Tangenten der Kugel und Spinoren

Matthias Lerchmüller

Den Haag, Mai 2022

Die folgenden Ausführungen verstehen sich als Arbeitsbericht und haben provisorischen Charakter; einige Punkte sind noch nicht vollständig geklärt oder bewiesen.

1 Imaginäre Elemente

Ein *imaginäres Element* (Punkt, Ebene, Gerade) wird dargestellt durch eine elliptische Involution $\sigma : B \to B$ in einem reellen Büschel B zusammen mit einer Orientierung von B (Staudt 1856). Die Darstellung nennen wir *linear* oder *quadratisch*, je nachdem B von erster oder zweiter Ordnung ist. Jedes Element hat eine einzige lineare, aber unendlich viele quadratische Darstellungen. Das *konjugiert imaginäre* Element wird durch die entgegengesetzte Orientierung dargestellt (Tabelle 1).

Sei $\sigma : B \to B$ eine Darstellung eines imaginären Elements. Dann gibt es für jedes $x \in B$ ein eindeutig bestimmtes $y \in B$, sodass sich $(x, \sigma(x))$ und $(y, \sigma(y))$ harmonisch trennen und $(x, y, \sigma(x))$ mit der Orientierung übereinstimmt. Das Quadrupel $(x, y, \sigma(x), \sigma(y))$ nennen wir einen *harmonischen Wurf* der Darstellung.

Element	Linear	Quadratisch
Imaginärer Punkt	Punktreihe P_1	Punktkurve P_2
Imaginäre Ebene	Ebenenbüschel E_1	Ebenenkegel E_2
Tiefimaginäre Gerade	Strahlenbüschel G_1	Strahlenkurve G_2 oder Strahlenkegel G_2
Hochimaginäre Gerade	Ell. Komplexbüschel K_1 (σ = Nullinvarianz)	Regelschar R_2

Tabelle 1: Darstellende Büschel der imaginären Elemente

2 Tangenten der Kugel

Wir betrachten die Kugel (Sphäre) mit Polarität π als Beispiel für eine ovale quadratische Fläche. Eine Gerade x ist *Tangente der Kugel*, wenn sich $\pi(x)$ und x treffen. Es ist zweckmässig, die erzeugenden Geraden mit $\pi(x) = x$ hier auch zu den Tangenten zu zählen.

Um eine Übersicht über die Tangenten zu gewinnen, verwenden wir folgendes *Prinzip*: Sei B ein Büschel erster oder zweiter Ordnung aus reellen Tangenten der Kugel. Dann beschreibt jede elliptische Involution $\sigma : B \to B$ zusammen mit einer Orientierung von B eine imaginäre Tangente oder Erzeugende der Kugel.

Bei Anwendung dieses Prinzips erhalten wir *sechs verschiedene Typen* von Tangenten der Kugel; davon ist ein Typ reell, vier Typen sind tiefimaginär und ein Typ ist hochimaginär. Jede imaginäre Tangente hat eine *eindeutige quadratische oder lineare Darstellung* in einem Büschel von reellen Tangenten (Tabelle 2, Abbildung 1). Die Tangenten vom Typ 1 bis 3 gehen durch einen imaginären, diejenigen vom Typ 4 bis 6 durch einen reellen Flächenpunkt.

Nr.	Typ	Element	Darstell.	Büschel	Anzahl
1	Schartangente	Hochimaginär	Quadrat.	Regelschar R_2	∞^6
2	Kegeltangente	Tiefimaginär	Quadrat.	Strahlenkegel G_2	∞^5
3	Kurventangente	Tiefimaginär	Quadrat.	Strahlenkurve G_2	∞^5
4	Büscheltangente	Tiefimaginär	Linear	Strahlenbüschel G_1	∞^4
5	Reelle Tangente	Reell	-	-	∞^3
6	Erzeugende (linke und rechte)	Tiefimaginär	Linear ($\sigma = \pi$)	Strahlenbüschel G_1	∞^2

Tabelle 2: Tangententypen der Kugel

3 Spinoren

Die beiden *Erzeugendenscharen* der Kugel sind eindimensionale komplexe projektive Räume $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, in denen wir lokale homogene Koordinaten einführen (Lerchmüller 2013, 2018). Die zugehörigen Koordinatenvektoren nennen wir *zweikomponentige Spinoren* und bezeichnen sie in der linken Schar mit a, in der rechten mit b,

$$a = (a_0, a_1),\ b = (b_0, b_1) \in \mathbb{C}^2.$$

Mit Hilfe der Spinormatrix $\boldsymbol{\varepsilon}$ gewinnen wir durch Quadrieren die Plücker-Matrizen $f(a)$, $f(b) \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ der Erzeugenden in Tangentialkoordinaten,

$$\begin{aligned} f(a) &= aa^\mathsf{T} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{linke Schar,} \\ f(b) &= \boldsymbol{\varepsilon} \otimes bb^\mathsf{T}, \quad \text{rechte Schar.} \end{aligned}$$

Jede *Tangente* der Kugel liegt in einem Strahlenbüschel, das von einer linken und einer rechten Erzeugenden mit Spinoren a bzw. b aufgespannt wird. Bei passender Normierung der Spinoren gilt für die Plücker-Matrix f der Tangente in Tangentialkoordinaten

$$f = f(a) + f(b) = aa^\mathsf{T} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \otimes bb^\mathsf{T}.$$

Tangenten können also durch Paare

$$\varphi = (a, b) \in \mathbb{C}^4$$

beschrieben werden; solche Paare nennen wir *vierkomponentige Spinoren*. Mit den Formen $\varphi = (a, 0)$ oder $\varphi = (0, b)$ werden auch die Erzeugenden erfasst.

Aus einem Spinor $\varphi = (a, b)$ können fünf Grössen – die sogenannten *bilinearen Kovarianten* – berechnet werden, die wichtige reelle Elemente der zugehörigen Tangente beschreiben (Tabelle 3). Für eine Schartangente z. B. ist $\arctan(q/p)$ der Neigungswinkel der Regelgeraden, v und w sind Koordinatenvektoren des Involutionszentrums bzw. der Kegelspitze und g ist die Plücker-Matrix des Involutionskomplexes. Umgekehrt bestimmen fünf passend normierte Kovarianten eindeutig einen homogenen Spinor $[\varphi]$ (Crawford 1985).

Kovariante	Definition
Skalar	$p = \mathrm{Re}(\langle a, \boldsymbol{\varepsilon}\overline{b}\rangle) \in \mathbb{R}$
Pseudoskalar	$q = \mathrm{Im}(\langle a, \boldsymbol{\varepsilon}\overline{b}\rangle) \in \mathbb{R}$
Vektor	$v = \mathrm{vec}(a\overline{a}^\mathsf{T} + \overline{b}b^\mathsf{T}) \in \mathbb{C}^4$
Pseudovektor	$w = \mathrm{vec}(a\overline{a}^\mathsf{T} - \overline{b}b^\mathsf{T}) \in \mathbb{C}^4$
Antisymm. Tensor	$g = \mathrm{ten}(a\overline{b}^\mathsf{T} + \overline{b}a^\mathsf{T}) \in \mathbb{C}^{4\times 4}$

Tabelle 3: Bilineare Kovarianten

Die Spinoren können anhand ihrer Kovarianten klassifiziert werden (Lounesto 2001). Man erhält *sechs verschiedene Spinorklassen*, die mit den obigen *Tangententypen der Kugel übereinstimmen* (Tabelle 4). Für die Klassen 1 bis 3 gilt $b \neq \lambda a$ und die zugehörigen Tangenten gehen durch den *imaginären* Flächenpunkt mit Koordinaten $a \otimes b$. Für die Klassen 4 bis 6 gilt $b = \lambda\overline{a}$ und die Tangenten gehen durch den *reellen* Flächenpunkt mit Koordinaten $a \otimes \overline{a}$.

Nr.	Klasse	Skalar	P.skalar	P.vektor	Tensor	Tangententyp
1	Dirac	$p \neq 0$	$q \neq 0$	$w \neq 0$	$g \neq 0$	Schartangente
2	Dirac	$p \neq 0$	$q = 0$	$w \neq 0$	$g \neq 0$	Kegeltangente
3	Dirac	$p = 0$	$q \neq 0$	$w \neq 0$	$g \neq 0$	Kurventangente
4	Lounesto	$p = 0$	$q = 0$	$w \neq 0$	$g \neq 0$	Büscheltangente
5	Majorana	$p = 0$	$q = 0$	$w = 0$	$g \neq 0$	Reelle Tangente
6	Weyl	$p = 0$	$q = 0$	$w \neq 0$	$g = 0$	Erzeugende

Tabelle 4: Spinorklassen nach Lounesto

Im Raum der vierkomponentigen Spinoren gibt es zwei fundamentale Involutionen: die Konjugation und die Zwillingsabbildung. Die *konjugiert imaginäre Tangente* wird durch

den Spinor $\varphi^{\mathsf{C}} = (\bar{b}, \bar{a})$ beschrieben. Die Majorana-Spinoren (Klasse 5) sind homogene Eigenspinoren der Konjugation: $[\varphi^{\mathsf{C}}] = [\varphi]$.

Die *Spinor-Zwillinge* $\varphi = (a, b)$ und $\varphi^{\mathsf{Z}} = (a, -b)$ ergeben beim Quadrieren die gleiche Plücker-Matrix und beschreiben damit die gleiche Tangente. Die Weyl-Spinoren (Klasse 6) sind homogene Eigenspinoren dieser Zwillingsabbildung: $[\varphi^{\mathsf{Z}}] = [\varphi]$.

Für Spinoren, die imaginäre Tangenten beschreiben, gilt: Der *homogene* Spinor $[\varphi]$ beschreibt die Tangente als Ganzes. Ein *inhomogener* Spinor φ, also ein Vertreter aus der Klasse $[\varphi]$, beschreibt einen bestimmten *harmonischen Wurf* der Darstellung. Der Übergang zu einem anderen Wurf wird durch $\varphi \to \exp(\mathrm{i}\alpha)\varphi$ erreicht (Stoss 2009).

4 Physik

Eine mathematische Struktur in der Physik (Vektor, Tensor, Spinor) wird mit ihrem absoluten Zahlenwert verwendet, diesen Aspekt nennen wir ihren *algebraischen Kern*. Die Struktur kann aber auch homogen aufgefasst und innerhalb der projektiven Geometrie gedeutet werden, dann zeigt sich ihre *geometrische Hülle*. Beide Aspekte ergänzen sich. Der Schlüssel zur Geometrie ist die Deutung der relativistischen Raumzeit als projektiver Geschwindigkeitsraum (Gschwind 2022).

In der relativistischen Quantenphysik werden Elementarteilchen durch zwei- oder vierkomponentige Spinoren beschrieben, wobei die Ladungskonjugation, die Chiralitätsspiegelung und die Eichtransformationen eine wichtige Rolle spielen (Scheck 2001). Damit können mit aller Vorsicht gewisse Korrespondenzen zwischen Physik, Algebra und Geometrie angedeutet werden (Tabelle 5).

Physik	Algebra	Geometrie
Raumzeit	Minkowski-Raum $\mathbb{R}^4$	Geschwindigkeitsraum $\mathbb{P}^3$
Minkowski-Metrik	$\langle v, Pw \rangle$	Hyperbolische Metrik
Lichtkegel	$\langle v, Pv \rangle = 0$	Metrische Quadrik (Kugel)
Lorentz-Transformationen	Matrizen $L \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $LPL^{\mathsf{T}} = P$	Hyperbolische Bewegungen
Masselose Elementarteilchen mit Spin 1/2 (Neutrinos)	Zweikomponentige Spinoren a oder b	Erzeugende der Kugel
Massive Elementarteilchen mit Spin 1/2 (Elektronen)	Vierkomponentige Spinoren $\varphi = (a, b)$	Tangenten der Kugel
Ladungskonjugation (C)	$\varphi \to \varphi^{\mathsf{C}}$	Imaginäre Konjugation
Chiralitätsspiegelung (γ_5)	$\varphi \to \varphi^{\mathsf{Z}}$	Zwillingsabbildung
Eichtransformation	$\varphi \to \exp(\mathrm{i}\alpha)\varphi$	Wechsel des Wurfes

Tabelle 5: Physik, Algebra und Geometrie

Notation

x^T Transposition, $\overline{x}$ Konjugation, $[x]$ homogene Klasse mit Vertreter x,

$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ Spinormatrix,

$a \otimes b = (a_0, a_1) \otimes (b_0, b_1) = (a_0b_0, a_0b_1, a_1b_0, a_1b_1)$ Tensorpdodukt,

$\operatorname{vec}(X) = \operatorname{vec}\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ Vektoroperation,

$\operatorname{ten}(X) = X \otimes \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \overline{X}$ Tensoroperation,

$P = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$ Polarität,

$\langle v, Pw\rangle = v_0w_0 - v_1w_1 - v_2w_2 - v_3w_3$ Minkowski-Metrik.

Literatur

Crawford, James P. (1985): «On the algebra of Dirac bispinor densities: Factorization and inversion theorems». In: *Journal of Mathematical Physics* 26.

Gschwind, Peter (2022): «Prozessuale Deutung mathematischer Grundlagen der Quantenmechanik». In: *Mathematisch-Physikalische Korrespondenz* 278.

Lerchmüller, Matthias (2013): «Spinorkoordinaten im hyperbolischen Raum». In: *Mathematisch-Physikalische Korrespondenz* 254.

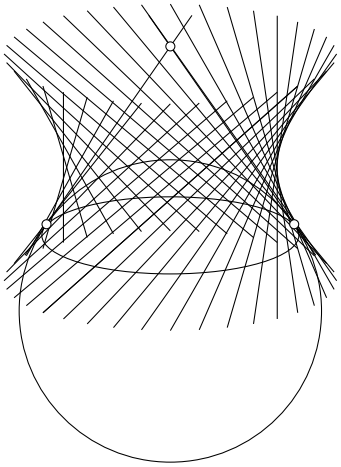
Lerchmüller, Matthias (2018): «Einführung in den projektiven Spinorkalkül». In: *Mathematisch-Physikalische Korrespondenz* 271.

Lounesto, Pertti (2001): *Clifford Algebras and Spinors*. 2. Aufl. London Mathematical Society Lecture Note Series 286. Cambridge: Cambridge University Press.

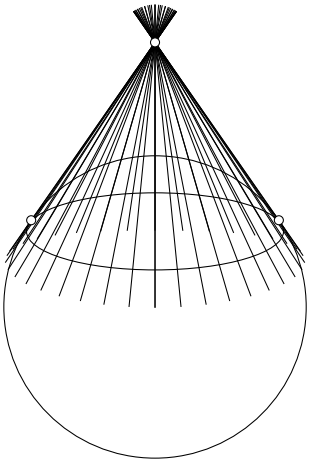
Scheck, Florian (2001): *Theoretische Physik*. Bd. 4: *Quantisierte Felder. Von den Symmetrien zur Quantenelektrodynamik*. Berlin: Springer.

Staudt, Karl Georg Christian von (1856): *Beiträge zur Geometrie der Lage*. Heft 1. Nürnberg: Bauer und Raspe.

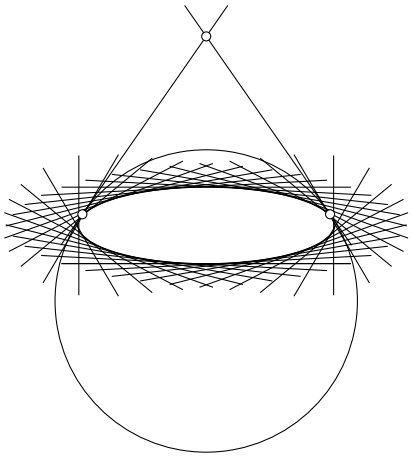
Stoss, Hanns-Jörg (2009): *Koordinaten im projektiven Raum*. Mathematisch-Astronomische Blätter, Neue Folge 27. Dornach: Verlag am Goetheanum.



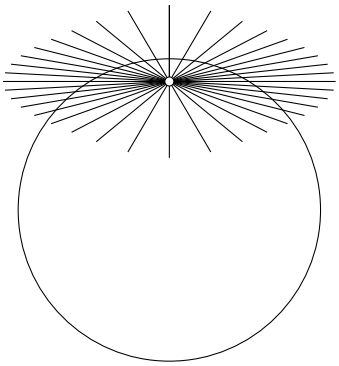
Typ 1 Schartangente



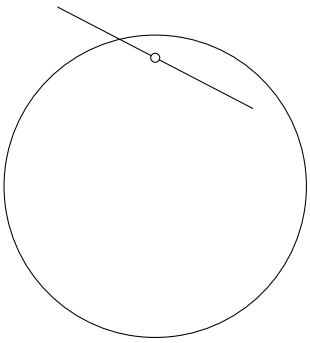
Typ 2 Kegeltangente



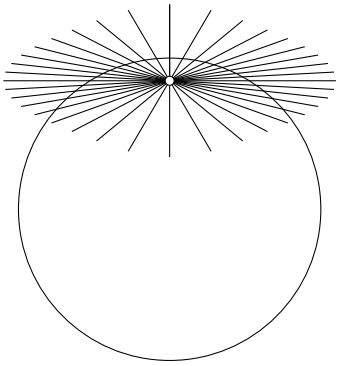
Typ 3 Kurventangente



Typ 4 Büscheltangente



Typ 5 Reelle Tangente



Typ 6 Erzeugende

Abbildung 1: Tangententypen mit ihren darstellenden Büscheln