Der Raum der Kegelschnitte

Notizen zum gleichnamigen Beitrag im Kolloquium „Mathematik und Geisteswissenschaft“

I Einleitung

Was meinen wir, wenn wir sagen, der uns umgebende Raum sei 3-dimensional? Wir verbinden damit die Vorstellung von 3 Freiheitsgraden für die Bewegung eines Punktes im Raum. Implizit treffen wir also eine Vereinbarung, Punkte als die elementaren Grundgebilde des Raumes anzusehen, wenn wir von seiner Dimension sprechen. Das Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie zeigt, dass man den Raum auch mit Ebenen als Grundelementen aufbauen kann. Entsprechend hat dann auch eine Ebene 3 Freiheitsgrade, durch die sie bestimmt ist. Anders sieht die Sache aus, wenn man Geraden als „Bewohner“ des Raumes zu Grundelementen erklärt. Hier zeigen sich plötzlich 4 Freiheitsgrade, was verdeutlicht, dass wir es hier mit einer anderen Raumauffassung zu tun haben.

Diese Sichtweise ist das erste Mal im 19.Jh. bei der Einführung der Liniengeometrie durch Plücker eingenommen worden: Die Geraden des dreidimensionalen Anschauungsraumes wurden zu Grundelementen eines neuen Raumes, dem Raum der Geraden. Dabei wird jede Gerade im Anschauungsraum durch einen Punkt in diesem neuen Raum repräsentiert. Felix Klein bezeichnet diesen Übergang als „Wechsel des Raumelements“ (Klein, 1926, S. 74). Die Ausdehnung des Raumbegriffs auf höhere Dimension geht gemäß (Klein, 1926, S. 117) auf Cayley und Grassmann zurück.

Im Prinzip können also alle Gebilde des 3-dimensionalen Anschauungsraumes als Grundelemente eines neuen Raumes gewählt werden. Reye hat 1877 Arbeiten veröffentlicht, in denen er sich mit dem 9-dimensionalen Raum beschäftigt, dessen Grundelemente die quadratischen Flächen sind (Klein, 1926, S. 80). Durch die Algebraisierung fällt es uns heutzutage nicht schwer, fast beliebige Objekte zu abstrakten Räumen zusammenzufassen, z.B. können wir ohne Schwierigkeiten vom „Raum“ der Kollineationen sprechen. Wir müssen uns nur vergegenwärtigen, dass Kollineation durch Matrizen repräsentiert werden können, die wiederum als homogene Koordinaten eines projektiven Raumes verstanden werden können.

In diesem Beitrag wollen wir uns mit der Geometrie der projektiven Ebene beschäftigen und als Grundelemente Kegelschnitte wählen. Diese bilden einen 5-dimensionalen projektiven Raum. Es soll an Beispielen beleuchtet werden, wie die Geometrie dieses Raumes sich in den entsprechenden ebenen Konfigurationen wiederspiegelt. In (Glaeser, Stachel, & Odenahl, 2016, S. 290) wird in einer Fußnote erwähnt, dass der italienische Geometer Veronese als erster die Idee hatte, Kegelschnitte als Punkte in einem 5-dimensionalen Raum aufzufassen. Dies ist in der algebraischen Geometrie aufgegriffen und enorm weiterentwickelt und abstrahiert worden, siehe z.B. (Bashelor, Ksir, & Traves, 2008). In der Folge scheint jedoch der Bezug zur ebenen Geometrie etwas in den Hintergrund geraten zu sein. Unser Anliegen ist es, mithilfe der höherdimensionalen Geometrie, neue Einsichten und Erlebnisse ebener geometrischer Figuren zu ermöglichen. Die hier dargestellten Ergebnisse sind die Früchte einer regelmäßigen gemeinsamen Arbeit mit Charles Gunn (Berlin) und Albert Chern (Kalifornien).

II Die Grundelemente

Wir betrachten eine feste Ebene, eingebettet in den Raum und schneiden sie mit einem Kegel. Alle Punkte, die sowohl in der Ebene als auch auf dem Kegel liegen, bezeichnen wir als *punktartigen Kegelschnitt*. Liegt die Spitze des Kegels in der Ebene, so besteht die Schnittmenge aus zwei Mantellinien, einem *Geradenpaar*, oder sogar aus nur einer Mantellinie, einer *Doppelgeraden,* wenn der Kegel die Ebene tangential berührt:

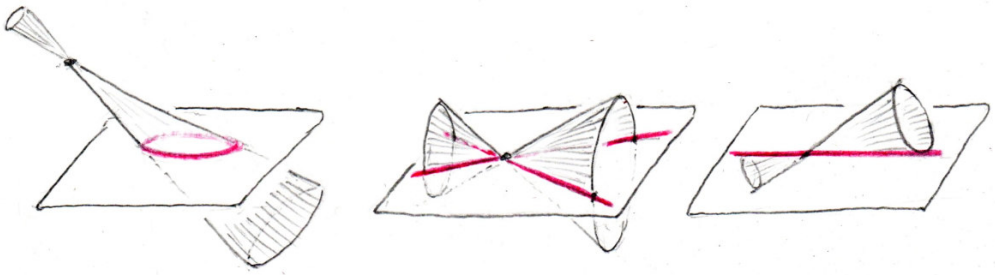


Abb. 1: Regulärer punktartiger Kegelschnitt, Geradenpaar und Doppelgerade

Eigentlich müsste man von einem *Punktreihen-Paar* bzw. einer *doppelten Punktreihe* sprechen, um den punktartigen Charakter dieser Kurven zu betonen. Wir bleiben jedoch bei den einfacheren Bezeichnungen „Geradenpaar“ und „Doppelgerade“.

Dual dazu können Kegelschnitte auch als Geradengebilde angesprochen werden. Wir stellen uns dazu alle Tangenten an einem Kreis vor. Dieses Geradengebilde ist im Raum dual zum Kegel als Menge seiner Mantellinien. Dem Schneiden entspricht dual das Projizieren. Die *geradenhaften Kegelschnitte* entstehen also, indem wir die Tangenten eines Kreises von verschiedenen Standpunkten im Raum aus betrachten. Begeben wir uns als Betrachter in die Ebene, in der der Kreis liegt, so sehen wir den Kreis nur noch als eine Strecke. Das Tangentengebilde entartet zu 2 Geradenbüscheln in den Randpunkten. Schließlich können diese beiden Geradenbüschel noch zu einem verschmelzen. Wie bei den punktartigen Kegelschnitten sprechen wir diese Entartungen als die entsprechen elementaren Gebilde an: *Punktepaar* und *doppelter Punkt*:

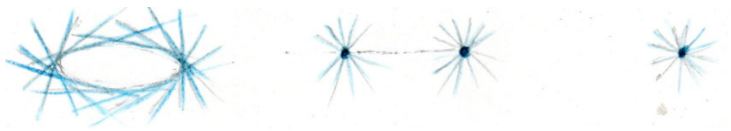


Abb. 2: Regulärer geradenartiger Kegelschnitt, Punktpaar und doppelter Punkt

Wir haben also nicht nur einen, sondern gleich zwei Räume von Kegelschnitten: Einen Raum der punktartigen Kegelschnitte und einen Raum der geradenartigen Kegelschnitte[1]. In diesen Räumen finden wir die Punkte und Geraden, also die gewöhnlichen Grundelemente der ebenen Geometrie, als Spezialfälle wieder und darüber hinaus auch Paare dieser Grundelemente. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

Reguläre punkartige Kegelschnitte	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}^*$	Reguläre geradenartige Kegelschnitte
Geradenpaare	$\mathcal{S}$	$\mathcal{S}^*$	Punktpaare
Doppelgeraden[2]	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}^*$	Doppelte Punkte

Die Menge aller punktartigen Kegelschnitte bezeichnen wir mit $\mathbb{P}^5$, den Raum aller geradenartigen Kegelschnitte mit $(\mathbb{P}^5)^*$.

Welche Beziehung besteht zwischen diesen Räumen? Um diese Frage zu beantworten, ist es zweckmäßig, den Kegel durch eine allgemeine Regelschar zu ersetzen. Der Schnitt einer solchen Regelschar mit einer allgemeinen Ebene ergibt einen punkartigen Kegelschnitt, wohingegen der Blick auf eine solche Regelfläche eine geradenartige Hüllkurve offenbart[3]. Für jede Ebene, die nicht Tangentialebene der Regelschar ist, gibt

[1] Punktartige Kegelschnitte werden auch Kurven *2.Ordnung*, geradenartige Kegelschnitte Kurven *2.Klasse* genannt.
[2] Die Teilmenge $\mathcal{V} \subset \mathbb{P}^5$ ist als Veronese-Fläche bekannt.
[3] Diese Idee geht bereits zurück auf (Dandelin, 1826)

es nun genau einen Standpunkt, von dem aus betrachtet die punktartige Schnittkurve als Hüllkurve der Regelgeraden erscheint (dies ist der Pol der Ebene bezüglich der Regelschar). Zwischen den regulären punkartigen Kegelschnitten und den regulären geradenartigen Kegelschnitten besteht also eine 1-zu-1 Beziehung.

Anders verhält sich die Situation bei den ausgearteten Kegelschnitten: Einem Geradenpaar ist das Geradenbüschel seines gemeinsamen Punktes, also der Schnittpunkt als doppelter Punkt zugeordnet. Allerdings gibt es viele Geradepaare mit dem gleichen Schnittpunkt, die Zuordnung ist also nicht mehr bijektiv. Aus diesem Grund lässt sich einer Doppelgeraden nicht mehr eindeutig ein Punktepaar oder ein doppelter Punkt zuordnen.

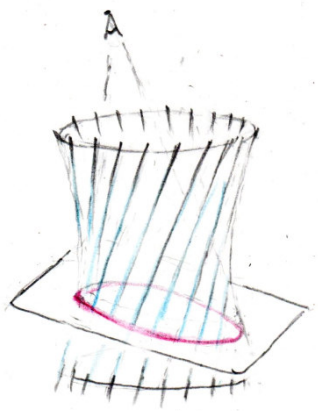


Abb. 3: Reguläre punktartige und geradenartige Kegelschnitte entsprechen sich 1-zu-1

III Geraden im Raum der Kegelschnitte

Der Raum der geradenartigen Kegelschnitte $\mathbb{P}^5$ trägt eine projektive Struktur. Insbesondere bedeutet dies, dass zwei Kegelschnitte eindeutig eine Verbindungsgerade bestimmen. Wie lassen sich alle Kegelschnitte, die ebenfalls auf dieser Geraden liegen, charakterisieren?

Eine Antwort im Rahmen einer synthetischen Behandlung ist gar nicht so leicht zu geben. Die hierfür notwendige Begriffsbildung soll auf später verschoben werden. An dieser Stelle wollen wir, gestützt auf analytische Argumente, eine grobe Vorstellung von Geraden in $\mathbb{P}^5$ vermitteln, um dann im folgenden Abschnitt erste Beispiele für 2- bzw. 3-dimensionale Gebilde in $\mathbb{P}^5$ und ihre Entsprechung in $\mathbb{P}^2$ zu studieren.

Wir fassen einen punktartigen Kegelschnitt als Lösungsmenge der quadratischen Gleichung $x^t A x = 0$ auf mit $x \in \mathbb{P}^2$ und einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{P}GL_3$. Für zwei solche Matrizen A, B betrachtet man nun alle Linearkombinationen $\lambda A + \mu B$, wobei λ und μ nicht gleichzeitig Null sein sollen. Die entsprechenden Kegelschnitte sind dann genau die Kegelschnitte der Verbindungsgerade von A und B. Ein solches Kegelschnittsystem wird auch *Kegelschnittbüschel* genannt. Mit dieser Definition ist sofort klar, dass die Schnittpunkte der Kegelschnitte A und B auch auf allen Kegelschnitten des gesamten Büschels liegen müssen. Im Allgemeinen ergibt sich also folgendes Bild für eine Gerade in $\mathbb{P}^5$:

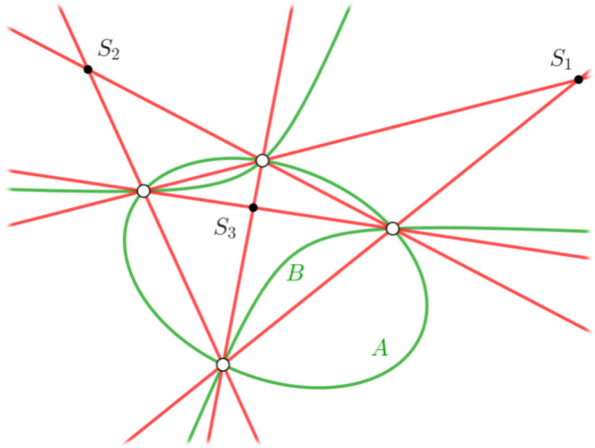


Abb. 4: Reguläres Kegelschnittbüschel in $\mathbb{P}^2$

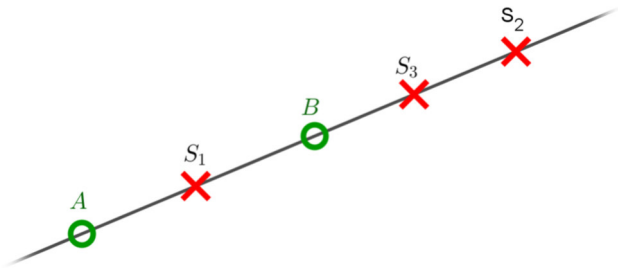


Abb. 5: Reguläre Gerade $\mathbb{P}^5$

Eine reguläre Gerade in $\mathbb{P}^5$ ist dadurch gekennzeichnet, dass auf ihr 3 einfach ausgeartete Kegelschnitte, also Geradenpaare liegen. Sie ist also die Verbindungsgerade von 2 Geradenpaare in allgemeiner Lage. Von den 4 gemeinsamen Punkten des Kegelschnittbüschels sind entweder 4, 2 oder keiner der Punkte reell.

Es entstehen nun Sonderfälle, wenn die 4 gemeinsamen Punkte nicht allgemeine Lage einnehmen. Von den insgesamt 7 möglichen Sonderfällen sollen hier nur 2 wichtige angeführt werden.

Wir stellen uns vor, dass von den 4 Punkten eines Kegelschnittbüschels zwei Paare zusammenfallen. Dies bedeutet, dass alle Kegelschnitte eines solchen Büschels sich in 2 Punkten berühren – man sagt, sie haben Doppelkontakt:

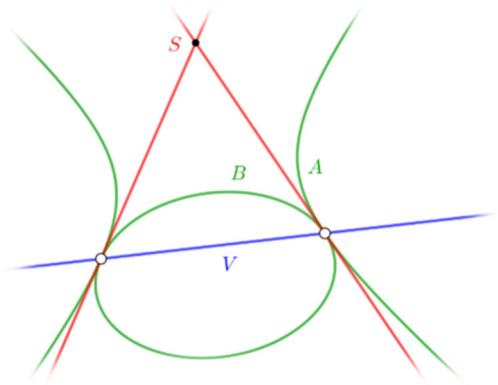


Abb. 6: Doppelkontaktbüschel in $\mathbb{P}^2$

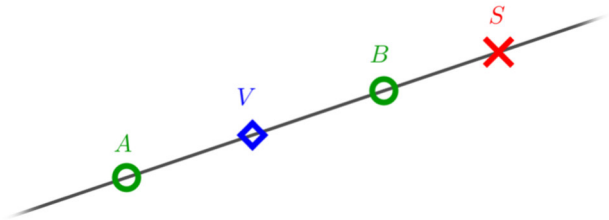


Abb. 7: Doppelkontakt Gerade in $\mathbb{P}^5$

Diese Büschel sind dadurch gekennzeichnet, dass sie ein Geradenpaar und eine Doppelgerade als ausgeartete Elemente enthalten. Umgekehrt ist die Verbindungsgerade einer Doppelgeraden und eines Geradenpaares eine solche Gerade, sofern der Schnittpunkt des Geradenpaares nicht auf der Doppelgeraden liegt.

Schließlich betrachten wir noch den Sonderfall der Verbindungsgeraden zweier Doppelgeraden[4] $A = a \cdot a^t$ und $B = b \cdot b^t$ in $\mathbb{P}^5$. Eine Linearkombination zweier Doppelgeraden lässt sich faktorisieren in ein reelles oder imaginäres Geradenpaar, das zusammen mit den Doppelgeraden einen harmonischen Wurf bildet:

$$\lambda\, a \cdot a^t - \mu\, b \cdot b^t = \left(\sqrt{\lambda}\, a + \sqrt{\mu}\, b\right) \cdot \left(\sqrt{\lambda}\, a - \sqrt{\mu}\, b\right)^t$$

Insbesondere sind alle Kegelschnitte dieses Büschels ausgeartet (gekennzeichnet durch eine gestrichelte Gerade):

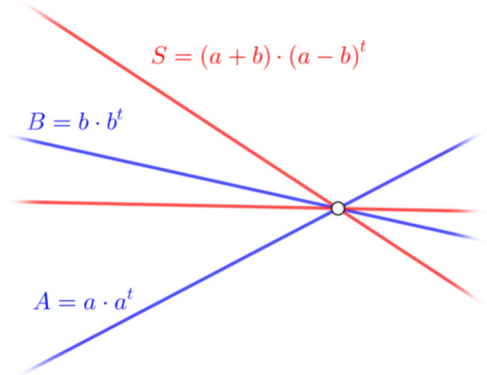


Abb. 8: Harmonisches Büschel in $\mathbb{P}^2$

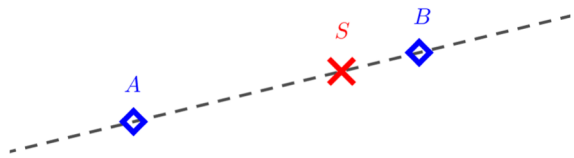


Abb. 9: Harmonische Gerade in $\mathbb{P}^5$

Bis hier haben wir Geraden im Raum der punktartigen Kegelschnitte betrachtet. Im Raum der geradenartigen Kegelschnitte könnten wir die analogen, dualen Konstruktionen durchführen. Im regulären Fall erhält man so z.B. alle Kegelschnitte, die 4 Geraden gemeinsam haben. Dies wird gewöhnlich eine *Kegelschnittschar* genannt. Die Geraden in den beiden Kegelschnitträumen entsprechen sich also im Allgemeinen nicht unter der natürlichen Identifikation eines regulären punktartigen Kegelschnitts mit einem regulären geradenartigen Kegelschnitt. Eine Ausnahme bildet das Doppelkontaktbüschel, das selbstdual ist und in beiden Räumen eine Gerade darstellt.

[4] Eine symmetrische Matrix vom Rang 1 lässt sich eindeutig darstellen als „Quadrat“ $A = a \cdot a^t$, wobei $a \cdot x = 0$ die entsprechende Doppelgerade in $\mathbb{P}^2$ repräsentiert. Ein Geradenpaar $a \cdot x = 0$ und $b \cdot x = 0$ wird durch die symmetrische Matrix $a \cdot b^t$ dargestellt.

IV Einfache Konstruktionen in $\mathbb{P}^5$ und ihre Entsprechungen in $\mathbb{P}^2$

Nachdem wir nun eine Vorstellung von der Bedeutung von Punkten und Geraden in $\mathbb{P}^5$ haben, können wir uns ersten Beispielen ebener und räumlicher Figuren in $\mathbb{P}^5$ zuwenden.

Beispiel 1

Wir beginnen in $\mathbb{P}^2$ mit einem Dreiseit abc und fassen diese 3 Geraden als Doppelgeraden auf. Dies ergibt in $\mathbb{P}^5$ ein Dreieck ABC. Wir verbinden diese 3 Punkte und schneiden die entstehenden Geraden mit einer beliebigen vierten Geraden l, die nicht durch eine der Eckpunkte des Dreiecks verläuft:

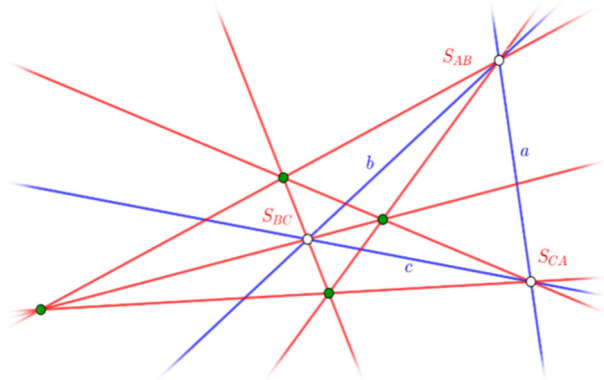


Abb. 10: Vollständiges Viereck mit Nebendreiseit abc $\mathbb{P}^2$

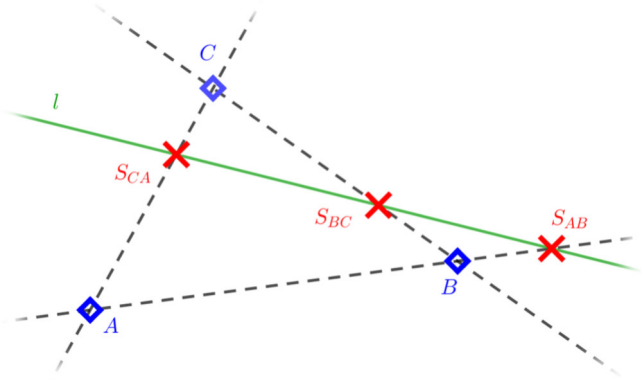


Abb. 11: Menelaos-Figur in $\mathbb{P}^5$

Da die 3 Verbindungsgeraden AB, BC und CA harmonische Geraden sind, müssen die Schnittpunkte mit der Gerade l zwingend aus Geradenpaaren bestehen, die jeweils harmonisch zu zwei der Geraden liegen, von denen wir ausgegangen sind. Da diese Geradenpaare als Punkte in $\mathbb{P}^5$ ferner kollinear sind, entsprechen sie den ausgearteten Kegelschnitten eines regulären Kegelschnittbüschels, haben also 4 gemeinsame Punkte. In $\mathbb{P}^2$ bilden sie ein vollständiges Viereck mit Nebendreiseit abc.

Beispiel 2

Wir beginnen in $\mathbb{P}^5$ wieder mit einem Dreieck ABC und wählen einen beliebigen zusätzlichen Punkt P. Welchen Kegelschnitt stellt dieser dar? Hierzu verbinden wir P mit den 3 Eckpunkten und schneiden diese Ecktransversalen mit den jeweils gegenüberliegenden Seiten. Diese Geraden stellen jeweils ein Doppelkontaktbüschel dar. Der gesuchte Kegelschnitt P in $\mathbb{P}^2$ berührt also jeweils ein Geradenpaare (z.B. S_{AB}), dessen gemeinsamer Punkt ein Eckpunkt des Dreiecks ist (im Bsp. $C = ab$), in den beiden Schnittpunkten dieses Geradenpaares mit der gegenüberliegenden Seite (im Bsp. c). Beachte, dass eines dieser Geradenpaare imaginär ist. abc ist also ein Polardreiseit zum Kegelschnitt P.

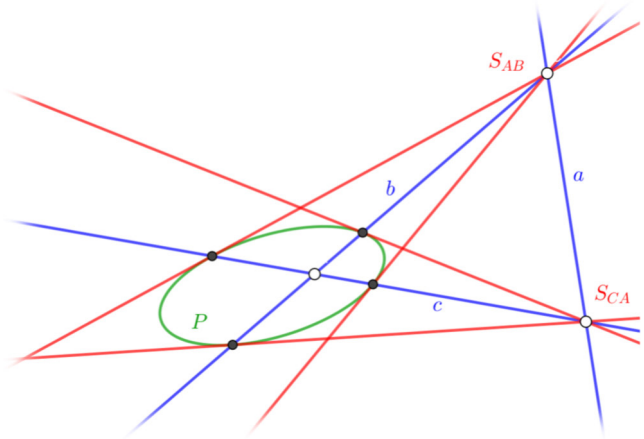


Abb. 12: Kegelschnitt mit Polardreiseit abc

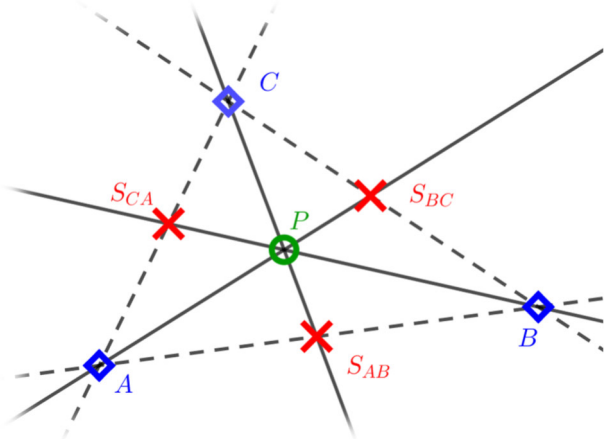


Abb. 13: Ceva-Figur in $\mathbb{P}^5$

Diese beiden Beispiele können wir wie folgt zusammenfassen:

Theorem 1: Seien a, b, c drei Geraden in $\mathbb{P}^2$ und A, B, C die zughörigen Doppelgeraden in $\mathbb{P}^5$, sowie $E = \langle A, B, C \rangle$ die von ihnen aufgespannte Ebene in $\mathbb{P}^5$. Dann gilt:

(1) Jede Gerade in E, die keinen der Punkte A, B, C enthält, entspricht eindeutig einem vollständigen Viereck in $\mathbb{P}^2$ mit Nebendreiseit abc.

(2) Jeder Punkt in E, der nicht auf einer Verbindungsgeraden von A, B, C liegt, entspricht eindeutig einem regulären Kegelschnitt mit Polardreiseit abc.

Wir können die Konstruktion des letzten Beispiels auch anders aufbauen, nämlich beginnend mit einem regulären Kegelschnitt R und einer Geraden a in $\mathbb{P}^2$. Dann konstruiert man den Pol P_a dieser Geraden mithilfe des Tangentenpaares T_a in den Schnittpunkten des Kegelschnitts mit a. Die gleiche Konstruktion führt man auch für eine zweite Gerade b und ihren Pol P_b aus. Geht dabei die Gerade b durch den Pol P_a von a, so bedeutet dies in $\mathbb{P}^5$, dass die Gerade $\langle T_a, B \rangle$ nur ausgeartete Kegelschnitte enthält somit eine harmonische Gerade sein muss[5]. Insbesondere ist dann der Schnittpunkt von $\langle T_a, B \rangle$ und $\langle T_b, A \rangle$ ein ausgearteter Kegelschnitt. Dies ist aber wiederum nur möglich, wenn $\langle T_b, A \rangle$ ebenfalls eine harmonische Gerade ist. Also geht die Gerade a auch durch den Pol P_b von b. Dieser Sachverhalt ist auch bekannt als Hauptsatz der Polarentheorie.

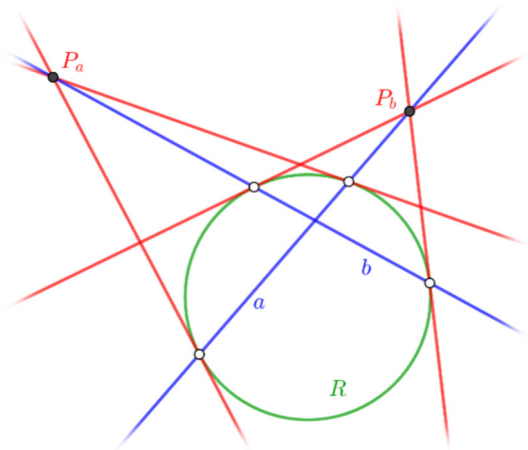


Abb. 14: Hauptsatz der Polarentheorie in $\mathbb{P}^2$ ...

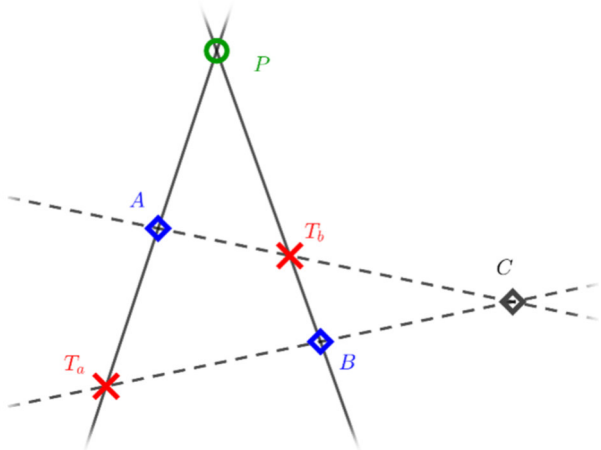


Abb. 15: ... und der Beweis in $\mathbb{P}^5$

Beispiel 3

Wir beginnen wieder mit einem Kegelschnitt R und zwei Geraden a und b. Diesmal betrachten wir jedoch nicht die Tangentenpaare in den Schnittpunkten mit a und b sondern allgemeine Kegelschnitte P und Q, die mit R Doppelkontakt haben in den Schnittpunkten. Die entsprechende Konfiguration in $\mathbb{P}^5$ besteht aus zwei Punkten auf zwei Doppelkontaktgeraden $P \in \langle R, a \rangle$ und $Q \in \langle R, b \rangle$, die R als gemeinsamen Punkt haben. Die Gerade $\langle a, b \rangle$ ist eine harmonische Gerade, sie besteht also aus allen Geradenpaaren, die harmonisch zu a und b liegen. Der Schnittpunkt S mit der regulären Geraden $\langle P, Q \rangle$ ist demnach auch ein solches Geradenpaar und gleichzeitig ein ausgeartetes Element des von P und Q erzeugten Kegelschnittbüschels. Wir erhalten also den folgenden Satz, den man z.B. auch bei (Salmon, 1850, S. 219) findet:

Theorem 2: Wenn zwei Kegelschnitte Doppelkontakt mit einem dritten haben, dann bilden die beiden Kontaktsehnen sowie zwei der Schnittsehnen einen harmonischen Wurf.

[5] Es gibt noch zwei weitere Geradentypen in $\mathbb{P}^5$, die nur ausgeartete Kegelschnitte enthalten: Der eine Typ ergibt sich, wenn man als Gerade b eine der Tangenten von T_a wählt. Der andere Typ enthält keine Doppelgeraden.

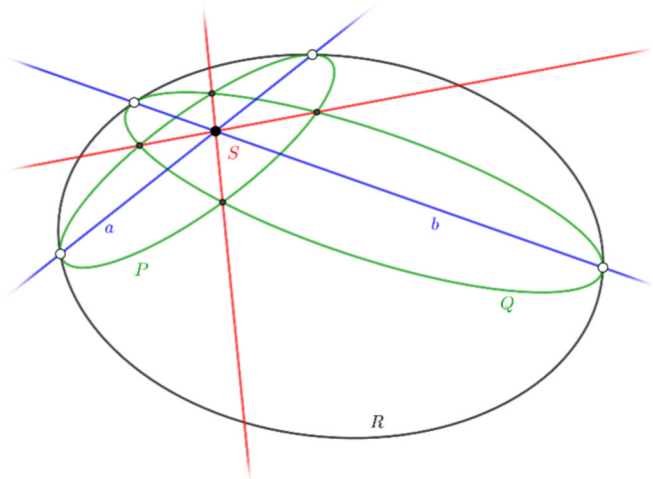


Abb. 16: Zwei Kegelschnitte mit Doppelkontakt zu einem dritten

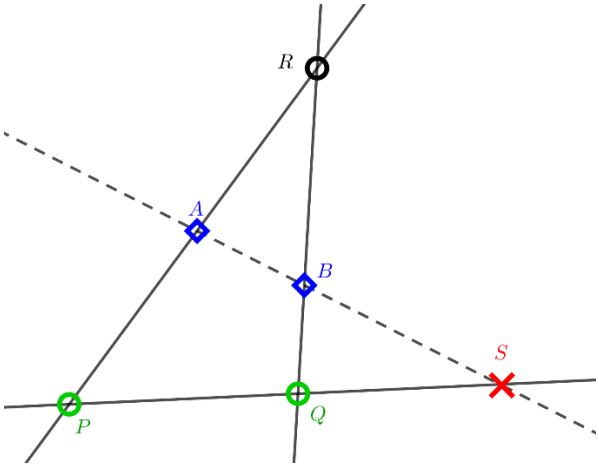


Abb. 17: Ein weiteres Vierseit in $\mathbb{P}^5$

Beispiel 4

Wir nehmen noch einen dritten Kegelschnitt O hinzu, der ebenfalls Doppelkontakt mit R haben soll. Die beiden Dreiecke abc und PQO sind in $\mathbb{P}^5$ zentriert und damit nach dem Satz von Desargues auch liniert. Wie im vorherigen Beispiel entsprechen den 3 Punkten U, V, W auf der Achse der Desargues-Figur Geradenpaare in $\mathbb{P}^2$, die einerseits Schnittsehnen der Kegelschnitte PQO sind und andererseits ein vollständiges Viereck mit Nebendreiseit abc bilden (siehe Beispiel 1). Wir erhalten also den Satz:

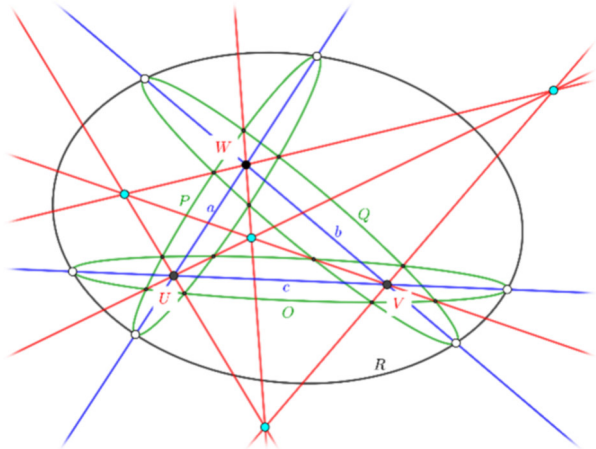


Abb. 18: Doppelkontakt-Theorem

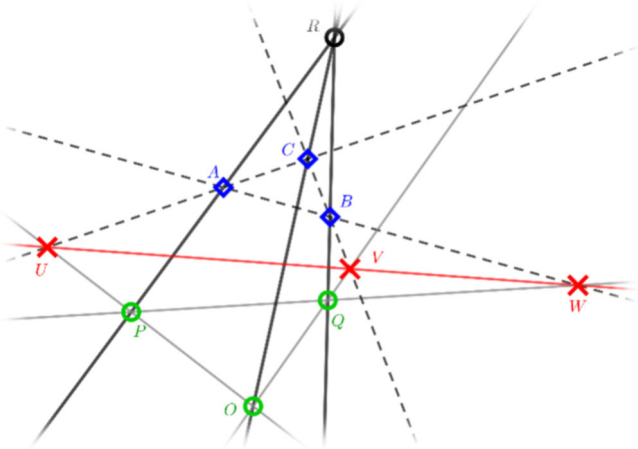


Abb. 19: Desargues-Konfiguration

Theorem 3: Wenn drei Kegelschnitte Doppelkontakt mit einem vierten haben, dann haben die 3 Kegelschnitte paarweise 2 gemeinsame Schnittsehnen, so dass diese 6 Geraden ein vollständiges Viereck bilden, dessen Nebendreiseit aus den Kontaktsehnen besteht.

Auch dieser Satz war bereits G. Salmon bekannt (Nr. 264) und wird in (Evelyn, Money-Coutts, & Tyrrell, 1974, S. 18) als Doppelkontakt-Theorem aufgeführt. Für die Umkehrung des Satzes genügt es, dass 3 Kegelschnitte paarweise eine Schnittsehne haben, die sich alle 3 in einem Punkt treffen, um auf die Existenz des Kegelschnittes R zu schließen.

Beispiel 5

Als nächstes betrachten wir den Spezialfall des vorherigen Beispiels, bei dem die Kegelschnitte O, P, Q die Tangentenpaare an R sind (wie im Beispiel 2). Dies ergibt folgende erstaunliche Konfiguration:

Theorem 4: Drei Tangentenpaare an einen regulären Kegelschnitt können paarweise zu einem vollständigen Viereck ergänzt werden. Diese 6 neuen Geraden bilden selbst ebenfalls ein vollständiges Viereck. Es ergibt sich in $\mathbb{P}^2$ eine $(16_3, 12_4)$-Konfiguration von 16 Punkten und 12 Geraden. In $\mathbb{P}^5$ entspricht dies einem vollständigen Vierseit, dessen 6 Punkte einfach ausgeartet sind.

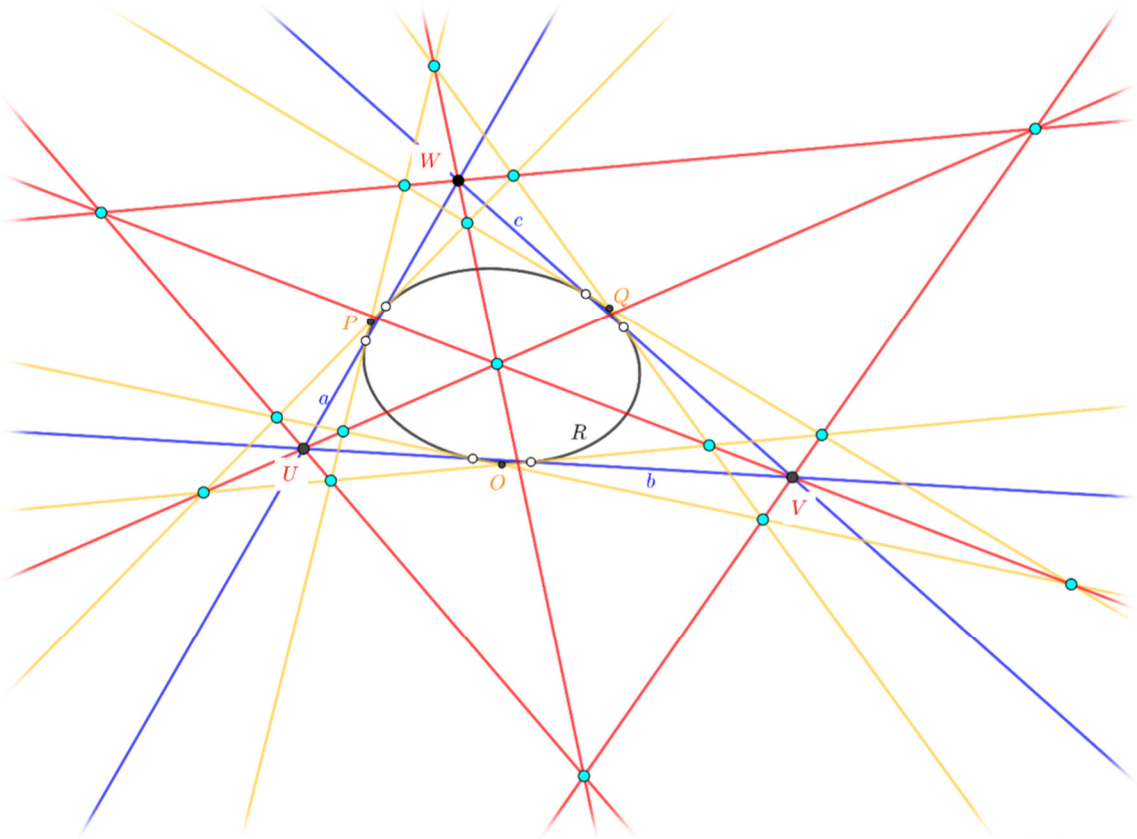
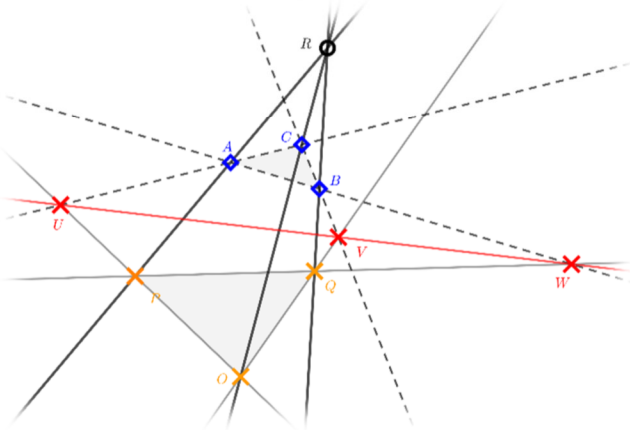


Abb. 20: Die $(16_3, 12_4)$-Konfiguration von de Vries



In dieser Konfiguration sind auf 4 verschiedene Arten Brianchon-Figuren enthalten: Die 6 Tangenten an R können als ein diesem Kegelschnitt umschriebenes Sechsseit aufgefasst werden. Wir betrachten nun nur solche Reihenfolgen dieses Sechsseits, deren Gegenseiten genau die Paare O, P, Q sind – davon gibt es 4 Stück. Die Diagonalen dieser Sechsseite entsprechen gerade den 6 Geraden des vollständigen Vierecks U, V, W. Diese Konfiguration wurde zuerst in (de Vries, 1888) untersucht und später dann de-Vries-Konfiguration genannt.

Beispiel 6

Abschließend kommen wir noch auf folgenden merkwürdigen Spezialfall dieser Konfiguration zu sprechen, der entsteht, wenn der Kegelschnitt R in der von A, B, C aufgespannten Ebene in $\mathbb{P}^5$ liegt. Das Dreieck OPQ ist dann dem Dreieck ABC einbeschrieben. Auf jeder Verbindungsgerade zweier Doppelgeraden (z.B. AB) liegen zwei Punkte der Desargues-Konfiguration. Diese entsprechen 2 Geradenpaaren (im Bsp. Q und W), die mit den beiden Doppelgeraden harmonische Würfe bilden. Genau eines der Geradenpaare ist reell, das andere imaginär. Diese Konfiguration vereint die Beispiele 1 und 2 in einer Konstruktion.

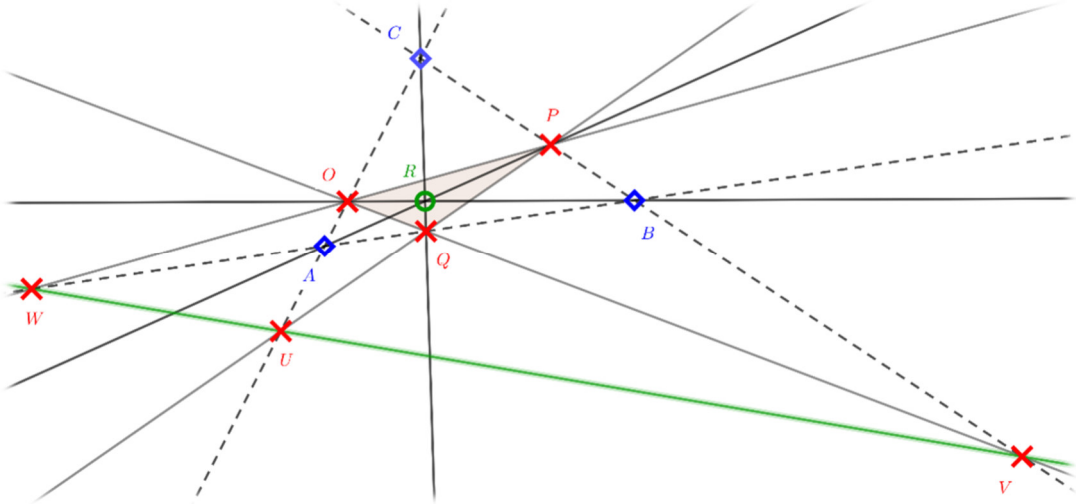


Abb. 21: Vereinigung von Bsp. 1 und Bsp. 2 zu einer speziellen de-Vries-Konfiguration

V Ausblick

Das letzte Beispiel lässt den Wunsch aufkommen, alle Kegelschnitte zu überschauen, die einer Ebene in $\mathbb{P}^5$ angehören – solche Systeme werden auch *Kegelschnittnetze* genannt. Insbesondere wird zu klären sein, welche Punkte einer solchen Ebene ausgearteten bzw. nullteiligen Kegelschnitten entsprechen.

Ferner haben sich alle Beispiele bisher ausschließlich auf den Raum der punktartigen Kegelschnitte beschränkt. Jede dieser Konstruktionen lässt sich natürlich dualisieren in $\mathbb{P}^2$. Man erhält dadurch die entsprechenden Gebilde in $(\mathbb{P}^5)^*$. Wenn nun aber in einer ebenen Konstruktion gleichzeitig punktartige und geradenartige Gebilde untersucht werden sollen – z.B. Geradenpaare und Punktpaare – so verlangt dies nach einer neuen Begriffsbildung, der sogenannten Apolarität zwischen punktartigen und geradenartigen Kegelschnitten.

VI Literaturverzeichnis

Bashelor, A., Ksir, A., & Traves, W. (October 2008). Enumerative Algebraic Geometry of Conics. *AMS Monthly*, S. 701-728.

Dandelin, G. P. (1826). Mémoire sur l'hyperboloïde de révolution, et sur les hexagones de Pascal et de M. Brianchon. *Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*.

de Vries, J. (1888). Über gewisse ebene Configurationen. *Acta Math. 12*, S. 63-81.

Evelyn, C., Money-Coutts, G., & Tyrrell, J. (1974). *The Seven Circle Theorem and Other New Theorems.*

Glaeser, G., Stachel, H., & Odenahl, B. (2016). The Universe of Conics.

Klein, F. (1926). *Vorlesung über höhere Geometrie, 3.Aufl.*

Reye, T. (1877). Über lineare Systeme und Gewebe von Flächen zweiten Grades. *Crelles Journal, Bd. 82*.

Salmon, G. (1850). *A Treatise on Conic Sections, 2.Ed.*