1 euclidisch

Punkte $P(x_P, y_P, z_P)$ und $Q(x_Q, y_Q, z_Q) \;\Rightarrow\; P{\vee}Q = l$: Punktreihe oder Strahl

$$tx + uy + vz + 1 = o \tag{7}$$

t, u, v in polair-euclidische coördinaten und constant ; x, y, z in euclidische coördinaten und variabel: Punkte auf ein Ebene

Ebene $\alpha(0, u, v)$ durch $l \;\Rightarrow\; uy + vz + 1 = 0 \;\Rightarrow\; y = -\frac{v}{u}z - \frac{1}{u}$; P und Q auf α :

$$\begin{array}{lll} uy_P + vz_P + 1 = 0 & \|z_Q & \|y_Q \\ uy_Q + vz_Q + 1 = 0 & \|\underline{z_P} & \|\underline{y_P} \end{array}$$

$$u(y_P z_Q - y_Q z_P) = z_P - z_Q \;\Rightarrow\; u_\alpha = \frac{z_P - z_Q}{y_P z_Q - y_Q z_P}$$

$$v(z_P y_Q - z_Q y_P) = y_P - y_Q \;\Rightarrow\; v_\alpha = \frac{y_P - y_Q}{z_P y_Q - z_Q y_P}$$

$$y = -\frac{v}{u}z - \frac{1}{u} = -\frac{y_P - y_Q}{z_P y_Q - z_Q y_P} \times \frac{y_P z_Q - y_Q z_P}{z_P - z_Q} z - \frac{y_P z_Q - y_Q z_P}{z_P - y_Q}$$

$$\alpha : y = \underbrace{\frac{y_P - z_Q}{z_P - z_Q}}_{s} z - \underbrace{\frac{y_P z_Q - y_Q z_P}{z_P - z_Q}}_{\sigma} \;\Rightarrow\; y = sz + \sigma \tag{1b}$$

Ebene $\beta(t, 0, v)$ durch $l \;\Rightarrow\; tx + vz + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{v}{t}z - \frac{1}{t}$; P und Q auf β :

$$\begin{array}{lll} tx_P + vz_P + 1 = 0 & \|z_Q & \|x_Q \\ tx_Q + vz_Q + 1 = 0 & \|\underline{z_P} & \|\underline{x_P} \end{array}$$

$$t(x_P z_Q - x_Q z_P) = z_P - z_Q \;\Rightarrow\; t_\beta = \frac{z_P - z_Q}{x_P z_Q - x_Q z_P}$$

$$v(z_P x_Q - z_Q x_P) = x_P - x_Q \;\Rightarrow\; v_\beta = \frac{x_P - x_Q}{z_P x_Q - z_Q x_P}$$

$$x = -\frac{v}{t}z - \frac{1}{t} = -\frac{x_P - x_Q}{z_P x_Q - z_Q x_P} \times \frac{x_P z_Q - x_Q z_P}{z_P - z_Q} z - \frac{x_P z_Q - x_Q z_P}{z_P - z_Q}$$

$$\beta : x = \underbrace{\frac{x_P - x_Q}{z_P - z_Q}}_{r} z + \underbrace{\frac{z_P x_Q - z_Q x_P}{z_P - z_Q}}_{\rho} \;\Rightarrow\; x = rz + \rho \tag{1a}$$

Ebene $\gamma(t, u, 0)$ durch $l \;\Rightarrow\; tx + uy + 1 = 0 \Rightarrow\; y = -\frac{t}{u}x - \frac{1}{u}$; P und Q auf γ :

$$\begin{array}{lll} tx_P + uy_P + 1 = 0 & \|y_Q & \|x_Q \\ tx_Q + uy_Q + 1 = 0 & \|\underline{y_P} & \|\underline{x_P} \end{array}$$

$$t(x_P y_Q - x_Q y_P) = y_P - y_Q \;\Rightarrow\; t_\gamma = \frac{y_P - y_Q}{x_P y_Q - x_Q y_P}$$

$$u(y_P x_Q - y_Q x_P) = x_P - x_Q \;\Rightarrow\; u_\gamma = \frac{x_P - x_Q}{y_P x_Q - y_Q x_P}$$

$$y = -\frac{t}{u}x - \frac{1}{u} = -\frac{y_P - y_Q}{x_P y_Q - x_Q y_P} \times \frac{y_P x_Q - y_Q x_P}{x_P - x_Q} - \frac{y_P x_Q - y_Q x_P}{x_P - y_Q}$$

$$\gamma : y = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}x + \frac{x_P y_Q - x_Q y_P}{x_P - x_Q} \tag{1c}$$

Plücker fängt anders an:

$$\left.\begin{array}{ll} y = sz + \sigma & :\alpha \\ x = rz + \rho & :\beta \end{array}\right\} \tag{1}$$

$$ry - sx = (r\sigma - s\rho) \tag{2}$$

$$r\sigma - s\rho \overset{\text{def}}{=} \eta \tag{3}$$

Mit (1a) und (1b) ist zu schreiben :

$$\eta = r\sigma - s\rho = \frac{x_P - x_Q}{z_P - z_Q}. - \frac{y_P z_Q - y_Q z_P}{z_P - z_Q} - \frac{y_P - y_Q}{z_P - z_Q}.\frac{z_P x_Q - z_Q x_P}{z_P - z_Q} =$$

nach ein wenig rechnen :

$$\frac{x_P y_Q(z_P - z_Q) - x_Q y_P(z_P - z_Q)}{(z_P - z_Q)^2} = \frac{x_P y_Q - x_Q y_P}{z_P - z_Q} = \eta$$

Plücker gibt fünf Coördinaten für den gerade Linie als Strahl:

$$r, s, \rho, \sigma, \eta \tag{4}$$

$$\begin{array}{lll} r = \frac{x_P - x_Q}{z_P - z_Q} & \rho = \frac{x_Q z_P - x_P z_Q}{z_P - z_Q} & \\ s = \frac{y_P - y_Q}{z_P - z_Q} & \sigma = -\frac{y_P z_Q - y_Q z_P}{z_P - z_Q} & \eta = \frac{x_P y_Q - y_Q z_P}{z_P - z_Q} \end{array}$$

η als coördinaat kan geometrisch gedeutet werden wenn die Ebene γ (1c) anders geschrieben werd (sieh auch fig.1):

$$y = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}\frac{z_P - z_Q}{z_P - z_Q}x + \frac{x_P y_Q - x_Q y_P}{z_P - z_Q}\frac{z_P - z_Q}{z_P - z_Q} = \frac{s}{r}x + \frac{\eta}{r} \tag{1c'}$$

Die Ebenen α, β, γ sind auch in euclidische coördinaten zu schreiben :

$$\alpha(\infty, \sigma, -\frac{\sigma}{s}),\; \beta(\rho, \infty, -\frac{\rho}{r}),\; \gamma(-\frac{\eta}{s}, \frac{\eta}{r}, \infty)$$

Plücker definiërt dann sechs coördinaten. :

$$\left.\begin{array}{lll} (x_P - x_Q) & (y_P - y_Q) & (z_P - z_Q) \\ (y_P z_Q - y_Q z_P) & (z_P x_Q - z_Q x_P) & (x_P y_Q - x_Q y_P) \end{array}\right\} \tag{5}$$

Durch ausklammern ist zu finden :

$$(x_P - x_Q)(y_P z_Q - y_Q z_P) + (y_P - y_Q)(z_P x_Q - y_Q z_P) + (z_P - z_Q)(x_P y_Q - x_Q y_P) = 0 \tag{6}$$

2 polar-euclidisch

Ebene $\phi(t_\phi, u_\phi, v_\phi)$ und $\psi(t_\psi, u_\psi, v_\psi)$ $\Rightarrow$ $\phi \wedge \psi = l$: Ebenenbuschel oder Axe

$$tx + uy + vz + 1 = o \tag{7}$$

t, u, v in polair-euclidische coördinaten und variabel ; x, y, z in euclidische coördinaten und constant: Ebenen durch ein Punkt

Punkt $A(0, y, z)$ auf l $\Rightarrow$ $yu + zv + 1 = 0$ $\Rightarrow u = -\frac{z}{y}v - \frac{1}{y}$; ϕ und ψ durch A :

$$\begin{array}{ll} yu_\phi + zv_\phi + 1 = 0 & \|v_\psi \quad \|u_\psi \\ yu_\psi + zv_\psi + 1 = 0 & \|\underline{v_\phi} \quad \|\underline{u_\phi} \end{array}$$

$$y(u_\phi v_\psi - u_\psi v_\phi) = v_\phi - v_\phi \;\Rightarrow\; y_A = \frac{v_\phi - v_\psi}{u_\phi v_\psi - u_\psi v_\phi}$$

$$z(v_\phi u_\psi - v_\psi u_\phi) = u_\phi - u_\psi \;\Rightarrow\; z_A = \frac{u_\phi - u_\psi}{v_\phi u_\psi - v_\psi u_\phi}$$

$$u = -\frac{z}{y}v - \frac{1}{y} = -\frac{u_\phi - u_\psi}{v_\phi u_\psi - v_\psi u_\phi} \times \frac{u_\phi v_\psi - u_\psi v_\phi}{v_\phi - v_\psi} v - \frac{u_\phi v_\psi - u_\psi v_\phi}{v_\phi - v_\psi}$$

$$A : u = \underbrace{\frac{u_\phi - u_\psi}{v_\phi - v\psi}}_{q} v + \underbrace{-\frac{u_\phi v_\psi - u_\psi v_\phi}{v_\phi - v_\psi}}_{\kappa} \;\Rightarrow\; u = qv + \kappa \tag{8b}$$

Punkt $B(x, 0, z)$ auf l $\Rightarrow$ $xt + zv + 1 = 0$ $\Rightarrow$ $t = -\frac{z}{x}v - \frac{1}{x}$; ϕ und ψ durch B :

$$\begin{array}{ll} xt_\phi + zv_\phi + 1 = 0 & \|v_\psi \quad \|t_\psi \\ xt_\psi + zv_\psi + 1 = 0 & \|\underline{v_\phi} \quad \|\underline{t_\phi} \end{array}$$

$$x(t_\phi v_\psi - t_\psi v_\phi) = v_\phi - v_\psi \;\Rightarrow\; x_B = \frac{v_\phi - v_\psi}{t_\phi v_\psi - t_\psi v_\psi}$$

$$z(v_\phi t_\psi - v_\psi t_\phi) = t_\phi - t_\psi \;\Rightarrow\; z_B = \frac{t_\phi - t_\psi}{v_\phi t_\psi - v_\psi t_\phi}$$

$$t = -\frac{z}{x}v - \frac{1}{x} = -\frac{t_\phi - t_\psi}{v_\phi t_\psi - v_\psi t_\phi} \times \frac{t_\phi v_\psi - t_\psi v_\phi}{v_\phi - v_\psi} v - \frac{t_\phi v_\psi - t_\psi v_\phi}{v_\phi - v_\psi}$$

$$B : t = \underbrace{\frac{t_\phi - t_\psi}{v_\phi - v_\psi}}_{p} v + \underbrace{\frac{t_\psi v_\phi - t_\phi v_\psi}{v_\phi - v_\psi}}_{\pi} \;\Rightarrow\; t = pv + \pi \tag{8a}$$

Punkt $C(x, y, 0)$ auf l $\Rightarrow$ $xt + yu + 1 = 0 \Rightarrow$ $u = -\frac{x}{y}t - \frac{1}{y}$; ϕ und ψdurch C :

$$\begin{array}{ll} xt_\phi + yu_\phi + 1 = 0 & \|u_\psi \quad \|t_\psi \\ xt_\psi + yu_\psi + 1 = 0 & \|\underline{u_\phi} \quad \|\underline{t_\phi} \end{array}$$

$$x(t_\phi u_\psi - t_\psi u_\phi) = u_\phi - u_\psi \;\Rightarrow\; x_C = \frac{u_\phi - u_\psi}{t_\phi u_\psi - t_\psi u_\psi}$$

$$y(u_\phi t_\psi - u_\psi t_\phi) = t_\phi - t_\psi \;\Rightarrow\; y_C = \frac{t_\phi - t_\psi}{u_\phi t_\psi - u_\psi t_\phi}$$

$$u = -\frac{x}{y}t - \frac{1}{y} = -\frac{u_\phi - u_\psi}{t_\psi u_\phi - t_\psi u_\phi} \times \frac{u_\phi t_\psi - u_\psi t_\phi}{t_\phi - t_\psi}t - \frac{u_\phi t_\psi - u_\psi t_\phi}{t_\phi - t_\psi}$$

$$C : u = \frac{u_\phi - u_\psi}{t_\phi - t_\psi}t + \frac{t_\phi u_\psi - t_\psi u_\phi}{t_\phi - t_\psi} \;\Rightarrow\; u = \frac{q}{p}t + \frac{\omega}{p}$$

Zusammanfassend :

$$\left.\begin{array}{ll} u = qv + \kappa & : A \\ t = pv + \pi & : B \end{array}\right\} \tag{8}$$

$$pu - qt = (p\kappa - q\pi) \tag{9}$$

$$p\kappa - q\pi \overset{\text{def}}{=} \omega \tag{10}$$

Mit (8a) und (8b) ist zu schreiben :

$$\omega = p\kappa - q\pi = \frac{t_\phi - t_\psi}{v_\phi - v_\psi}. - \frac{u_\phi v\psi - u_\psi v_\phi}{v_\phi - v_\psi} - \frac{u_\phi - u_\psi}{v_\phi - v_\psi}.\frac{t_\psi v_\phi - t_\phi v_\psi}{v_\phi - v_\psi} =$$

nach ein wenig rechnen :

$$\frac{t_\phi u_\psi(t_\phi - t_\psi) - t_\psi u_\phi(t_\phi - t_\psi)}{(t_\phi - t_\psi)^2} = \frac{t_\phi u_\psi - t_\psi u_\phi}{v_\phi - v_\psi} = \omega$$

Die Punkte A,B,C sind auch in polar-euklidische koördinaten zu schreiben :

$$A(\infty, \kappa, -\frac{\kappa}{q}), B(\pi, \infty, -\frac{\pi}{p}), C(-\frac{\omega}{q}, \frac{\omega}{p}, \infty) \tag{11}$$

Plücker definiërt dann wieder sechs coördinaten. :

$$\left.\begin{array}{lll} (t_\phi - t_\psi) & (u_\phi - u_\psi) & (v_\phi - v_\psi) \\ (u_\phi v_\psi - u_\psi v_\phi) & (v_\phi t_\psi - v_\psi t_\phi) & (t_\phi u_\psi - t_\psi u_\phi) \end{array}\right\} \tag{12}$$

Durch ausklammern ist zu finden :

$$(t_\phi - t_\psi)(u_\phi v_\psi - u\psi v_\phi) + (u_\phi - u_\psi)(v_\phi t_\psi - v_\psi t_\phi) + (v_\phi - v_\psi)(t_\phi u_\psi - t_\psi u_\phi) = 0 \tag{13}$$

3 Euklidische : polar-euklidische coördinaten

Weil gültig ist :

$$x = -\frac{1}{t}, y = -\frac{1}{u}, z = -\frac{1}{v}$$

kan Formel (11) umgeschrieben werden in euklidische coördinaten:

$$A(0, -\frac{1}{\kappa}, \frac{q}{\kappa}), B(-\frac{1}{\pi}, 0, \frac{p}{\pi}), C(\frac{q}{\omega}, -\frac{p}{\omega}, o)$$

Aus Abb.1 ist abzulesen in euklidische coórdinaten:

$$A(0, \frac{\eta}{r}, -\frac{\rho}{r}), B(-\frac{\eta}{s}, 0, -\frac{\sigma}{s}), C(\rho, \sigma, 0)$$

Wir haben also :

$$\frac{\eta}{r} = -\frac{1}{\kappa}, \frac{\rho}{r} = -\frac{q}{\kappa}, \frac{\eta}{s} = \frac{1}{\pi}, -\frac{\sigma}{s} = \frac{p}{\pi}, \frac{\rho}{1} = \frac{q}{\omega}, \frac{\sigma}{1} = -\frac{p}{\omega} \quad (18)$$

Jetz können wir Plücker's gleichung (19) verifiëren :

$$r : s : 1 : -\sigma : \rho : \eta = -\kappa : \pi : \omega : p : q : 1 \qquad (19)$$

Anders geschrieben :

$$\begin{array}{rrrrrr} r: & s: & 1: -\sigma: & \rho: & \eta \\ -\kappa: & \pi: & \omega: & p: & q: & 1 \end{array} \quad (19')$$

Wenn man die quotiënten-paren aus (18) nachgeht, dann sieht man in (19′), dass die Paren unten und oben correspondieren und das die gleichheid in (19) stimmt.

4 Homogene Funktionen

$$F\{(x-x'), (y-y'), (z-z'), (yz'-y'z), (zx'-z'x), (xy'-x'y)\} \equiv \Omega_n = 0$$
$$F\{(uv'-u'v), (vt'-v't), (tu'-t'u), (t-t'), (u-u'), (v-v')\} \equiv \Phi_n = 0$$

in Gleichungen :

$$\Omega_m + \lambda\Omega_n = 0 \qquad \text{oder} \qquad \Phi_m + \lambda\Phi_n = 0$$