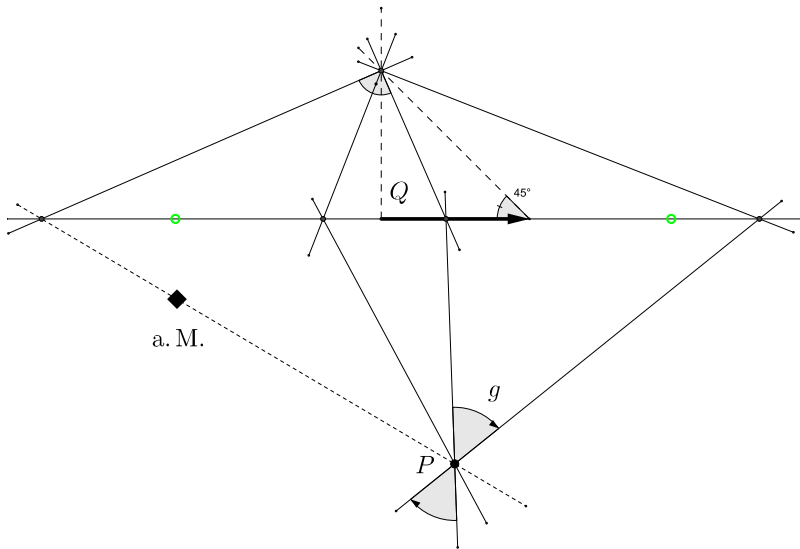


Abb. 14: Konstruktion des Twists g der Verbindungsgerade eines durch einen Pfeil Q gegebenen imaginären Punktes mit einem reellen Punkt P .

Der Verbindungswist zwischen einem Pfeil Q und einem reellen Punkt P lässt sich besonders einfach konstruieren, wenn der Nahstrahl des Twistträgers P und der Anfangspunkt oder der Endpunkt von Q , der Endpunkt des komplex konjugierten Punktes \bar{Q} oder der Fernpunkt des Trägers von Q inzidieren.

Mit anderen Worten, wenn der Twistträger P zentriert ist zum Anfangspunkt, oder zum Endpunkt von Q , zum Endpunkt des komplex konjugierten Punktes \bar{Q} oder zum Fernpunkt des Trägers von Q .

Der Schnittpfeil zwischen einem Twist q und einer reellen Geraden p lässt sich besonders einfach konstruieren, wenn der Fernpunkt des Pfeilträgers p und der Anfangsstrahl oder der Endstrahl von q , der Endstrahl der komplex konjugierten Geraden \bar{q} oder der Nahstrahl des Trägers von q inzidieren.

Mit anderen Worten, wenn der Pfeilträger p parallel ist zum Anfangsstrahl oder zum Endstrahl von q , zum Endstrahl der komplex konjugierten Geraden \bar{q} oder zum Nahstrahl des Trägers von q .

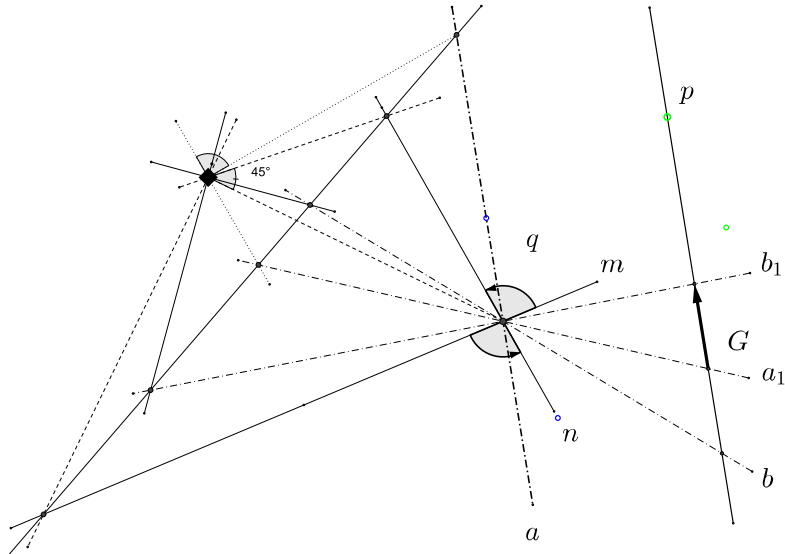


Abb. 15: Pfeil G des Schnittpunktes einer durch einen Twist q gegebenen imaginären Geraden mit einer reellen Geraden p .

In diesen Fällen liegen die vom Nahstahl bzw. vom Fernpunkt ausgehenden harmonischen Darstellungen der elliptischen Involutionen schon vor und müssen nicht erst konstruiert werden (vgl. Abb. 16).

Sind P, Q imaginär, so ist g imaginär, sofern P, Q nicht derselben Geraden angehören. g muss dargestellt werden durch eine gerichtete elliptischen Strahleninvolution, die zu den P und Q darstellenden gerichteten Punktinvolutionen einschließlich des Sinnes perspektiv ist.

Ist U der Schnittpunkt der Geraden der Pfeile P, Q , so bestimme man die harmonischen Darstellungen UVU_1V_1 und $UV'U'_1V'_1$ (nach Abb. 2) der P, Q darstellenden Punktinvolutionen. Die Verbindungsgeraden $U_1U'_1 = u_1, VV' = v, V_1V'_1 = v_1$ gehen dann durch einen Punkt S . Die Geraden $u = SU, u_1, v, v_1$

Sind p, q imaginär, so ist G imaginär, sofern p, q nicht demselben Punkt angehören. G muss dargestellt werden durch eine gerichtete elliptischen Punktinvolution, die zu den p und q darstellenden gerichteten Strahleninvolutionen einschließlich des Sinnes perspektiv ist.

Ist u die Verbindungsgerade der Punkte der Twists p, q , so bestimme man die harmonischen Darstellungen uvu_1v_1 und $uv'u'_1v'_1$ (nach Abb. 2) der p, q darstellenden Strahleninvolutionen. Die Schnittpunkte $u_1u'_1 = U_1, vv' = V, v_1v'_1 = V_1$ liegen dann in einer Gerade s . Die Punkte $U = su, U_1, V, V_1$

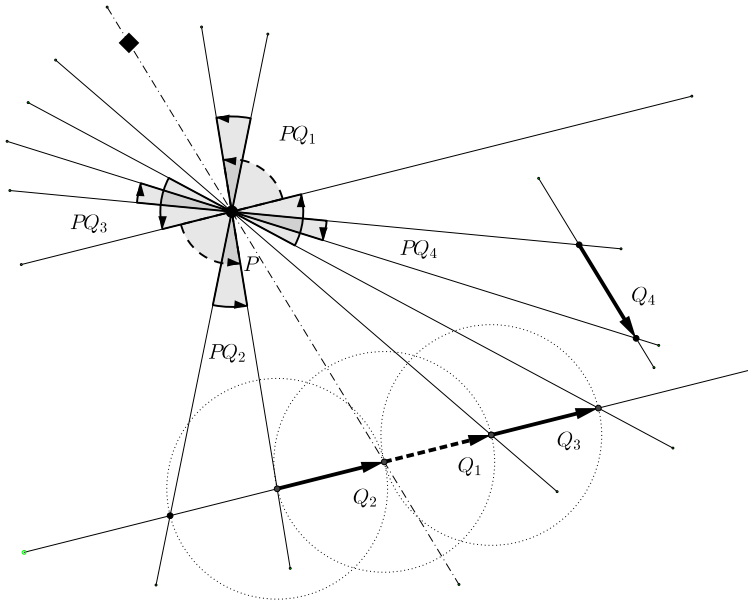


Abb. 16: Verbindungstwists eines reellen und einiger imaginärer Punkte bzw. Schnittpfeile einer reellen und einiger imaginärer Geraden in speziellen Fällen

bestimmen die gerichtete elliptische Strahleninvolution uvu_1v_1 welche die gesuchte Gerade g darstellt.

bestimmen die gerichtete elliptische Punktinvolution UVU_1V_1 welche den gesuchten Punkt G darstellt.

Abb. 17 zeigt die links beschriebene Konstruktion der Involution uvu_1v_1 in S . Die imaginäre Verbindungsgerade PQ , welche durch diese Involution dargestellt wird, wird anschließend mit einer zum Nahstrahl von S e-parallelen (reellen) Geraden geschnitten. Dann wird nach der Konstruktion in Abb. 3 der Pfeil W dieses imaginären Schnittpunktes bestimmt. Aus diesem Pfeil entsteht dann der Twist der Geraden PQ in S durch Scheinbildung, weil der Nahstrahl von S und der Fernpunkt des Trägers von W inzident sind.

Wenn der a.M. in den Schnittpunkt U der beiden Pfeilträger fällt, kann der letzte Schritt entfallen, weil dann uvu_1v_1 schon eine vom Nahstrahl ausgehende harmonische Darstellung der gerichteten elliptischen Involution ist, welche die Verbindungsgerade PQ darstellt. Der zugehörige Twist lässt sich also sofort zeichnen.

Die rechts beschriebene Konstruktion der Schnittpfeiles zu zwei Twists ist in Abb. 18 dargestellt. Zu der gerichteten Punktinvolution UU_1VV_1 wird in der

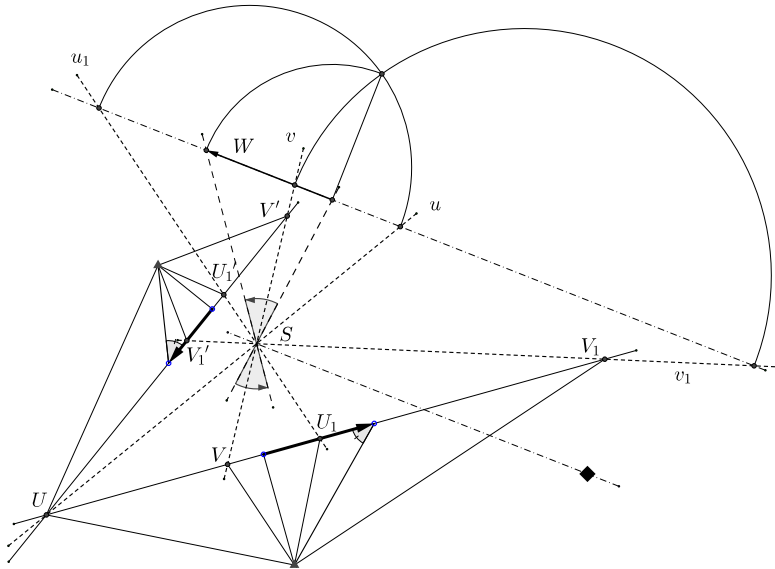


Abb. 17: Konstruktion des Verbindungstwists zu zwei Pfeilen.
(Erweiterung von Fig. 13 in [3])

Abbildung schließlich noch nach der Konstruktion in Abb. 3 die Pfeildarstellung des imaginären Punktes $G = pq$ bestimmt.

Die beiden letzten Konstruktionen erscheinen nur auf den ersten Blick vielleicht etwas aufwendig und unübersichtlich, aber wann man sich etwas damit beschäftigt und die einzelnen Schritte im Blick hat, sind beide Konstruktionen recht einfach auszuführen. Die Hilfslinien, die stehengelassen wurden, sollen beim Nachvollziehen der Konstruktionsschritte helfen.

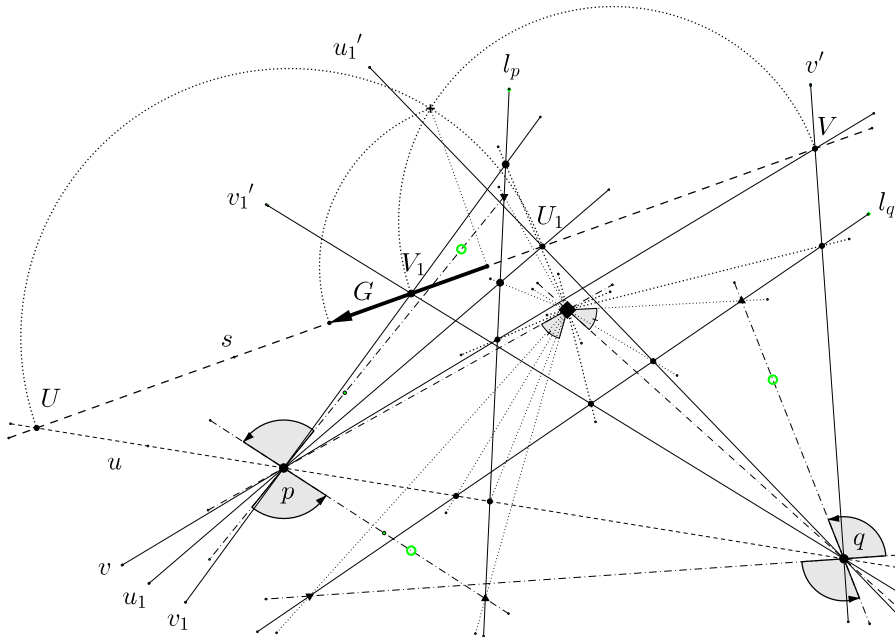


Abb. 18: Konstruktion des Schnittpfeils zu zwei Twists

6 Die imaginären Punkte und Tangenten eines Kegelschnitts

Wir geben die Konstruktionen und deuten nachträglich den Beweis an. Abb. 19 zeigt die Verhältnisse für einen Kreis. Man konstruiere eine zum Kreis konzentrische gleichseitige Hyperbel, für welche die Länge der Hauptachse gleich dem Kreisdurchmesser ist. Die zur Hauptachse senkrechten Halbsehnen liefern Pfeile (mit den Spitzen auf der Hyperbel), welche sämtliche imaginären Punkte des Kreises darstellen.

Die Tangente t im imaginären Punkte P ergibt sich wie folgt: Man bestimme den Pol S der Geraden s , welche den Pfeil P trägt. Die gerichtete Strahleninvolution in S , die perspektiv ist zur P darstellenden Punktinvolution, liefert die Tangente. Um t durch ihren Twist andeuten zu können, haben wir den a.M. in den Mittelpunkt des Kreises gelegt. Der Anfangsstrahl ist dann parallel zum Träger s von P und der Endstrahl geht durch den am Anfangspunkt des Pfeiles von P gespiegelten Punkt, also durch den Endpunkt des Pfeiles, welcher zu dem zu P konjugierten Punkt \bar{P} gehört. Um sämtliche Punkte des Kreises zu erhalten, hat man die Abb. 19 um den Kreismittelpunkt zu drehen. Man beachte insbeson-

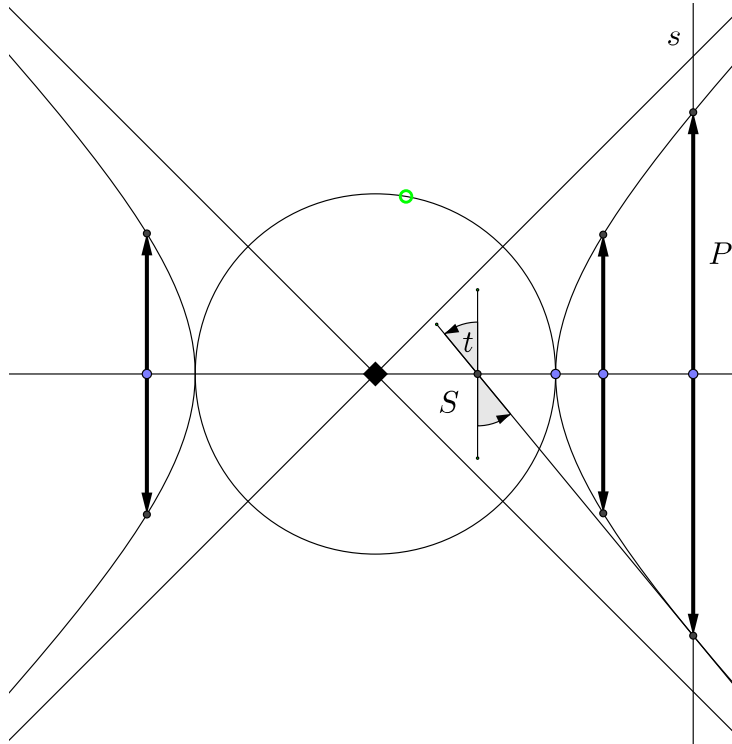


Abb. 19: Imaginäre Schnittpunkte beim Kreis und Tangente t im imaginären Schnittpunkt P .

dere: Es ist aus dem Pfeilfeld des Kreises sofort zu sehen, dass *jeder* Kreis zwei bestimmte imaginäre Punkte der unendlichfernen Geraden enthält, nämlich diejenigen Punkte, welche von den beiden gerichteten Rechtwinkelinvolutionen aus jener Geraden geschnitten werden.

Um die Tangenten von einem inneren Punkte S des Kreises an diesen zu legen, hat man, um das Pfeilbild der Tangenten zu erhalten, einen ebenen Wirbel mit dem Mittelpunkt S zu bestimmen, der mit dem Kreis *einen* Pfeil gemeinsam hat. Das Pfeilbild des Kreises zeigt unmittelbar anschaulich, dass die Tangenten vom Kreismittelpunkt aus die beiden isotropen Geraden dieses Punktes sind.

Aus Abb. 19 kann man auch den Twist einer Tangente, die von dem inneren Punkt S des Kreises an diesen gelegt wird, ablesen: Nach dem obigen ist t Tangente im (imaginären) Kreispunkt P und geht durch S , also ist t eine der beiden Tangenten, die durch S an den Kreis gelegt werden können.

Wenn der a.M. im Kreismittelpunkt liegt, kann man die Konstruktion der Twists zu den imaginären Tangenten in inneren Punkten S des Kreises auch so beschreiben (vgl. ebenfalls Abb. 19): Man zeichne die zu Anfang dieses Abschnitts beschriebene konzentrische, gleichseitige Hyperbel, für welche die Länge der Hauptachse gleich dem Kreisdurchmesser ist und deren Achse der Nahstrahl von S ist. Die Tangenten dieser Hyperbel sind dann die Polaren der Hyperberpunkte bezüglich des Kreises und die beiden Twists der imaginären Tangenten durch S haben folglich als Anfangsstrahl die Gerade durch S , die senkrechte zum Nahstrahl ist und als Endstrahl eine der beiden Tangenten von S an die Hyperbel.

Die folgende Konstruktion liefert für allgemeine Kegelschnitte die Konstruktion der Pfeile und Twists für die imaginärer Schnittpunkte mit inneren Geraden und Tangenten durch innere Punkte:

Sei jetzt irgendein Kegelschnitt k als Punktreihe 2. Ordnung vorgelegt. Wir wollen die Schnittpunkt mit einer Schar e-paralleler (reeller) Geraden bestimmen. Sei t eine Tangente an k und sei B deren Berührungspunkt. (t gibt die Richtung der e-parallelen Schar vor.) Sei A der zweite Kurvenpunkt auf dem durch B verlaufenden Durchmesser (d.h. Gerade durch den Pol der u.G.) von k .

Nun wähle man einen beweglichen Punkt U auf k und bestimme dazu den Spiegelpunkt U_1 bei der harmonischen Spiegelung an A und t , d.h., man schneide den Strahl AU mit t und bestimme U_1 als den Punkt, der mit U den Punkt A und jenen Schnittpunkt harmonisch trennt.

Sei nun s die zu t e-parallele Gerade durch U_1 . AB schneidet s im Anfangspunkt C des Pfeiles CU_1 . Dieser Pfeil stellt den einen der beiden imaginären Schnittpunkte von s mit k dar. Der andere hat den gleichen Anfangspunkt und der Endpunkt ist der Schnittpunkt von UB mit s .

Sei jetzt irgendein Kegelschnitt k als Strahlenbündel 2. Ordnung vorgelegt. Wir wollen die Verbindungsgeraden mit einer Schar d-paralleler (reeller) Punkte bestimmen. Sei T ein Stützpunkt von k und sei b dessen Kurvenstrahl. (T gibt die Flucht der d-parallelen Schar vor.) Sei a der zweite Kurvenstrahl durch den auf b liegenden Ummesser (d.h. Punkt auf der Polaren des a.M.) von k .

Nun wähle man einen beweglichen Strahl u von k und bestimme dazu den Spiegelstrahl u_1 bei der harmonischen Spiegelung an a und T , d.h., man verbinde den Punkt au mit t und bestimme u_1 als den Strahl, der mit u den Strahl a und jenen Verbindungsgerade harmonisch trennt.

Sei nun S der zu T d-parallele Punkt in u_1 . ab verbindet S im Anfangsstrahl c des Twists cu_1 . Dieser Twist stellt die eine der beiden imaginären Verbindungsgeraden von S mit k dar. Der andere hat den gleichen Anfangsstrahl und der Endstrahl ist die Verbindungsgerade von ub mit S .

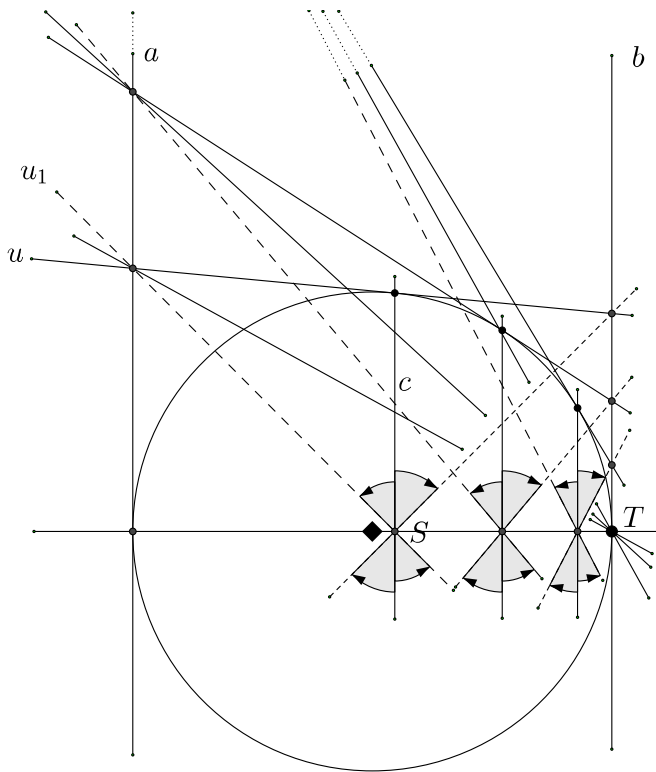


Abb. 21: Imaginäre Tangenten am Kreis

Der Beweis der (links) angegebenen Konstruktion ergibt sich aus dem Satze (siehe [2]): Das Nebendreieck eines einem Kegelschnitt einbeschriebenen vollständigen Viereckes ist ein Polardreieck. Dreht sich in Abb. 22 XY um den Punkt S , so beschreiben somit die Nebenecken X', Y' des vollständigen Viereckes $ABXY$ die Polare s von S ; ferner sind X', Y' konjugiert, beschreiben also die von k auf s erzeugte Punktinvolution. Die Punkte U_1, V_1 in Abb. 20 sind hierbei diejenigen zugeordneten Punkte dieser Involution, welche deren Mittelpunkt C und den unendlich fernen Punkt von s harmonisch trennen.

Die (imaginären) Schnittpunkte eines Kreises mit der Ferngeraden sind die beiden imaginären Kreispunkte, also die zur Rechtwinkelinvolution auf der Ferngerade gehörenden Punkte. Und die beiden (imaginären) Tangenten durch den Mittelpunkt eines Kreises sind die beiden isotropen Geraden durch den Mittelpunkt.

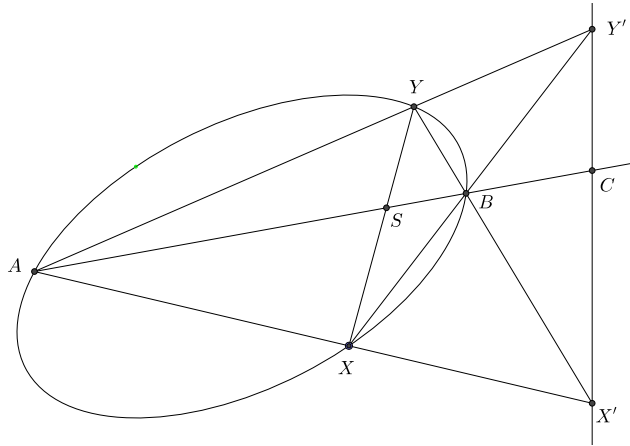


Abb. 22: Zur Konstruktion in Abb. 20 (Fig. 17 in [3])

Abbildung 23 schließlich zeigt einige Pfeile und Twists von imaginären Punkten und Tangenten bei der Parabel. Die Spitzen der Pfeile liegen auf Parabeln, die man durch Spiegelung der gegebenen Parabel an dem Parabelpunkt erhält, in welchem die zum Träger der Pfeile parallele Parabeltangente die Parabel berührt.

Hiermit haben wir einen anschaulichen Überblick über sämtliche imaginären Punkte und Tangenten eines reellen Kegelschnitts gewonnen. Die Ergebnisse lassen sich leicht auch auf nullteilige Kegelschnitte übertragen. Locher-Ernst wendet sich in seinem Artikel nun den imaginären Elementen im Raum zu, worauf wir hier verzichten.

Stattdessen wollen wir noch auf folgende, schon in Abschnitt 4 aufgeworfene Frage eingehen: Wie verändert sich die Darstellung einer imaginären Geraden durch einen Twist, wenn sich der a.M. verschiebt? Bei den Pfeilen tritt das analoge Problem nicht auf, weil wir die u.G. intuitiv „immer am gleichen Ort“ denken, aber den a.M. möchte man, je nach Problemstellung, geeignet festlegen. Wir kann man also aus dem Twist zum a.M. an einem bestimmten Ort den Twist zu einem verschobenen a.M. konstruieren?

In Abb. 24 gehört der Twist in S mit Anfangsstrahl m und Endstrahl n zur Lage des a.M. in P_0 . Der zu n gehörende Strahl n_1 ist der an m d-gespiegelte Strahl n , und der zu m gehörende Strahl ist der Nahstrahl n_0 von S . Die durch diesen Twist und die zugehörige gerichtete elliptische Strahleninvolution $mn_0.nm_1$ dargestellte imaginäre Gerade wird mit einer zum Nahstrahl von S bezüglich des in P'_0 gelegenen a.M. e-parallelen Geraden geschnitten. Zu diesem

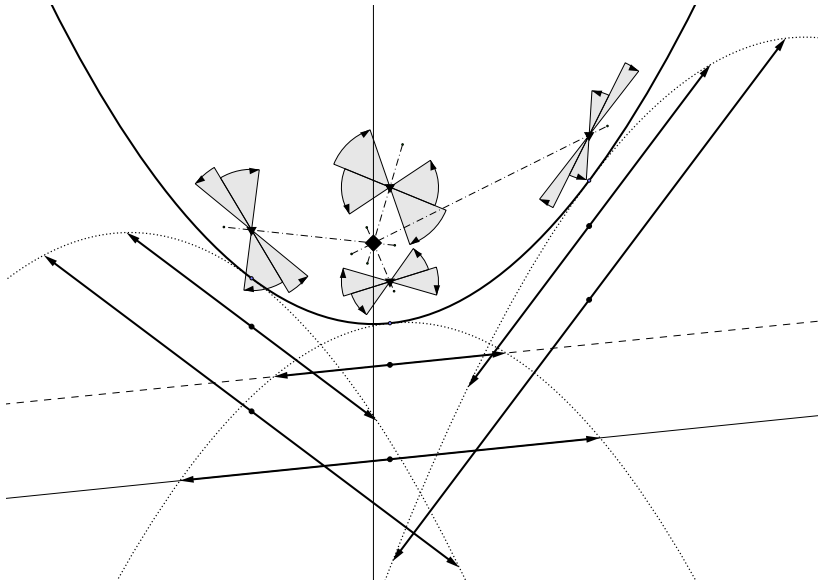


Abb. 23: Imaginäre Punkte und Tangenten bei der Parabel

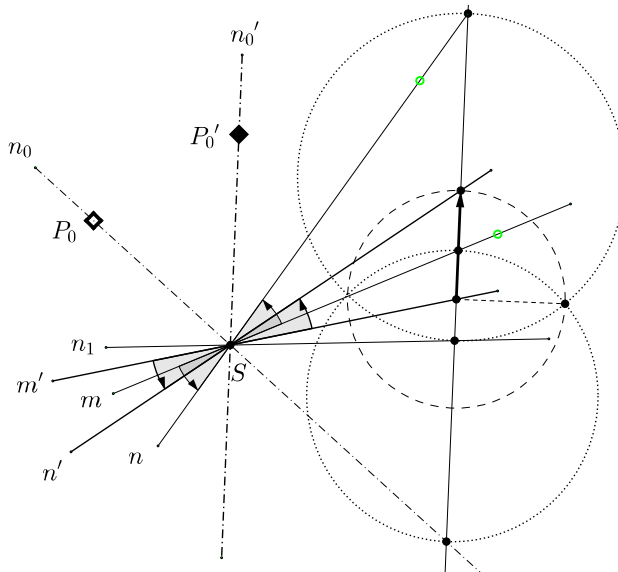


Abb. 24: Veränderung eines Twist bei Veränderung des a.M.

imaginären Schnittpunkt wird nach Abb. 3 der Pfeil konstruiert. Der gesuchte zu P'_0 gehörende Twist ist dann perspektiv zu diesem Pfeil.

Der Twist zu einer imaginären Geraden hängt nur vom Nahstrahl des Trägers ab, nicht davon, wo der a.M. genau liegt. Wenn der neue Nahstrahl n'_0 mit n zur Deckung kommt, dann ist der neue Twist gerade der zur komplex konjugierten Gerade gehörende Twist zum alten Nahstrahl.

7 Vorläufiges Fazit

Abschließende sei gesagt, dass die Symbole Pfeil und Twist für imaginäre Punkte und Geraden der Ebene, wie wir gesehen haben, dazu geeignet sind, gewisse Verhältnisse im Imaginären zu veranschaulichen. Es sei jedoch nochmals betont, dass das sachgemäß Richtige nicht Pfeile und Twists sind, sondern die gerichteten elliptischen Involutionen, und dass man die Bewegungen, als die man diese Involutionen auffassen kann, sich durchaus zu einer inneren Anschauung bringen kann. Wir haben gesehen, dass die geometrischen Grundkonstruktionen mit den Symbolen möglich sind; aber sie sind wesentlich unhandlicher als im Reellen. Beispielsweise liefern zwei Twists ohne dass man die Konstruktion tatsächlich ausführt, kaum einen anschaulichen Hinweis auf den Pfeil des zugehörigen imaginären Schnittpunktes (siehe z.B. Abb. 18). Tatsächliche geometrische Konstruktionen mit imaginären Elementen mittels Pfeilen und Twists werden schnell sehr aufwändig und unübersichtlich. So ist es, beispielsweise, natürlich möglich, zu zwei reellen Grundpunkten und einem imaginären Punkt auf einer Gerade den zweiten imaginären Teilpunkt für einen harmonischen Wurf zu konstruieren. Mit einem geeignete Computerprogramm, z.B. GeoGebra, gelingt das durchaus. Aber man *sieht* nichts an der Konstruktion; die konstruierten Pfeile und Twists haben *anschaulich* keinen ersichtlichen Zusammenhang.

Pfeile und Twists als Symbole für imaginäre Punkte und Geraden sind also für gewisse Zwecke hilfreich, aber man darf ihren Nutzen nicht überbewerten. Die Geometrie mit Einschluss der Imaginären ist keine triviale Erweiterung der reellen Geometrie, die sich leicht mit ein paar Symbolen handhaben ließe, sondern sie birgt etwas wesentlich Neues. Sie ohne algebraische Hilfsmittel (z.B. Koordinaten) zu handhaben, erfordert Denkkräfte, die sich derjenige, der tiefer in sie eindringen will, erst erwerben muss.

Literatur

- [1] Gerhard Kowol. *Projektive Geometrie und Cayley-Klein Geometrien der Ebene*. Birkhäuser Verlag AG Basel, Boston, Berlin, 2009.
- [2] Louis Locher-Ernst. *Projektive Geometrie*. Philosophisch-Anthroposophischer Verlag, Goetheanum, Dornach, 2. Auflage, 1980.
- [3] Louis Locher-Ernst. *Das Imaginäre in der Geometrie*. In: Louis Locher-Ernst: *Geometrische Metamorphosen*, Philosophisch-Anthroposophischer Verlag, Goetheanum, Dornach, 1970.